industriales
etsii UPCT

509101011-Matemáticas II - Grado en Ingeniería Química Industrial
28 de marzo de 2022
Examen Parcial 1 - Duración: 120 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: [X] PARCIAL 1 [ ] PARCIAL 2 [ ] GLOBAL [ ] PROBLEMAS

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Pon el nombre y los apellidos en cada hoja de las respuestas y entrégalos junto con el enunciado, debidamente rellenado.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca en lápiz o en color rojo**. **Escribe con claridad**, si la respuesta dada a un problema no se entiende o presenta un aspecto incoherente, sucio, desordenado o caótico será puntuada con un 0, recuerda que puedes utilizar todo los folios que necesites.
- **Extracto de las reglas de la convocatoria:** Terminantemente prohibido el uso de móviles. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes a la prueba. **NO** se podrá abandonar el examen durante la primera media hora. **NO** se podrá salir del aula durante la realización de la prueba.

  Cualquier violación de estas reglas o acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión de la misma y una calificación final en la asignatura de 0.
- **MUY IMPORTANTE: Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado o que no incluyan todos los cálculos realizados serán puntuados con** 0.
- El examen está puntuado sobre 10 puntos.
- La nota del examen es el 40 % de la nota final, siempre que sea superior o igual a 4 sobre 10.

A. Primer Parcial (40 %)

1. Calcula la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^3+2}{(x^2+9)^2}\,dx \quad \textbf{(1.25 punto)}$$

Solución: El integrando es una función racional cuyo denominador tiene raíces complejas $\pm 3i$ múltiples, que son de orden 2, así que se usa el método de Hermite y se descompone la función como

$$\frac{x^3+2}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+9)} + H'(x)$$

donde $H(x)$, es el término de Hermite que, para este caso, tiene la forma

$$H(x) = \frac{Cx+D}{(x^2+9)}$$

Derivando la expresión anterior

$$H'(x) = \frac{C(x^2+9) - 2x(Cx+D)}{(x^2+9)^2} = \frac{-Cx^2 - 2Dx + 9C}{(x^2+9)^2}$$

de esta forma, la descomposición sería

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+2}{\left(x^2+9\right)^2} &= \frac{Ax+B}{\left(x^2+9\right)} + \frac{-Cx^2-2Dx+9C}{\left(x^2+9\right)^2} \\
&= \frac{\left(Ax+B\right)\left(x^2+9\right) + \left(-Cx^2-2Dx+9C\right)}{\left(x^2+9\right)^2} \\
&= \frac{Ax^3+\left(B-C\right)x^2+\left(9A-2D\right)x+\left(9B+9C\right)}{\left(x^2+9\right)^2}
\end{aligned}$$

Como los denominadores coinciden, los numeradores deben ser iguales

$$x^3+2 = Ax^3+\left(B-C\right)x^2+\left(9A-2D\right)x+\left(9B+9C\right)$$

igualando coeficientes en ambos polinomios, obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{aligned}
A &= 1 \\
B-C &= 0 \\
9A-2D &= 0 \\
9B+9C &= 2
\end{aligned}\right\}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= C = \frac{1}{9} \\
D &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Siendo la descomposición

$$\frac{x^3+2}{\left(x^2+9\right)^2} = \frac{x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+9\right)} + \left(\frac{\frac{1}{9}x+\frac{9}{2}}{x^2+9}\right)'$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{\left(x^2+9\right)^2}dx &= \int \frac{x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+9\right)}dx + \int \left(\frac{\frac{1}{9}x+\frac{9}{2}}{x^2+9}\right)' dx \\
&= \int \frac{x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+9\right)}dx + \left(\frac{\frac{1}{9}x+\frac{9}{2}}{x^2+9}\right) \\
&= \int \frac{x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+9\right)}dx + \frac{1}{18}\left(\frac{2x+81}{x^2+9}\right)
\end{aligned}$$

la integral que queda se calcula fácilmente con una sencilla transformación

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\frac{1}{9}}{\left(x^2+9\right)}dx &= \int \frac{x}{\left(x^2+9\right)}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(x^2+9\right)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+9\right)}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{9\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+9\right)}dx + \frac{1}{27}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right)}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) + \frac{1}{27}\arctan\frac{x}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente
$$\int \frac{x^3+2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+\frac{1}{27}\arctan\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\left(\frac{2x+81}{x^2+9}\right)+K$$

