industriales
etsii UPCT

509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
2 de junio de 2022
Examen Ordinario - Parcial 1 - Duración: 120 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: [X] PARCIAL 1 [ ] PARCIAL 2 [ ] GLOBAL [ ] PROBLEMAS

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca rojo, ni lápiz**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0.
- Está terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE:** Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con 0.

A. PRIMER PARCIAL (40 %)

1. (**1.5 punto**) Calcula la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$$

Solución: Usaremos el método Alemán

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\int \frac{L}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, Q_{n-1} es un polinomio de grado $(n-1)$ y $L \in \mathbb{R}$. En este caso

$$P_n(x) = x-2$$

es de grado 1, por tanto $Q_{n-1}(x)$ será de grado 0

$$Q_{n-1}(x) = A$$

de forma que

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = A\sqrt{1+2x-x^2}+\int \frac{L}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

Si se deriva la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{\sqrt{1+2x-x^2}} &= A\frac{2-2x}{2\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{L}{\sqrt{1+2x-x^2}}\\
&= \frac{A\,(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{L}{\sqrt{1+2x-x^2}}\\
&= \frac{A\,(1-x)+L}{\sqrt{1+2x-x^2}}\\
&= \frac{-Ax+(L+A)}{\sqrt{1+2x-x^2}}
\end{aligned}$$

igualamos numeradores

$$x-2=-Ax+(L+A)$$

e identificamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{r} -A=1\\ L+A=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow A=L=-1$$

por tanto

$$\int\frac{x-2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx=-\sqrt{1+2x-x^2}+\int\frac{-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

si tenemos en cuenta que

$$1+2x-x^2=2-(x-1)^2$$

la integral es inmediata

$$\int\frac{-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{2-(x-1)^2}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx=-\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

La integral completa sería

$$\int\frac{x-2}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx=-\sqrt{1+2x-x^2}-\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. (**1.5 puntos**) Indica por qué es impropia la siguiente integral y determina si es o no convergente, calculando en ese caso su valor

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\,(\ln(x))^2}\;dx$$

Solución: Esta integral es impropia de primera especie porque el intervalo de integración es no acotado. Recordemos que para estas integrales

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\,(\ln(x))^2}\;dx\;=\lim_{x\to\infty}\int_2^x\frac{1}{t\,(\ln(t))^2}\;dt$$

La primitiva es inmediata, teniendo en cuenta que la derivada de $\ln(t)$ es $\frac{1}{t}$ y por tanto es una integral de la forma

$$\int f'(t)\,f(t)^\alpha\,dt=\frac{f(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

es decir

$$\int_2^x\frac{1}{t\,(\ln(t))^2}\;dt=\int_2^x\frac{1}{t}\,(\ln(t))^{-2}\,dt=\left[\frac{\ln(t)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{t=2}^{t=x}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_{t=2}^{t=x}=\frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(t)}$$

tomando límites

$$\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t\left(\ln(t)\right)^2}\ dt \ = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(t)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

luego la integral es convergente y su valor es $\frac{1}{\ln(2)}$.

3. Sea la función

$$f(x,y,z) = \frac{zy}{x^2+1}$$

Se pide:

a) Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y,z)$ en el punto $\vec{a} = (0,1,1)$, en la dirección $\vec{v} = (1,2,1)$.

i) (**0.75 puntos**) Usando la definición por límites.
Solución: Utilizando la definición de derivada direccional por límites

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(\vec{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} \Rightarrow \\ D_{(1,2,1)}f(0,1,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,1,1)+t(1,2,1)) - f(0,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,1+2t,1+t) - f(0,1,1)}{t} \end{aligned}$$

donde

$$f(t,1+2t,1+t) = \frac{(1+t)(1+2t)}{(t)^2+1} = \frac{1+t+2t+2t^2}{t^2+1} = \frac{1+3t+2t^2}{t^2+1}$$

$$f(0,1,1) = \frac{1\cdot 1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

sustituyendo en el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,1+2t,1+t) - f(0,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1+3t+2t^2}{t^2+1} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3+t}{t^2+1} = 3$$

ii) (**0.75 puntos**) Usando el gradiente de $f(x,y,z)$.
Solución: Usando el gradiente de $f(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(\frac{-2xzy}{\left(x^2+1\right)^2}, \frac{z}{x^2+1}, \frac{y}{x^2+1}\right)$$

evaluamos en el punto

$$\nabla f(0,1,1) = (0,1,1)$$

y calculamos la derivada direccional usando la expresión correspondiente

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(\vec{a}) &= \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} \Rightarrow \\ D_{(1,2,1)}f(0,1,1) &= \nabla f(0,1,1) \cdot (1,2,1) = (0,1,1)\cdot(1,2,1) = 3 \end{aligned}$$

igual que hemos obtenido en el apartado anterior.

