industriales
etsii UPCT

Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas II - Problemas tema 7
Ecuaciones diferenciales
Introducción a las EDO. Ecuaciones de orden 1

1. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y' = \dfrac{3x^2}{y}$ (b) $y' = 4xy^2$ (c) $y' = 3x^2y$

(d) $y^2y' = e^x$ (e) $y' = y\,(y-1)$ (f) $y' = \dfrac{y}{x}$

(g) $y' + 2y = 4$ (h) $y' + 3y = e^{-3x}$ (i) $y' + (2\tan x)\,y = \operatorname{sen} x$

(j) $y' + \dfrac{2y}{x} = 2\cos x$ (k) $y' + ax^2y = bx^2$ (l) $y' + a\dfrac{y}{x} = x^2$

(m) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$ (n) $y'\cos x + y\operatorname{sen} x = 1$ (o) $y' - \dfrac{2ax}{1+x^2}y = 2x; \quad a \neq 0, 1$

(p) $\left(\operatorname{sen}^2 x - y\right) dx = \tan x \; dy$ (q) $y' = y - \ln x + \frac{1}{x}$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' = \dfrac{y+2}{x-3} \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y\,(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2-1}{2y+1} \\ y\,(0) = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x} \\ y\,(1) = 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2xyy' = -\left(x^2+y^2\right) \\ y\,(1) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} xy^3y' = x^4 + y^4 \\ y\,(2) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' = 3x^2y + x^2 \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y' + y = e^{-x} \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$

3. El proceso químico formado por dos pasos consecutivos de primer orden

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

se modela matemáticamente por medio de las dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{d\,[A]}{dt} = -k_1\,[A] \\ \\ \dfrac{d\,[B]}{dt} = k_1\,[A] - k_2\,[B] \end{cases}$$

Supongamos que las concentraciones iniciales son $[A]_0 = a$, $[B]_0 = [C]_0 = 0$, y que las concentraciones en el tiempo t son $[A] = a - x(t)$, $[B] = y(t)$ y $[C] = x(t) - y(t)$. Calcula las concentraciones en el tiempo t para los casos: (i) $k_1 = 1$, $k_2 = 10$, (ii) $k_1 = k_2 = 1$, y (iii) $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}1$. Representa gráficamente las soluciones obtenidas en los tres casos para $0 \leq t \leq 10$.

4. El proceso químico formado por tres pasos consecutivos de primer orden

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \xrightarrow{k_3} D$$

está modelado matemáticamente por medio del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d(a-x)}{dt} = -k_1 (a-x) \\[2ex] \dfrac{d(y)}{dt} = k_1 (a-x) - k_2 y \\[2ex] \dfrac{d(z)}{dt} = k_2 y - k_3 z \\[2ex] x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

donde $(a-x)$, y, z son las concentraciones de A, B, y C, respectivamente, en el tiempo t. Supongamos que $k_1 \neq k_2$, $k_1 \neq k_3$ y $k_2 \neq k_3$. Calcula C como función de t.

5. Consideremos un circuito eléctrico tipo RL formado por una resistencia y una bobina. Las leyes de Ohm y Kirchhoff establecen que la intensidad I de corriente eléctrica que circula por el circuito en el tiempo t obedece la ecuación

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

donde las constantes L y R representan la inductancia y la resistencia, y E es la fuerza electromotriz generada por el generador o la batería. En el caso de corriente continua $E = E_0$, constante. Resuelve el siguiente problema e interpreta físicamente la solución obtenida:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + RI = E_0, \quad t > 0 \\[2ex] I(0) = 0. \end{cases}$$

6. Para un circuito tipo RC formado por una resistencia y un condensador, la intensidad de corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

donde la constante C representa la capacitancia del condensador. Resuelve la ecuación anterior para la condición inicial $I(0) = 0$ en los casos: (i) $E = E_0$, constante, y (ii) $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.