2. Indica por qué es impropia cada una de las siguientes integrales y determina si son o no convergentes, calculando en cada caso su valor

$$\text{a)}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\ dx\ \ \textbf{(1 punto)}\qquad \text{b)}\int_0^4\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx\ \ \textbf{(1.25 punto)}$$

Solución:

a) Esta integral es de primera especie porque el intervalo de integración es no acotado, por definición de estas integrales tendremos

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\ dx = \lim_{x\to\infty}\int_{\pi}^{x}\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt$$

La primitiva es inmediata, teniendo en cuenta que la derivada de $\frac{\pi}{t}$ es $-\frac{\pi}{t^2}$ y por tanto es de la forma $f'(t)\cos(f(t))$ salvo constantes

$$\int_{\pi}^{x}\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{x}-\frac{\pi}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt = \left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]_{t=\pi}^{t=x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen}(1)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

por tanto
$$\lim_{x\to\infty}\int_{\pi}^{x}\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen}(1)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = \frac{\operatorname{sen}(1)}{\pi}$$

y la integral es convergente.

b) Esta integral es de segunda especie, porque aunque el intervalo es acotado, $[0,4]$, la función es no acotada en el extremo superior como podemos comprobar

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}=\infty$$

Y por tanto, debemos calcular la integral tomando límites

$$\int_0^4\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx = \lim_{x\to 4^-}\int_0^x\frac{t^3}{\sqrt{16-t^2}}dt$$

La primitiva se obtiene con el cambio $t=4\operatorname{sen}u$, por tanto $dt=4\cos u\,du$ y nos queda

$$\begin{aligned}\int\frac{t^3}{\sqrt{16-t^2}}dt &= \int\frac{64\operatorname{sen}^3u}{\sqrt{16-(4\operatorname{sen}u)^2}}4\cos u\,du\\ &= \int\frac{64\operatorname{sen}^3u}{\sqrt{16-16\operatorname{sen}^2u}}4\cos u\,du\\ &= \int\frac{64\operatorname{sen}^3u}{\sqrt{16\left(1-\operatorname{sen}^2u\right)}}4\cos u\,du\\ &= \int\frac{64\operatorname{sen}^3u}{4\cos u}4\cos u\,du =\\ &= 64\int\operatorname{sen}^3u\,du\end{aligned}$$

Como la potencia de $\operatorname{sen}(u)$ es impar, realizamos la descomposición

$$\operatorname{sen}^3 u = \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 u = \operatorname{sen} u \left(1 - \cos^2 u\right) = \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \cos^2 u$$

que deja la integral como

$$\begin{aligned} 64 \int \operatorname{sen}^3 u du &= 64 \int \left(\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \cos^2 u\right) du = 64 \left(\int \operatorname{sen} u du - \int \operatorname{sen} u \cos^2 u du \right) \\ &= 64 \left(-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} \right) \end{aligned}$$

es decir

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} dt = 64 \int \operatorname{sen}^3 u du = 64 \left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u \right)$$

Con el cambio de variable, los límites de integración serían

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \Rightarrow 0 = 4 \operatorname{sen} u_0 \Rightarrow u_0 = 0 \\ t_0 &= x \Rightarrow x = 4 \operatorname{sen} u_1 \Rightarrow u_1 = \operatorname{arcsen} \frac{x}{4} \end{aligned}$$

cuando $x \to 4$, entonces $u \to \frac{\pi}{2}$, por tanto podemos poner

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4^-} \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} dt &= \lim_{u \to \frac{\pi}{2}^-} 64 \int_0^u \operatorname{sen}^3 r dr = \lim_{u \to \frac{\pi}{2}^-} 64 \left[\left(\frac{\cos^3 r}{3} - \cos r \right) \right]_{u=0}^{r=u} \\ &= \lim_{u \to \frac{\pi}{2}^-} 64 \left[\left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] \\ &= 64 \left[0 + \frac{2}{3} \right] = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

3. Dada la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^6} & (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) (**0.5 puntos**) Calcula los límites iterados de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^6}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cdot 0}{x^3+0^6}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^6}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0\cdot y^2}{0^3+y^6}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^6}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

b) (**0.5 puntos**) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ cuando (x,y) se encuentra sobre rectas que pasan por el origen (límites direccionales).

Para $y=mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx)^2}{x^3+(mx)^6}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{x^3(1+m^6x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{(1+m^6x^3)}=\frac{0}{1+0}=0$$

c) (**0.5 puntos**) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ usando coordenadas polares.

