509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
16 de mayo de 2022
Soluciones Examen Parcial 2 - Duración: 120 minutos

industriales
etsii UPCT

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: PARCIAL 1 ☐ PARCIAL 2 ☒ GLOBAL ☐ PROBLEMAS ☐

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz o en color rojo**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0, recuerda que puedes utilizar todo los folios que necesites.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE: Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con** 0.
- El examen está puntuado sobre 10 puntos.
- La nota del examen es el 40 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.

A. Segundo Parcial (40 %)

1. **(1.4 puntos)** Calcula en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, los polinomios de Taylor de **orden 1** (plano tangente) y de **orden 2** para la función
$$f(x,y) = e^x (\cos y + \sin y)$$

Solución: Necesitamos conocer en el punto $(0,0)$ tanto el valor de la función
$$f(x,y) = e^x (\cos y + \sin y) \Rightarrow f(0,0) = 1$$
como el valor del gradiente
$$\nabla f(x,y) = (e^x (\cos y + \sin y), e^x (-\sin y + \cos y)) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,1)$$
como el de la la matriz Hessiana
$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x (\cos y + \sin y) & e^x (-\sin y + \cos y) \\ e^x (-\sin y + \cos y) & e^x (-\cos y - \sin y) \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor de orden 1 (espacio tangente) es

$$T_1(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = 1 + (1,1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x + y$$

Y el polinomio de Taylor de orden 2

$$T_2(x,y,z) = T_1(x,yz) + \frac{1}{2}(x-0, y-0)\, Hf(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y,z) &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy - y^2\right) \end{aligned}$$

2. **(2 puntos)** Encuentra los puntos extremos de la función $f(x,y) = x^2 + y$, cuando (x,y) está situado sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

Solución: Se trata de un problema de Lagrange que resolvemos usando multiplicadores. Primero construimos la función Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

y continuación buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2\lambda x = 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\lambda y = 0 & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 25 = 0 & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (1) obtenemos

$$2x(1+\lambda) = 0$$

de done o bien $x = 0$, o bien $\lambda = -1$. Para $x = 0$, usamos la ecuación (3)

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

y usando la ecuación (2) obtenemos el valor de λ

$$\lambda = -\frac{1}{2y} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{10} \\ y = -5 \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{10} \end{cases}$$

y obtenemos dos puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,5) \\ P_2 &= (0,-5) \end{aligned}$$

Para $\lambda = -1$, usamos la ecuación (2)

$$y = -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

y usando ahora la ecuación (3)

$$x^2 = 25 - y^2 = 25 - \frac{1}{4} = \frac{99}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{99}{4}} = \frac{3\sqrt{11}}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{99}{4}} = -\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

y obtenemos dos puntos más

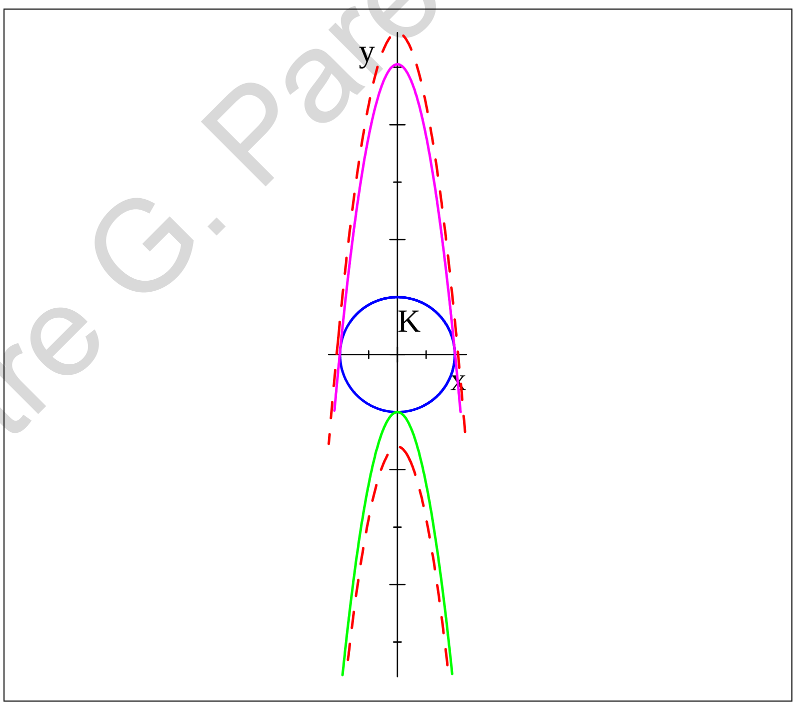
$$
\begin{aligned}
P_3 &= \left(\frac{3\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
P_3 &= \left(-\frac{3\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Evaluamos la función objetivo en cada uno de ellos

