Capítulo 10

Integración Numérica

10.1. Introducción

El cálculo numérico de integrales definidas es uno de los problemas más antiguos en matemáticas. El problema en forma original implicaba encontrar el área de regiones limitadas por líneas curvas. El ejemplo más conocido de este problema fue el cálculo del área dentro de un círculo que se transforma en un estudio del número π y su cálculo.

Utilizando un método numérico que implicaba la aproximación de un círculo por medio de polígonos inscritos y circunscritos, Arquímedes fue capaz de acotar π como

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

La integración numérica está definida a menudo como cuadratura numérica (viene del problema de calcular el área del círculo encontrando un cuadrado de la misma área).

Sea

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

queremos calcular

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

cuando esta integral tenga sentido.

La integral numérica va a consistir en dar fórmulas aproximadas para el cálculo de la integral $I(f)$. Estas fórmulas pueden ser muy útiles si no conocemos la expresión analítica de las primitivas de $f(x)$ o también cuando no conviene usarlas por ser demasiado complicadas.

La función que queremos integrar será alguna de las siguientes

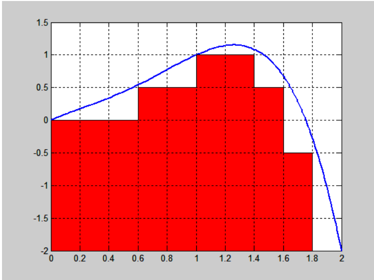
1. Una función simple y continua con primitiva conocida o fácilmente calculable.

2. Una función compleja y continua que es imposible o muy difícil de integrar directamente.

3. Una función tabulada, en forma de conjunto de puntos discretos, sólo se conoce el valor de la función en un conjunto finito de puntos generalmente obtenidos de forma experimental.

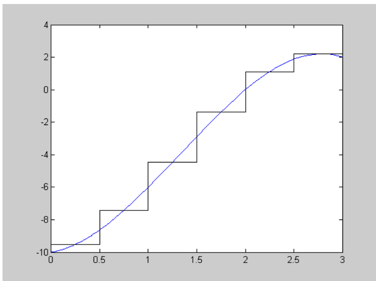
En el primer caso la integral simplemente es una función fácilmente evaluable por métodos analíticos. En los dos casos restantes se deben emplear métodos aproximados.

Un planteamiento lógico sería dibujar la gráfica de la curva en un retículo cuadrado y contar el número de cuadrados que aproximan el área



El número de cuadrados multiplicados por el área de cada uno de ellos nos daría un valor aproximado del área bajo la curva, es decir, del valor de la integral entre a y b. Podemos mejorar esta estimación utilizando una malla más fina, pero a costa de un mayor esfuerzo

Otro planteamiento razonable es dividir el área en segmentos verticales, con una altura igual al valor de la función en el punto medio de cada banda



calculando el área de cada rectángulo y sumarlas obtenemos una estimación del área bajo la curva. De nuevo podemos mejorar este método introduciendo bandas más estrechas.

Estos esquemas, aunque proporcionen una estimación rápida y sencilla, no tienen la exactitud necesaria o hace falta mucho esfuerzo para obtenerla. Para mejorar estas aproximaciones disponemos de los llamados métodos de integración numérica o cuadratura gaussiana. Estos métodos son más fáciles de implementar que la técnica de mallas y son en esencia similares al método de las bandas, es decir, se multiplica el ancho de cada banda por el valor de la función en algún punto intermedio de esa banda, sumando después para todas las bandas. El uso de factores peso mejora esta estimación. Los métodos de integración utilizan un conjunto de puntos discretos.

10.1.1. Técnicas de Integración

Para realizar el cálculo de una integral definida, tendremos diferentes técnicas:

1. **Evaluación de una antiderivada**

Cuando conocemos la primitiva de la función y aplicamos la regla de Barrow; aunque este método no garantiza la precisión deseada ya que por ejemplo

$$\int_0^1 \left(9 - x^2\right)^{1/2} dx = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$$

y sólo podemos alcanzar la precisión que nos den las tablas, calculadoras, etc.