Hacemos $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2(r\operatorname{sen}\theta)^2}{(r\cos\theta)^3+(r\operatorname{sen}\theta)^6} &= \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^3\cos^3\theta+r^6\operatorname{sen}^6\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^3(\cos^3\theta+r^3\operatorname{sen}^6\theta)}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^3\theta+r^3\operatorname{sen}^6\theta}=0\end{aligned}$$

d) (**0.5 puntos**) En vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿podrías afirmar que la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(0,0)$? Razona la respuesta.

No, no se podría afirmar que sea continua, porque no hay garantía de que el límite sea 0, de hecho, si tomamos curvas de la forma

$$x=my^2$$

obtendremos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}}\frac{x^2y^2}{x^3+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{(my^2)^2y^2}{(my^2)^3+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{m^2y^6}{m^3y^6+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{m^2}{m^3+1}=\frac{m^2}{m^3+1}$$

límite que depende de m, y por tanto el límite de la función en $(0,0)$ no existirá.

e) (**0.5 puntos**) Calcula, si existen, las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Utilizando la definición de derivada parcial o derivada direccional respecto de los ejes coordenados

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

donde

$$f(t,0)=\frac{t^2 0^2}{t^3+0^6}=0$$

y

$$f(0,t)=\frac{0^2t^2}{0^3+t^6}=0$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

4. Sean $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$y $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, las funciones definida por

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = \left(xyz,\ x^2+y^3+z^4\right)$$
$$G(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) = \left(uv,\ u+v,\ u^2+v^2\right)$$

a) **(1.5 puntos)** Calcula la matriz Jacobiana de la función $L(x,y,z) = (G \circ F)(x,y,z)$ en el punto $(1,1,1)$. Razona si existe $L^{-1}(x,y,z)$, la inversa de L en un entorno del punto $(1,1,1)$.

Usando el teorema de la función compuesta tenemos

$$J(G \circ F)(x,y,z) = J(G(x,y,z)) \cdot JF(x,y,z)$$

en particular para el punto $(1,1,1)$

$$J(G \circ F)(1,1,1) = JG(F(1,1,1)) \cdot JF(1,1,1)$$

Usando F

$$F(1,1,1) = (1,3)$$

por tanto

$$JG(F(1,1,1)) \cdot JF(1,1,1) = JG(1,3) \cdot JF(1,1,1)$$

Calculamos la matriz Jacobiana de $F(x,y,z)$

$$JF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 3y^2 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

y evaluamos en el punto $(1,1,1)$

$$JF(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz Jacobiana de $G(u,v)$

$$JG(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

y evaluamos en $(1,3) = F(1,1,1)$

$$JG(1,3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

El valor del Jacobiano de la función compuesta L en $(1,1,1)$ será

$$J(G \circ F) \cdot (1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix}$$

Para determinar si existe la inversa de L, sólo hay que comprobar si el determinante anterior es o no nulo

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

luego sí existirá un entorno de $(1,1,1)$ donde exista la función inversa.

b) **(0.5 puntos)** Calcula la matriz Hessiana de la función $f_1(x,y,z)$.

En el apartado anterior hemos calculado el gradiente de f_1, que es la primera fila de JF por tanto

$$\nabla f_1(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

derivando cada componente respecto de todas las variables obtenemos el Hessiano

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu^2 - yv^2 - 1 = 0 \\ \\ x^2u + y^2v + 7 = 0 \end{cases}$$

y considera el punto $P = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 3, 2, -1)$

a) **(0.5 puntos)** Prueba que en un entorno del punto P el sistema define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y.

Solución: Se trata de un sistema de 4 incógnitas y 2 ecuaciones, por tanto hay $4-2=2$ parámetros libres, que serían las variables independientes x e y, y dos variables dependientes de ellas, que serían u y v.

Vamos a ver si se cumple el teorema de la función implícita. Hay que comprobar que las ecuaciones se cumplen en el punto y que el Jacobiano respecto de las variables dependientes u y v en el punto $(1, 3, 2, -1)$ no se anula. Las funciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y,u,v) &= xu^2 - yv^2 - 1 \\ \\ \varphi_2(x,y,u,v) &= x^2u + y^2v + 7 \end{aligned}$$

evaluamos en el punto

$$\begin{aligned} \varphi_1(1,3,2,-1) &= 1(2)^2 - (3)(-1)^2 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0 \\ \\ \varphi_2(1,3,2,-1) &= (1)^2(2) + (3)^2(-1) + 7 = 2 - 9 + 7 = 0 \end{aligned}$$

por tanto se cumple la primera hipótesis del teorema. Calculamos ahora la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u,v)}(1,3,2,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(1,3,2,-1) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(1,3,2,-1) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(1,3,2,-1) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(1,3,2,-1) \end{pmatrix}$$