b) (**0.75 puntos**) Calcula la diferencial de la función $f(x,y,z)$ en el punto $\vec{a} = (0,1,1)$.
Solución: La función es derivable y tiene derivadas parciales continuas puesto que el término x^2+1 del denominador no se anula nunca, luego las componentes del gradiente son continuas en todos los puntos, de esta forma, la diferencial es

$$\begin{aligned} df(\vec{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a})\,dz \Rightarrow \\ df(0,1,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1)\,dz \\ &= 0dx + 1dy + 1dz = dy + dz \end{aligned}$$

4. **(1.75 puntos)** Calcula la matriz Jacobiana de la función $L(x,y) = (F \circ G)(x,y)$ en el punto $(1,1)$ y razona si existe $L^{-1}(x,y,z)$, la inversa de L en un entorno del punto $(1,1)$, siendo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$y $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, las funciones definida por

$$G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) = \left(xy,\ x+y,\ x^2+y^2\right)$$

$$F(u,v,w) = (f_1(u,v,w), f_2(u,v,w)) = \left(uvw,\ u^2+v^3+w^4\right)$$

Solución: Usando el teorema de la función compuesta tenemos

$$J(F \circ G)(x,y) = JF(G(x,y)) \cdot JG(x,y)$$

en particular, para el punto $(1,1)$

$$J(F \circ G)(1,1) = JF(G(1,1)) \cdot JG(1,1)$$

Usando G

$$G(1,1) = \left(1 \cdot 1,\ 1+1,\ 1^2+1^2\right) = (1,2,2)$$

por tanto

$$JF(G(1,1)) \cdot JG(1,1) = JF(1,2,2) \cdot JG(1,1)$$

Calculamos la matriz Jacobiana de $F(u,v,w)$

$$JF(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vw & uw & uv \\ 2u & 3v^2 & 4w^3 \end{pmatrix}$$

y evaluamos en el punto $(1,2,2)$

$$JF(1,1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 32 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz Jacobiana de $G(x,y)$

$$JG(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

y evaluamos en el punto $(1,1)$

$$JG(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El valor del Jacobiano de la función compuesta L en $(1,1)$ será

$$J(F \circ G)(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 78 & 78 \end{pmatrix}$$

Para determinar si existe la inversa de L, sólo hay que comprobar si el determinante anterior es o no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 78 & 78 \end{pmatrix} = 0$$

luego no existe la función inversa en el punto $(1,1)$

5. Sea la ecuación

$$xz^2 + yz^3 - 2 = 0$$

y considera el punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

a) **(0.5 puntos)** Prueba que en un entorno del punto P el sistema define a la variable z como función implícita de x e y.

Solución: La ecuación está descrita como

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

donde $\varphi(x, y, z) = xz^2 + yz^3 - 2$. Comprobaremos que se cumplen las hipótesis del teorema de la función inversa

i) La función φ es de clase C^1.	Está claro puesto que es una función polinomial.
ii) La función pasa por el punto.	$\varphi(1, 1, 1) = 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ Correcto.
iii) La derivada parcial de la función respecto de la variable dependiente no se anula en el punto.	$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 2xz + 3yz^2 \Rightarrow$ $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2 + 3 = 5 \neq 0$ Correcto.