2. **Aproximación de $f(x)$ mediante un polinomio de Taylor**

Si queremos calcular una determinada integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y la función del integrando $f(x)$ posee una serie de Taylor que es convergente en el intervalo (a, b) alrededor de algún punto x_0 de $[a, b]$, como las series de Taylor tienen una convergencia uniforme, podremos intercambiar la integración con el sumatorio, de esta forma si el desarrollo de la función es

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \cdots$$

tomando $x_0 + h = x$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

y sustituyendo en la expresión de la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right\} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right\} dx$$

La suma se aproxima truncando la serie, es decir, truncamos la serie de Taylor para obtener un polinomio de Taylor. Por ejemplo para calcular la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

sabemos que e^{-x^2} no tiene primitiva expresada en términos de funciones elementales, sin embargo, su desarrollo de Taylor está dado por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y por tanto

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

expresión que podemos sustituir en la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1}$$

y podemos calcular la integral utilizando una cantidad finita de términos en la serie

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \cdots$$

Si $f(x)$ no posee serie de Taylor, sino solamente unas cuantas derivadas en el punto elegido, es posible seguir utilizando esta técnica para realizar la integración, pero la precisión en la aproximación es más difícil de asegurar.

3. **Aproximación de $f(x)$ por un polinomio de mínimos cuadrados.**

   Construyendo el polinomio que ajusta a la tabla de $f(x)$ mediante mínimos cuadrados y utilizando después esta expresión como integrando para obtener un valor aproximado de la integral definida.

4. **Aproximación de $f(x)$ por un polinomio de interpolación.**

   Utilizando el polinomio de interpolaciónque ajusta a la tabla de $f(x)$ y utilizando después esta expresión como integrando para obtener un valor aproximado de la integral definida.

5. **Aproximación de $f(x)$ por una función polinomial a trozos.**

   Es decir, subdividimos el intervalo de integración y después aproximamos $f(x)$ mediante un polinomio en cada trozo. Por ejemplo, para evitar discontinuidades evitables o aristas de la gráfica de $f(x)$.

La integración numérica se divide básicamente en dos tipos de métodos o procedimientos fundamentalmente:

1. Métodos que necesitan el valor de la función en un conjunto de puntos conocidos (métodos de Newton-Cotes), como la regla del trapecio o las reglas de Simpson.

2. Métodos que precisan de la expresión de la función como la Regla de Romberg.

10.2. Fórmulas de integración de Newton-Cotes

El esquema más común dentro de la integración numérica se basa en la estrategia de reemplazar la función del integrando o un conjunto de datos discretos por una función aproximada que sea más fácil de integrar, como es un polinomio

$$I(x) = \int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b P_n(x)\, dx$$

donde

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

La integral se puede aproximar usando una serie de polinomios aplicados por partes a la función o a los datos sobre intervalos de longitud constante.

Utilizamos las formas cerradas de los métodos de integración, que son aquellas en los que conocemos los límites inferior y superior del intervalo de integración, las formas abiertas son normalmente utilizadas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

10.2.1. Regla del rectángulo

Consiste en interpolar la función $f(x)$ dentro del intervalo $[a,b]$ mediante un polinomio de grado 0, es decir mediante un polinomio constante

$$P_0(x) = f(x^*)$$

siendo $x^* \in [a,b]$ por tanto el valor de la integral es

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f(x^*)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

Para cada valor de x^* tendremos una aproximación distinta para la integral, pero generalmente se utiliza o bien alguno de los extremos del intervalo (a ó b), o bien el punto medio del intervalo, $x_m = \frac{a+b}{2}$, de esta forma tendremos las siguientes variaciones de la regla

$$\begin{aligned} Q_a(f) &= f(a)(b-a) \\ Q_b(f) &= f(b)(b-a) \\ Q_M(f) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \end{aligned}$$