Punto	$x^2 + y$
$P_1 = (0, 5)$	5
$P_2 = (0, -5)$	-5
$P_3 = \left(\frac{3\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{101}{4}$
$P_3 = \left(-\frac{3\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{101}{4}$

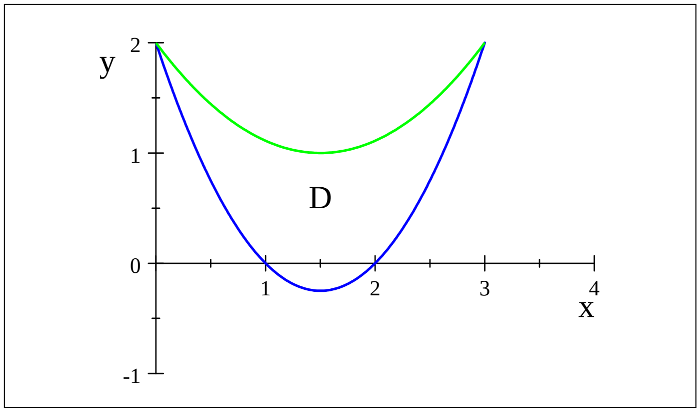
y aunque no podemos asegurarlo completamente, podríamos decir que P_2 es el mínimo del problema con un valor de -5 para la función objetivo, mientras que P_3 y P_4 serían los máximos con un valor de $\frac{101}{4}$.

Como ilustración del ejercicio, en la siguiente gráfica vemos la curva de nivel correspondiente al máximo (magenta) y al mínimo (cyan) y comprobamos que si el valor es mayor que $\frac{101}{4}$ o si es menor que -5, (líneas rojas discontinuas), la curvas de nivel ya no corta al conjunto:



3. Calcula las integrales múltiples de las funciones dadas sobre los dominios indicados:

   a) **(1.8 puntos)** Para $f(x, y) = x$ y siendo D la región del plano limitada entre las parábolas $y = x^2 - 3x + 2$ y $y = 2 - 4x/3 + 4x^2/9$, y que está representada en la siguiente gráfica:



define explícitamente el conjunto D como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y calcula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Solución: Buscamos la intersección de ambas curvas para obtener el rango de la variable x

$$\left\{ \begin{array}{lr} y = x^2 - 3x + 2 & (1) \\ y = 2 - 2 - \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4x^2}{9} & (2) \end{array} \right.$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$x^2 - 3x + 2 = 2 - \frac{4x}{3} + \frac{4x^2}{9} \Leftrightarrow \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{3}x = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

luego

$$0 \le x \le 3$$

Claramente la curva que está por debajo es la parábola $y = x^2 - 3x + 2$, puesto que en el punto 2 se anula, mientras que la otra parábola toma el valor $\frac{10}{9} > 0$. El conjunto está definido como

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3;\ x^2 - 3x + 2 \le y \le 2 - \frac{4x}{3} + \frac{4x^2}{9} \right\}$$

y usando el teorema de Fubini

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left[\int_{x^2-3x+2}^{2-4x/3+4x^2/9} x\,dy \right] dx = \int_0^3 \left[\int_{x^2-3x+2}^{2-4x/3+4x^2/9} 1\,dy \right] x\,dx$$

Integrando respecto de y

$$\int_{x^2-3x+2}^{2-4x/3+4x^2/9} 1\,dy = [y]_{y=x^2-3x+2}^{y=2-4x/3+4x^2/9} = \left(2 - 4x/3 + 4x^2/9\right) - \left(x^2 - 3x + 2\right) = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{3}x$$

y la segunda integral

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^3 \left[-\frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{3}x \right] x\,dx = \int_0^3 \left[-\frac{5}{9}x^3 + \frac{5}{3}x^2 \right] dx = \left[-\frac{5}{9}\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=3} \\ &= \left[-\frac{5}{9}\frac{3^4}{4} + \frac{5}{3}\frac{3^3}{3} \right] - 0 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

b) **(1.4 puntos)** Para

$$F(x,y,z) = \frac{\sin(x)\, e^{1-z}}{1+y}$$

calcula

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

siendo $\mathcal{R} = [0,\pi] \times [0,1] \times [1,2]$.

Solución: Es una integral triple sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^3$ y podemos usar el teorema de Fubini directamente para poner

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_1^2 \frac{\sin(x)\, e^{1-z}}{1+y} dz\right] dy\right] dx$$

o teniendo en cuenta que las variables están separadas

$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_1^2 \frac{\sin(x)\, e^{1-z}}{1+y} dz\right] dy\right] dx = \left(\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y} dy\right) \left(\int_1^2 e^{1-z} dz\right)$$

y calculamos cada integral por separado

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+y} dy = [\ln(1+y)]_{y=0}^{y=1} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

$$\int_1^2 e^{1-z} dx = \left[-e^{1-z}\right]_{z=1}^{z=2} = e^{1-1} - e^{1-2} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

el resultado final será:

$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_1^2 \frac{\sin(x)\, e^{1-z}}{1+y} dz\right] dy\right] dx = 2\ln(2)\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

4. Resuelve cada uno de los siguientes apartados

a) Dada la siguiente EDO

$$\left(3xy + \frac{\cos(x)}{x}\right) dx + \left(2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy}\right) dy = 0$$

1) **(0.4 puntos)** Comprueba que admite a $\mu(x,y) = xy$ como factor integrante.