Se cumplen todas las hipótesis y podemos considerar a la variable z como función de las variables x e y.

b) **(1.25 puntos)** Determina el valor de las siguientes derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

Para obtener las derivadas parciales de z respecto de las variables x e y, utilizamos la ecuación, que derivamos respecto de x y respecto de y y tenemos en cuenta que $z = z(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xz^2 + yz^3 - 2\right) = 0 \Rightarrow z^2 + 2xzz_x + 3yz^2 z_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xz^2 + yz^3 - 2\right) = 0 \Rightarrow 2xzz_y + z^3 + 3yz^2 z_y = 0$$

donde por simplificar hemos tomado además $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ y $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

Si evaluamos en el punto $(1, 1)$, teniendo en cuenta que $z(1, 1) = 1$

$$z(1,1)^2 + 2xz(1,1)\, z_x(1,1) + 3yz^2(1,1)\, z_x(1,1) = 0 \Rightarrow 1 + 2z_x(1,1) + 3z_x(1,1) = 0 \Rightarrow z_x(1,1) = -\frac{1}{5}$$

$$2xz(1,1)\, z_y(1,1) + z^3(1,1) + 3yz^2(1,1)\, z_y(1,1) = 0 \Rightarrow 2z_y(1,1) + 1 + 3z_y(1,1) = 0 \Rightarrow z_y(1,1) = -\frac{1}{5}$$

c) **(1.25 puntos)** Comprueba si se cumple el teorema de Schwarz-Clairaut para $z(x, y)$

Solución: Para comprobar que se cumple el teorema de Schwarz-Clairaut hay que verificar que $z_{xy}(1, 1)$ es igual a $z_{yx}(1, 1)$. Para ello derivamos la ecuación respecto de x (ya está hecho en el apartado anterior) y luego respecto de y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x \partial y}\left(xz^2 + yz^3 - 2\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 + 2xzz_x + 3yz^2 z_x\right) = 0 \Rightarrow \\
2zz_y + 2x\left(z_y z_x + zz_{xy}\right) + 3z^2 z_x + 6yzz_y z_x + 3yz^2 z_{xy} &= 0
\end{aligned}$$

evaluamos en el punto $(1, 1)$, teniendo en cuenta que $z(1, 1) = 1$ y que $z_x(1, 1) = z_y(1, 1) = -\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2\left(\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) + z_{xy}(1,1)\right) + 3\left(-\frac{1}{5}\right) + 6\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) + 3z_{xy}(1,1) &= 0 \\
-\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + 2z_{xy}(1,1) - \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + 3z_{xy}(1,1) &= 0 \\
-\frac{17}{25} + 5z_{xy}(1,1) &= 0 \\
z_{xy}(1,1) &= \frac{17}{125}
\end{aligned}$$

Derivamos ahora la ecuación respecto de y (ya está hecho en el apartado anterior) y luego respecto de x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y \partial x}\left(xz^2+yz^3-2\right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(2xzz_y+z^3+3yz^2z_y\right)=0 \Rightarrow \\
2zz_y+2xz_xz_y+2xzz_{yx}+3z^2z_x+3y\left(2zz_xz_y+z^2z_{yx}\right) &= 0
\end{aligned}$$

que en el punto $(1,1)$ nos daría

$$\begin{aligned}
2\left(-\frac{1}{5}\right)+2\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)+2z_{yx}(1,1)+3\left(-\frac{1}{5}\right)+3\left(2\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)+z_{yx}(1,1)\right) &= 0 \\
-\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+2z_{yx}(1,1)-\frac{3}{5}+3\left(\frac{2}{25}+z_{yx}(1,1)\right) &= 0 \\
-\frac{17}{25}+5z_{yx}(1,1) &= 0 \\
z_{yx}(1,1) &= \frac{17}{125}
\end{aligned}$$

y por tanto se cumple

$$z_{xy}(1,1)=z_{yx}(1,1)$$

509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
2 de junio de 2022
Examen Ordinario - Parcial 2 - Duración: 120 minutos

industriales
etsii UPCT

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: PARCIAL 1 ☐ PARCIAL 2 ☒ GLOBAL ☐ PROBLEMAS ☐

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca rojo, ni lápiz**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0.
- Está terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE:** Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con 0.