Regla del rectángulo múltiple

Es posible obtener una aproximación mejor al valor de la integral si tomamos una partición del intervalo $[a,b]$

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

y aplicamos a cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ la regla del rectángulo obtenida con anterioridad. El proceso es equivalente a interpolar la función $f(x)$ en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, con $k = 0, \ldots, n-1$, por la constante $f(x_k^*)$, con $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]$. El valor aproximado de la integral es, por linealidad de la integral, la suma de las integrales en cada subintervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq Q_0(f) + \cdots + Q_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k)$$

Por ejemplo, si tomamos $x_k^* = x_k$, el extremo inferior de cada intervalo se obtiene

$$Q_a(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Para el extremo superior $x_k^* = x_{k+1}$ obtenemos

$$Q_b(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

y para el punto medio del intervalo $x_k^* = \frac{x_{k+1}+x_k}{2}$

$$Q_M(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)(x_{k+1} - x_k)$$

Y si los puntos son equidistantes

$$x_{k+1} = x_k + kh \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

siendo

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

las expresiones para cada caso se simplifican

Extremo Inferior $\Longrightarrow$ $Q_a(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

Extremo Superior $\Longrightarrow$ $Q_b(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + h) = h \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

Punto Medio $\Longrightarrow$ $Q_M(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$

10.2.2. Regla del Trapecio

Consiste en sustituir la función $f(x)$ por su polinomio interpolador de grado uno, es decir:

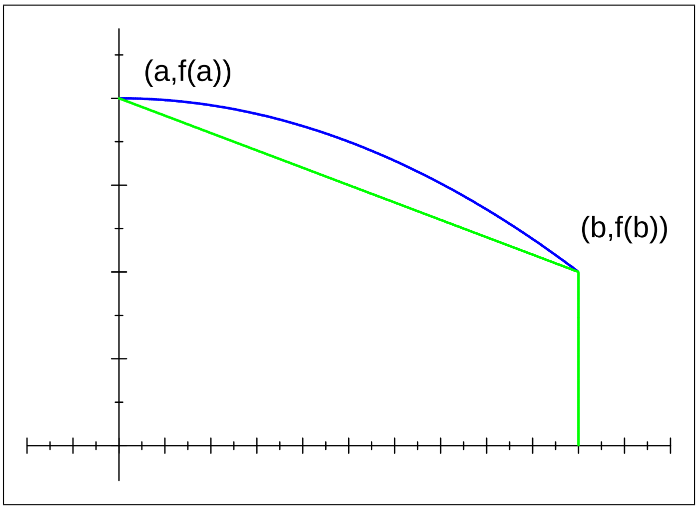
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right] dx = \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a) \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \end{aligned}$$

por tanto

$$I \simeq \frac{(b-a)}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Geométricamente esto significa, aproximar el área de $f(x)$ por el trapecio formado por el intervalo $[a,b]$ y el segmento que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

$$2 - x^2 - y = 0$$



Ejemplo 10.1 *Aplicaremos la regla trapezoidal para integrar la función*

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ *hasta* $b = 0{,}8$.

El valor exacto, obtenido mediante integración directa es $1{,}64053334$, *veamos el resultado utilizando la regla del trapecio. Para ello calculamos los valores de* f *en los extremos del intervalo*

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) = 0{,}2 \\ f(b) &= f(0{,}8) = 0{,}2320 \end{aligned}$$