Calculamos cada elemento de la matriz jacobiana

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(x,y,u,v) &= 2xu \Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(1,3,2,-1) = 2\cdot 1\cdot 2 = 4 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(x,y,u,v) &= -2yv \Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(1,3,2,-1) = -2\cdot(3)\cdot(-1) = 6 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(x,y,u,v) &= x^2 \Rightarrow \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(1,3,2,-1) = (1)^2 = 1 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(x,y,u,v) &= y^2 \Rightarrow \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(1,3,2,-1) = (3)^2 = 9 \end{aligned}$$

y el determinante jacobiano

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u,v)}(1,3,2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = 36 - 6 = 30 \neq 0$$

se cumple la segunda hipótesis del teorema y las variables u y v se pueden expresar como funciones implícitas de x e y.

b) **(1.5 puntos)** Determina el valor de las siguientes derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}(1,3)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,3)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,3)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,3)$.

Para calcular estas derivadas sólo hay que usar el resultado del teorema

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,3) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}(1,3,2,-1)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(1,3,2,-1)\right)$$

Por tanto sólo nos queda por calcular

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(1,3,2,-1)$$

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x,y,u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y,u,v)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y,u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^2 & -v^2\\ 2xu & 2yv\end{pmatrix}$$

que se evalúa en el punto $(1,3,2,-1)$

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(1,3,2,-1)=\begin{pmatrix}(2)^2 & -(-1)^2\\ 2(1)(2) & 2(3)(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,3) &= -\begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & 9\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & -6\end{pmatrix}\\ &= -\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 4 & -6\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & -\frac{9}{10}\\ -\frac{2}{5} & \frac{23}{30}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(1,3) &= -\frac{2}{5}\\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,3) &= -\frac{9}{10}\\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,3) &= -\frac{2}{5}\\ \frac{\partial v}{\partial y}(1,3) &= \frac{23}{30}\end{aligned}$$

NOTA: El resultado también se puede obtener derivando respecto de x e y las ecuaciones del sistema, con la precaución de tener en cuenta que ahora $u\equiv u(x,y)$ y $v\equiv v(x,y)$

$$\begin{aligned}xu^2-yv^2-1 &= 0\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(xu^2-yv^2-1\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(xu^2-yv^2-1\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+2xuu_x-2yvv_x=0\\ 2xuu_y-v^2-2yvv_y=0\end{cases}\\ x^2u+y^2v+7 &= 0\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u+y^2v+7\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2u+y^2v+7\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xu+x^2u_x+y^2v_x=0\\ x^2u_y+2yv+y^2v_y=0\end{cases}\end{aligned}$$

y ahora se evalúan las cuatro expresiones en el punto $(1,3)$, teniendo en cuenta que ahora $x=1$, $y=3$, $u(1,3)=2$ y $v(1,3)=-1$

$$\begin{cases}u(1,3)^2+2u(1,3)\,u_x(1,3)-6v(1,3)\,v_x(1,3)=0\\ 2u(1,3)\,u_y(1,3)-v(1,3)^2-6v(1,3)\,v_y(1,3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4+4u_x(1,3)+6v_x(1,3)=0 & (1)\\ 4u_y(1,3)-1+6v_y(1,3)=0 & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2u(1,3)+u_x(1,3)+9v_x(1,3)=0\\ u_y(1,3)+6v(1,3)+9v_y(1,3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4+u_x(1,3)+9v_x(1,3)=0 & (3)\\ u_y(1,3)-6+9v_y(1,3)=0 & (4)\end{cases}$$

De (1) y (3) obtenemos el sistema

$$\begin{cases}4u_x(1,3)+6v_x(1,3)=-4\\ u_x(1,3)+9v_x(1,3)=-4\end{cases}$$

que tiene por soluciones

$$v_x\left(1,3\right)=-\frac{2}{5}$$

$$u_x\left(1,3\right)=-\frac{2}{5}$$

De (2) y (4) obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} 4u_y\left(1,3\right)+6v_y\left(1,3\right)=1 \\ \\ u_y\left(1,3\right)+9v_y\left(1,3\right)=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 4u_y\left(1,3\right)+6v_y\left(1,3\right)=1 \\ \\ -4u_y\left(1,3\right)-36v_y\left(1,3\right)=-24 \end{array}\right.$$

que tiene por soluciones

$$v_y\left(1,3\right)=\frac{23}{30}$$

$$u_y\left(1,3\right)=-\frac{9}{10}$$

como antes.