B. Segundo Parcial (40 %)

1. (**2.5 puntos**) Calcula en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$, los polinomios de Taylor de **orden 1** (plano tangente) y de **orden 2** para la función
$$f(x,y,z) = e^x(\cos y + \sin z)$$

Solución: En el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$, evaluamos la función

$$f(x,y,z) = e^x(\cos y + \sin z) \Rightarrow f\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right) = 1(0+0) = 0$$

el gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^x(\cos y + \sin z), -e^x \sin y, e^x \cos z\right) \Rightarrow \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = (0,-1,-1)$$

y la matriz Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x(\cos y + \sin z) & -e^x \sin y & e^x \cos z \\ -e^x \sin y & -e^x \cos y & 0 \\ e^x \cos z & 0 & -e^x \sin(z) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio tangente o polinomio de Taylor de orden 1 es

$$T_1(x,y,z) = f\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) + \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{\pi}{2} \\ z-\pi \end{pmatrix} = 0 + (0,-1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y-\frac{\pi}{2} \\ z-\pi \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi}{2} - y\right) + (\pi - z) = \frac{3\pi}{2} - y - z$$

y el polinomio de Taylor de orden 2

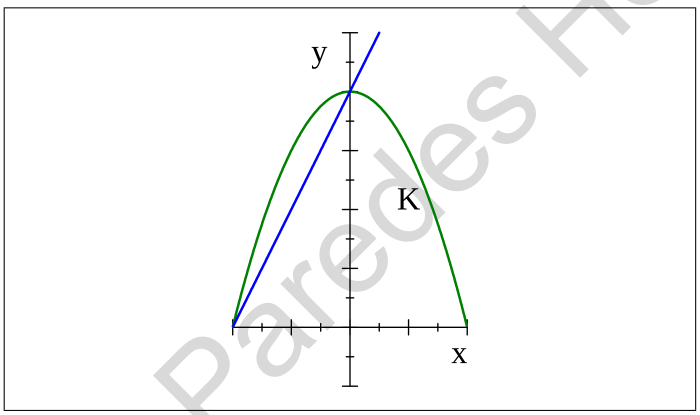
$$T_2(x,y,z) = T_1(x,yz) + \frac{1}{2}\left(x-0, y-\frac{\pi}{2}, z-\pi\right) Hf\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{\pi}{2} \\ z-\pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) &= \left(\frac{3\pi}{2}-y-z\right) + \frac{1}{2}\left(x, y-\frac{\pi}{2}, z-\pi\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-\frac{\pi}{2} \\ z-\pi \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2}\pi - y - z + \frac{3}{2}\pi x - xy - xz \end{aligned}$$

2. **(2.5 puntos)** Encuentra, justificando su existencia, los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 4 - x^2; \quad y \geq 2x + 4\right\}$$

que está representado en la siguiente gráfica



Solución: El conjunto K es un conjunto compacto, puesto que usando la gráfica se puede deducir que está acotado (está contenido, por ejemplo en la bola de centro $(0,0)$ y radio 4) y como incluye a la frontera ya que incluye las igualdades en la definición, también es cerrado, como además la función es continua, por ser una función polinomial, el teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia de máximo y mínimo sobre el conjunto K. Para encontrar estos valores dividimos el problema en dos subproblemas: interior ($\mathring{K}$) y frontera (δK).

$$\text{Problema } P \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ K = \delta K \cup \mathring{K} \\ K \text{ compacto} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{Subproblema en el interior } P_1 \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ (x,y) \in \mathring{K} \end{array} \right\} \\ \\ \text{Subproblema en la frontera } P_2 \left\{ \begin{array}{c} \text{Optimizar } x^2+y^2 \\ (x,y) \in \delta K \end{array} \right\} \end{array}$$

El problema P_1 es el problema sin restricciones

$$\text{Optimizar } x^2+y^2$$

donde sólo hay que utilizar las condiciones de primer orden para encontrar los puntos críticos, es decir, puntos que anulan el gradiente de $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \\ \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0$$

Se ha obtenido el punto $P1 = (0,0)$.

El problema P_2 es un problema de optimización sobre la frontera del conjunto, que está definida usando las igualdades. La frontera de K está formada por dos curvas: la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 2x + 4$, de ahí que tengamos que resolver dos subproblemas, uno sobre cada una de las curvas:

$$P2_A \text{ Optimización sobre la parábola} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ & y = 4 - x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ & x^2 - 4 + y = 0 \end{array} \right.$$

y

$$P2_B \text{ Optimización sobre la recta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ & y = 2x + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimizar} & x^2 + y^2 \\ & y - 2x - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Ambos son problemas de Lagrange y ambos se resuelven mediante el uso de multiplicadores. Notar que se ha expresado cada problema en la forma estándar $(h(x) = 0)$.