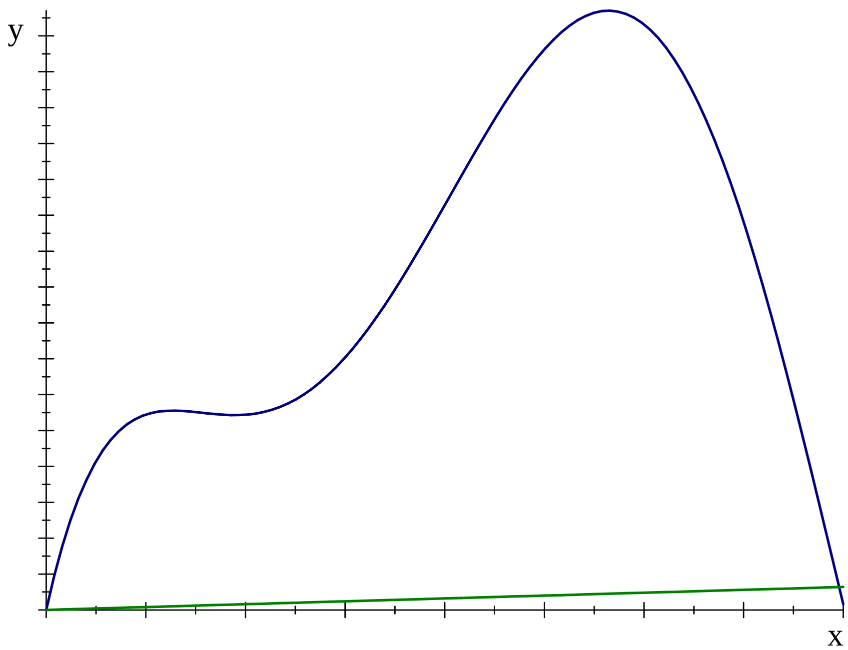
y el valor aproximado de la integral que se obtiene mediante la regla del trapecio es

$$I = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \frac{(0{,}8 - 0{,}0)}{2}(0{,}2 + 0{,}232) = 0{,}1728$$

Como se aprecia el error obtenido es muy grande

$$\begin{aligned} E_a &= 1{,}64053334 - 0{,}1728 = 1.\,46773\,334 \\ E_r &= \frac{E_a}{x} = \frac{1.\,46773\,334}{1{,}64053334} = 89466\,84009 \end{aligned}$$

Si dibujamos la gráfica veremos la causa de este error



La regla del trapecio no se puede usar en este caso.

Como $f(a) \simeq f(b)$ *el trapecio (verde) es demasiado pequeño en comparación con el resto de la gráfica.*

Regla del trapecio múltiple

Para obtener una mejor aproximación del valor de la integral, podemos tomar una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

y aplicar a cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ la regla del trapecio. Teniendo en cuenta la aditividad de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

resulta

$$I = I_1 + \ldots + I_n \simeq (x_1 - x_0)\frac{(f(x_0) + f(x_1))}{2} + (x_2 - x_1)\frac{(f(x_1) + f(x_2))}{2} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{(f(x_{n-1}) + f(x_n))}{2}$$

y si además, consideramos puntos equidistantes,

$$h = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{n} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

llegamos al siguiente resultado

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right] = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

es decir, nos resulta el área formada por la poligonal que une los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

Ejemplo 10.2 *Aplicaremos la regla trapezoidal para integrar la función*

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0{,}8$, pero tomando $h = 0{,}1$

Tendremos que calcular los valores de $f(x)$ en los puntos de la partición

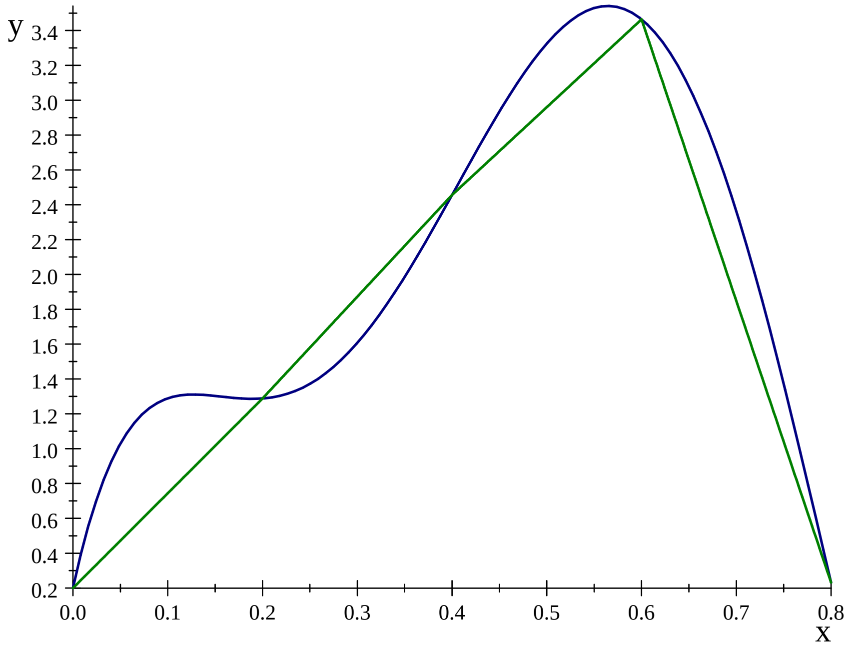
$$P = \{x_0 = 0 < 0{,}1 < 0{,}2 < 0{,}3 < 0{,}4 < 0{,}5 < 0{,}6 < 0{,}7 < 0{,}8 = x_8\},$$