Solución: Comprobaremos que la EDO no es exacta. Tenemos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= 3xy + \frac{\cos(x)}{x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x \\ N(x,y) &= 2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 4x - \frac{1}{y}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \end{aligned}$$

por tanto $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ y se deduce que la EDO no es exacta.

Multiplicamos por el factor $\mu(x,y) = xy$

$$\left(3xy + \frac{\cos(x)}{x}\right) dx + \left(2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy}\right) dy = 0 \Rightarrow xy\left(3xy + \frac{\cos(x)}{x}\right) dx + xy\left(2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy}\right) dy = 0$$

que transforma la EDO

$$\left(3x^2y^2 + y\cos x\right) dx + \left(2x^3y + \operatorname{sen} x\right) dy = 0$$

donde en este caso

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(x,y) &= 3x^2y^2 + y\cos x \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = 6x^2y + \cos x \\ \widetilde{N}(x,y) &= 2x^3y + \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} = 6x^2y + \cos x\end{aligned}$$

como $\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x}$ esta EDO es exacta, es decir, debe existir una función $f(x,y)$ diferenciable tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \widetilde{M}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \widetilde{N}(x,y)\end{aligned}$$

2) **(1.5 puntos)** Resuelve la EDO usando el factor integrante del apartado anterior.
Solución: Integrando la primera ecuación respecto de x

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \widetilde{M}(x,y)\,dx = \int \left(3x^2y^2 + y\cos x\right)dx = x^3y^2 + y\operatorname{sen} x + g(y)$$

donde $g(y)$ es una función constante en x. Usando esta expresión para $f(x,y)$ y la segunda ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \widetilde{N}(x,y) \Leftrightarrow 2x^3y + \operatorname{sen} x + g'(y) = 2x^3y + \operatorname{sen} x \Rightarrow g'(y) = 0$$

por tanto

$$g(y) = C \in \mathbb{R}$$

la función $f(x,y)$ es

$$f(x,y) = x^3y^2 + y\operatorname{sen} x + C$$

y la solución de la EDO viene dada de forma implícita por la ecuación $f(x,y) = 0$

$$x^3y^2 + y\operatorname{sen} x + C = 0$$

b) **(1.5 puntos)** Encuentra la solución general para la siguiente EDO

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = \cos x + \operatorname{sen} x$$

Solución: La ecuación diferencial es lineal de coeficientes constantes y orden 3. Resolvemos ecuación homogénea

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$$

usamos su polinomio característico

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

que tiene como raíces (usando Ruffini), $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ y $\lambda_3 = 2 - 3i$, una raíz real y dos complejas conjugadas, de modo que la solución de la ecuación homogénea, que denominamos $y_h(x)$, es

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}\cos 3x + Ce^{2x}\operatorname{sen} 3x$$

Para obtener la solución particular $y_p(x)$, se ve la forma del término independiente, $\cos x + \operatorname{sen} x$, y se prueba con una expresión similar

$$y_p(x) = D\cos x + E\operatorname{sen} x$$

para conocer el valor de las constantes D y E, se calculan las derivadas de $y_p(x)$ hasta el orden 3

$$y_p'(x) = -D\operatorname{sen} x + E\cos x$$

$$y_p''(x) = -D\cos x - E\operatorname{sen} x$$
$$y_p'''(x) = D\operatorname{sen} x - E\cos x$$

y se sustituyen en la ecuación inicial

$$\underbrace{(D\operatorname{sen} x - E\cos x)}_{y_p'''} - 3\underbrace{(-D\cos x - E\operatorname{sen} x)}_{y_p''} + 9\underbrace{(-D\operatorname{sen} x + E\cos x)}_{y_p'} + 13\underbrace{(D\cos x + E\operatorname{sen} x)}_{y_p} = \cos x + \operatorname{sen} x$$

operando y agrupando, se obtiene

$$(-8D + 16E)\operatorname{sen} x + (16D + 8E)\cos x = \cos x + \operatorname{sen} x$$

e identificando coeficientes en ambos lados de la ecuación se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 16D + 8E = 1 \\ -8D + 16E = 1 \end{array}\right\}$$

con solución

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{40} \\ E &= \frac{3}{40} \end{aligned}$$

Tenemos la solución particular

$$y_p(x) = \frac{1}{40}\cos x + \frac{3}{40}\operatorname{sen} x$$

y la general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}\cos 3x + Ce^{2x}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{40}\cos x + \frac{3}{40}\operatorname{sen} x$$