Para problema P_{2A}, el Lagrangiano es

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 - 4 + y\right)$$

buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & 2x + 2\lambda x = 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & 2y + \lambda = 0 & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow & x^2 - 4 + y = 0 & (3) \end{array} \right.$$

De la ecuación (1) obtenemos

$$2x(1 + \lambda) = 0$$

que tiene como solución o bien $x = 0$, o bien $\lambda = -1$. Para el caso $x = 0$, usamos la ecuación (3), para obtener y

$$x^2 - 4 + y = 0 \Rightarrow y = 4 - x^2 = 4 - 0^2 = 4$$

y usamos (2) para obtener el valor de λ

$$\lambda = -2y = -2 \cdot 4 = -8$$

Para el caso $\lambda = -1$, usamos la ecuación (2) para obtener y

$$y = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

y usamos (3) para obtener x

$$x^2 = 4 - y = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{7}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{7}{2}} \end{array} \right.$$

Conesguimos en esta ocasión tres puntos

$$\begin{aligned} P_2 &= (0, 4) \\ P_3 &= \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right) \\ P_4 &= \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Para resolver el problema P_{2B}, se repite el proceso. Primero construyendo el Lagrangiano correspondiente

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - 2x - 4)$$

y despues buscando sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & 2x - 2\lambda = 0 & (4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & 2y + \lambda = 0 & (5) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow & y - 2x - 4 = 0 & (6) \end{cases}$$

De la ecuación (5) se obtiene

$$\lambda = -2y$$

y de la ecuación (4)

$$\lambda = x$$

por tanto

$$x = -2y$$

que podemos sustituir en (6), para obtener y

$$y - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x - 2(-2y) - 4 = 0 \Rightarrow 5y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{5}$$

y por tanto x

$$x = -2y = -\frac{8}{5}$$

y tendremos otro punto más

$$P_5 = \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Finalmente, hay que tener en cuenta las intersecciones de las dos restricciones

$$\begin{cases} y - 4 + x^2 = 0 \\ y - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

lo que nos proporciona dos puntos adicionales (aunque uno de ellos ya se ha obtenido en los cálculos anteriores)

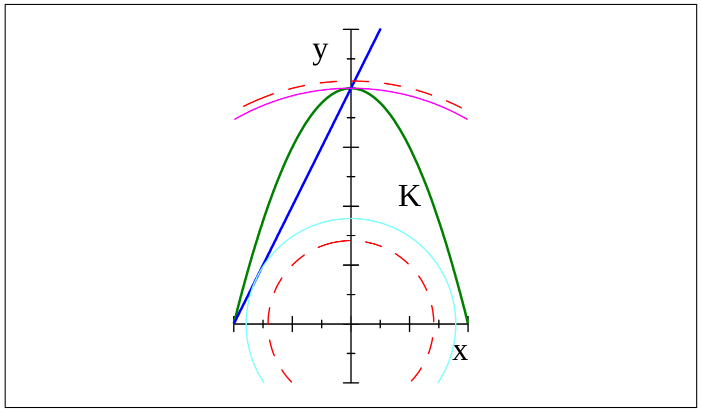
$$\begin{aligned} P_6 &= (0,4) = P_2 \\ &\text{y} \\ P_7 &= (-2,0) \end{aligned}$$

Para el conjunto de los puntos encontrados, debemos comprobar si están o no, dentro del conjunto K, es decir, tenemos que comprobar cuales de estos puntos cumplen las restriciones y para estos, evaluaremos la función objetivo con el fin de determinar el máximo y el mínimo valor