utilizando trapecio múltiple empleando la regla en cada subintervalo

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0,200
1	0,1	1,289
2	0,2	1,288
3	0,3	1,607
4	0,4	2,456
5	0,5	3,325
6	0,6	3,464
7	0,7	2,363
8	0,8	0,232

$$I \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k) + f(x_8)\right] = \frac{0{,}1}{2}[32{,}0160] = 1{,}6008$$

que es un valor más próximo al valor exacto ($I = 1{,}64053334$) que el obtenido con el valor de h inicial.



10.2.3. Regla de Simpson 1/3

Como en el caso de la interpolación, la aproximación se mejora al aumentar el grado del polinomio interpolador, por este motivo, el método de Simpson 1/3 mejora la regla del trapecio utilizando un polinomio interpolador de grado 2.

Tenemos tres puntos x_0, x_1 y x_2, donde conocemos los valores de la función $f(x)$, entonces podemos considerar

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_2(x)\,dx$$

donde $P_2(x)$ es el polinomio interpolador de Lagrange de grado 2 que pasa por los puntos

$$\{(x_0,\ f(x_0))\,;\ \ (x_1,\ f(x_1))\,;\ \ (x_2,\ f(x_2))\}\,,$$

es decir

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Supongamos el caso más sencillo de puntos equidistantes

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2h \end{aligned}$$

Integrando $P_2(x)$

$$I \simeq \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) \tag{10.1}$$

Regla de Simpson 1/3 múltiple

Al igual que en la regla del trapecio múltiple podemos mejorar la regla de Simpson, dividiendo el intervalo de integración en subintervalos más pequeños de igual anchura

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Si consideramos el conjunto de $n+1$ puntos equidistantes $\{x_0, \ldots, x_n\}$, siendo n un número par, podremos aplicar la regla de Simpson 1/3 en cada subintervalo consecutivo $[x_k, x_{k+2}]$, siendo en este caso x_{k+1} su punto intermedio,

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx = I_1 + \ldots + I_{n/2}$$

Como n es par, entonces $n = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$, y habrá $n/2 = m$ subintervalos. Tomando $h = (x_n - x_0)/n$ y aplicando la regla de simpson 1/3 a cada subintervalo, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \frac{h}{3}\left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + \underbrace{f(x_2) + f(x_2)} + 4f(x_3) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=0}^{m} f(x_{2j+1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_n)\right)
\end{aligned}$$

o en términos de la logintud del intervalo

$$I \simeq \frac{(b-a)}{3n}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=0}^{m} f(x_{2j+1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_n)\right)$$

10.2.4. Regla de Simpson 3/8

Análogamente, si aplicamos la integración al polinomio interpolador de Lagrange de grado 3 que pasa por cuatro puntos conocidos: x_0, x_1, x_2 y x_3 en donde conocemos los valores de la función $f(x)$ podemos considerar