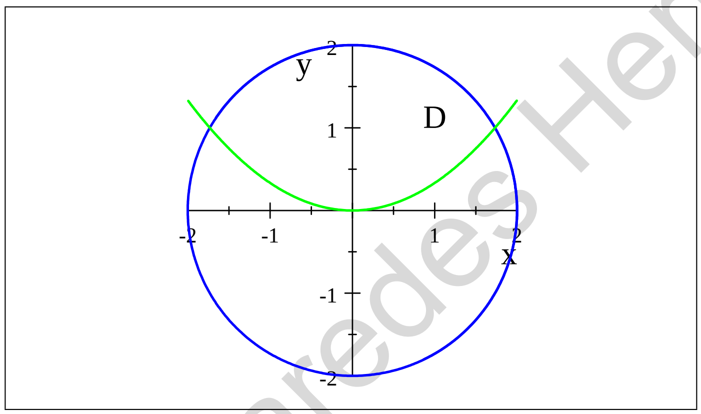
Punto	$y \leq 4 - x^2$	$y \geq 2x + 4$		$x^2 + y^2$
$P_1 = (0,0)$	SI	NO	DESCARTADO	–
$P_2 = P_6 = (0,4)$	SI	SI	VÁLIDO	16
$P_3 = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$	SI	NO	DESCARTADO	–
$P_4 = \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$	SI	SI	VÁLIDO	$\frac{1}{4} + \frac{7}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$
$P_5 = \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$	SI	SI	VÁLIDO	$\frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25} = 3{,}2$
$P_7 = (-2,0)$	SI	SI	VÁLIDO	4

Se deduce que P_2 es el máximo del problema, mientras que P_5 es el mínimo.

Como ilustración del ejercicio, en la siguiente gráfica vemos las curvas de nivel de la función $f(x,y)$ correspondientes al máximo (magenta) y al mínimo (cyan) y se aprecia (línea roja discontinua) que si el valor es mayor que 16 o menor que 3,2, la curva ya no corta al conjunto



3. **(2 puntos)** Para $f(x,y) = y$ y D la región del plano limitada entre la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, y que está representada en la siguiente gráfica:



Calcula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Solución: Buscamos la intersección de ambas curvas con el fin de obtener el rango de variabilidad en x

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) obtenemos

$$x^2 = 3y$$

y sustituyendo en la ecuación (2)

$$3y + y^2 = 4 \Longleftrightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ y_2 = \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}$$

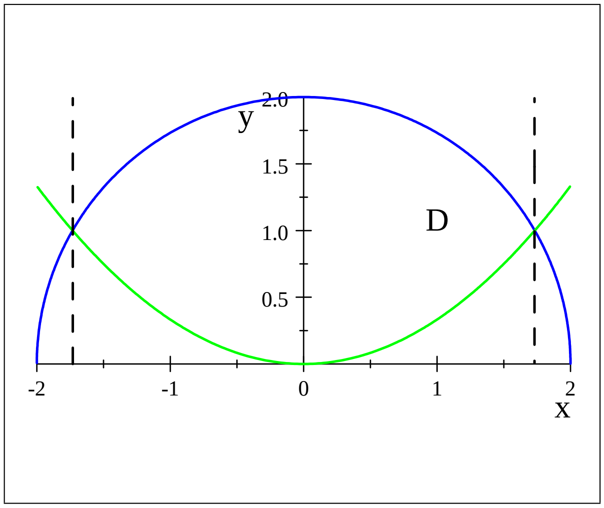
Como $x^2 = 3y > 0$, la solución $y_2 = -4$ se descarta, por tanto $y_1 = 1$ y para este caso

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

por tanto, dentro del recinto D la variable x cumple

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

y que podemos ver en la siguiente gráfica (líneas verticales discontinuas)



Claramente la curva que está por encima es la semicircunferencia y la expresamos como función de x

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

mientras que la curva que va por debajo es la parábola. Por el teorema de Fubini podemos poner

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\int_{\frac{1}{3}x^2}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\right] dx$$

Integrando respecto de y

$$\int_{\frac{1}{3}x^2}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{3}x^2}^{y=\sqrt{4-x^2}} = \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2}{2} = \frac{4-x^2}{2} - \frac{x^4}{18}$$

y a continuación respecto de x

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4-x^2}{2} - \frac{x^4}{18}\right) dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{18}\right) dx = \left[2x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{90}\right]_{x=-\sqrt{3}}^{x=\sqrt{3}} \\
&= \left[2\sqrt{3} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{6} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{90}\right] - \left[2\left(-\sqrt{3}\right) - \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{6} - \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^5}{90}\right] \\
&= \left[2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{10}\right] - \left[-2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{10}\right] \\
&= \left[\frac{7}{5}\sqrt{3}\right] - \left[-\frac{7}{5}\sqrt{3}\right] = \frac{14}{5}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