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx$$

donde $p_3(x)$ es el polinomio interpolador de Lagrange de grado 3 que pasa por los puntos $\{x_0, x_1, x_2.x_3\}$, es decir

$$P_3(x) = f(x_0)\prod_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{3}\frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} + f(x_1)\prod_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{3}\frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} + f(x_2)\prod_{\substack{k=0\\k\neq 2}}^{3}\frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} + f(x_3)\prod_{\substack{k=0\\k\neq 3}}^{3}\frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)}$$

Supongamos el caso más sencillo de puntos equidistantes

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2h \\ x_3 &= x_0 + 3h \end{aligned}$$

Integramos $P_3(x)$ para obtener:

$$I \simeq \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)$$

y si tomamos $h = \frac{x_3 - x_0}{3}$, es decir

$$I \simeq \frac{(x_3 - x_0)}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)$$

Regla de Simpson para un número de puntos par

La regla de Simpson (tanto 1/3 como 3/8) mejora considerablemente el error del trapecio, ambas son iguales de precisas, por tanto, cuando se pretende obtener la integral numérica $\int_a^b f(x)\,dx$, si se utiliza una interpolación aproximando f mediante un conjunto de puntos impar aplicamos directamente la regla de simpson 1/3 múltiple, y si usamos un conjunto de puntos par, $n+1$ par, tenemos que n impar, por lo que en general,

$$\begin{cases} \text{Si } n = 1 & \Rightarrow \quad \text{No podemos aplicar Simpson, se aplica Trapecio.} \\ \text{Si } n = 3 & \Rightarrow \quad \text{Utilizamos Simpson } 3/8 \end{cases}$$

Si n es impar, con $n > 3$, uno de los procedimientos que podemos emplear es separar la integral en dos, en la primera usamos los $(n-4)$ primeros puntos, que será un número impar y aplicaremos la regla de Simpson 1/3 múltiple, mientras que para la segunda integral usamos los 4 puntos restantes para los que se utiliza la regla de Simpson 3/8:

$$I \simeq \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_{n-3}} f(x)\,dx + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)\,dx$$

y usando ambas reglas tal y como se ha indicado:

$$\begin{aligned} I &\simeq \tfrac{(x_{n-3} - x_0)}{3n}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1,3,\ldots,n-4} f(x_j) + 2\sum_{j=2,4,\ldots,n-5} f(x_j) + f(x_{n-3})\right) \\ &\quad + \tfrac{(x_n - x_{n-3})}{8}\left(f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\ &= \tfrac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1,3,\ldots,n-4} f(x_j) + 2\sum_{j=2,4,\ldots,n-5} f(x_j) + f(x_{n-3})\right) + \tfrac{3h}{8}\left(f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + \right. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3 *Calcula, usando la regla del trapecio múltiple, la siguiente integral:*

$$\int_0^{0{,}8} \left(0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5\right) dx$$

Solución: Si consideramos que

$$I = \frac{(b-a)}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right)$$

para n, número de subintervalos, x_j puntos intermedios, teniendo en cuenta que el error es de orden h^{2n}. Si $h = 0{,}1$, se necesita aplicar 4 veces la regla del trapecio, por tanto

$$\begin{aligned}
h_1 &= 0{,}1 \Rightarrow n = \frac{0{,}8}{0{,}1} = 8 \\
&\Rightarrow I_{1,1} = I(0{,}1) = \frac{0{,}8}{16}\left(f(0) + f(0{,}8) + 2\sum_{j=1}^{7} f(j * 0{,}1)\right) = 1{,}600800000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{h_1}{2} = 0{,}05 \Rightarrow n = \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16 \\
&\Rightarrow I_{2,1} = I(0{,}05) = \frac{0{,}8}{32}\left(f(0) + f(0{,}8) + 2\sum_{j=1}^{15} f(j * 0{,}05)\right) = 1{,}630550000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= \frac{h_2}{2} = 0{,}025 \Rightarrow n = \frac{0{,}8}{0{,}025} = 32 \\
&\Rightarrow I_{3,1} = I(0{,}025) = \frac{0{,}8}{64}\left(f(0) + f(0{,}8) + 2\sum_{j=1}^{31} f(j * 0{,}025)\right) = 1{,}638034375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_4 &= \frac{h_3}{2} = 0{,}0125 \Rightarrow n = \frac{0{,}8}{0{,}0125} = 64 \\
&\Rightarrow I_{4,1} = I(0{,}0125) = \frac{0{,}8}{128}\left(f(0) + f(0{,}8) + 2\sum_{j=1}^{63} f(j * 0{,}0125)\right) = 1{,}639908398
\end{aligned}$$