4. Responde de forma razonada a los siguientes apartados, indicando en cada caso el tipo de EDO de la que se trata:

   a) **(1.5 puntos)** Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{c} x^2y' - 3xy = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: La ecuación del problema es una EDO lineal de orden 1. Primero se resuelve la ecuación homogénea

$$x^2y' - 3xy = 0$$

que es una ecuación en variables separadas

$$x^2 y' = 3xy \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3x}{x^2} \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$$

así que integrando cada miembro

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{3}{x} dx \Leftrightarrow \ln(y(x)) = 3\ln(x) + C \Longleftrightarrow \ln(y(x)) = \ln\left(x^3\right) + C$$

de modo que usando la función exponencial obtenemos la solución de la ecuación homogénea

$$e^{\ln y} = e^{\ln x^3 + C} = e^C e^{\ln x^3} \Rightarrow y_h(x) = e^C x^3 = Bx^3$$

donde por comodidad hemos puesto $e^C = B$. Para obtener la solución de la ecuación no homogénea, utilizaremos el método de variación de constantes, proponiendo que la solución general es de la forma

$$y(x) = B(x)\, x^3$$

y debe cumplir la cuación no homogénea, calculamos su derivada

$$y'(x) = B'(x)\, x^3 + 3B(x)\, x^2$$

y sustituyendo en la ecuación correspondiente, se obtiene la siguiente relación

$$x^2 \underbrace{\left(B'(x)\, x^3 + 3B(x)\, x^2\right)}_{y'(x)} - 3x \underbrace{\left(B(x)\, x^3\right)}_{y(x)} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

y simplificando el resultado

$$x^5 B'(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Se deduce que

$$B'(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7}$$

expresión que podemos integrar fácilmente respecto de x, para obtener $B(x)$

$$B(x) = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7}\right) dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} + k$$

Finalmente, la solución general obtenida es:

$$y(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{6x^6} + k\right)}_{B(x)} x^3 = kx^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{5x^2} - \frac{1}{6x^3}$$

Si se tiene que cumplir la condición inicial $y(1) = 1$, entonces

$$y(1) = k - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow k - \frac{29}{20} = 1 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{469}{60} = \frac{529}{60}$$

es decir la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = \frac{529}{60} x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{5x^2} - \frac{1}{6x^3}$$

b) **(1.5 puntos)** Resuelve la siguiente EDO

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{2x}$$

La ecuación diferencial es de tipo lineal de coeficientes constantes y de orden 3. Resolvemos en primer lugar la EDO homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

para ello usamos su polinomio característico

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

que tiene como raíces (usando Ruffini), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, por tanto la solución de la EDO homogénea será

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x}$$

Para obtener la solución general de la ecuación diferencial necesitamos una solución particular, cuya expresión se establece dependiendo del término independiente. Este término independiente es e^{2x}, así que a priori habría que probar con una solución particular del tipo De^{2x}, sin embargo, esta solución ya forma parte de la solución homogénea, por tanto, a posteriori debemos usar como solución particular la siguiente alternativa:

$$y_p(x) = Dxe^{2x}$$

Para conocer el valor de D, se calculan las derivadas de $y_p(x)$ hasta el orden 3

$$y_p'(x) = De^{2x} + 2Dxe^{2x} = D(1+2x)e^{2x}$$

$$y_p''(x) = D(2)e^{2x} + D(1+2x)2e^{2x} = 4D(1+x)e^{2x}$$

$$y_p'''(x) = 4De^{2x} + 4D(1+x)2e^{2x} = 4D(3+2x)e^{2x}$$

y se sustituyen en la EDO no homogénea

$$\underbrace{\left(4D(3+2x)e^{2x}\right)}_{y_p'''} - 6\underbrace{\left(4D(1+x)e^{2x}\right)}_{y_p''} + 11\underbrace{\left(D(1+2x)e^{2x}\right)}_{y_p'} - 6\underbrace{\left(Dxe^{2x}\right)}_{y_p} = e^{2x}$$

simplificando e^{2x} (que es distinto de 0) y agrupando

$$\begin{aligned} 4D(3+2x) - 6(4D(1+x)) + 11D(1+2x) - 6Dx &= 1 \Leftrightarrow \\ 12D + 8Dx - 24D - 24Dx + 11D + 22Dx - 6Dx &= 1 \Leftrightarrow \\ 0Dx - D &= 1 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p(x) = -xe^{2x}$$

y la solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} - xe^{2x}$$