10.3. Métodos de Cuadratura Gaussiana

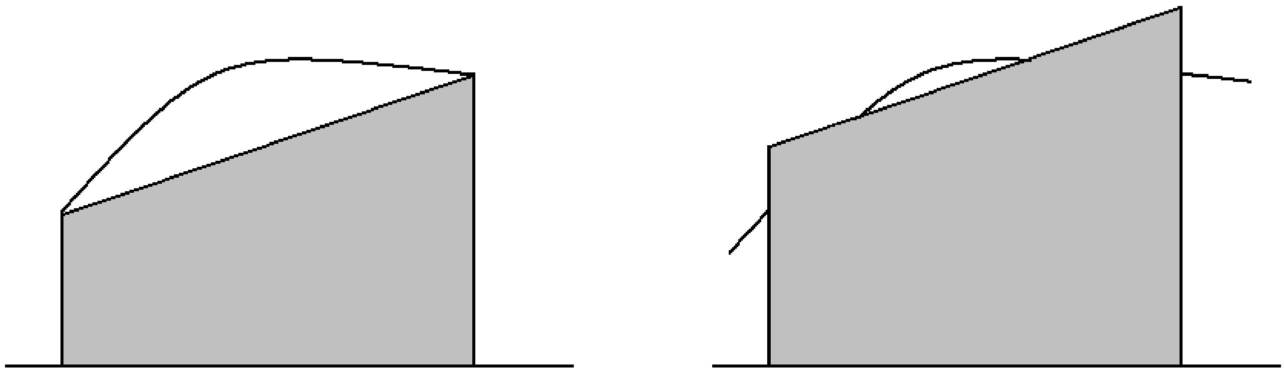
Hasta el momento, las fórmulas de integración estudiadas tienen la propiedad de que la estimación de la integral está basada en puntos igualmente espaciados. Por consiguiente, la posición de los puntos base usados en estos métodos está fijada a priori.

Ahora bien, si se elimina esta restricción y se colocan los puntos de forma inteligente se pueden obtener de forma más exacta el valor de la integral.

Por ejemplo, la regla trapezoidal está basada en tomar el área bajo la recta que une los valores de la función evaluada en los extremos del intervalo de integración. La expresión utilizada para calcular este área es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\,\frac{f(b) + f(a)}{2}$$

La Cuadratura Gaussiana es el nombre de uno de los métodos que implementan dicha estrategia, es decir, no se fijan a priori los puntos donde la función va a ser evaluada. Las fórmulas que aquí vamos



a estudiar se conocen con el nombre de Fórmulas de Gauss-Legendre, métodos que están basados en el conocido método de los coeficientes indeterminados.

Para facilitar el desarrollo teórico de estos métodos supondremos que los límites de integración son -1 y 1 respectivamente, de no ser así, basta un simple cambio de variables para subsanar este problema. Así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{(a+b)+(b-a)\,y}{2}\right) dy$$

pues haciendo el cambio:

$$x = \alpha + \beta y \quad x \in [a, b]$$

como se debe cumplir $y \in [-1, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned} a &= \alpha - \beta \\ b &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

de donde se obtienen los valores para α y β

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2} \\ \beta &= \frac{b-a}{2} \\ dx &= \frac{b-a}{2} dy \end{aligned}$$

10.3.1. Fórmulas de Gauss-Legendre para dos puntos

Esta expresión se basa en expresar el valor de la integral como

$$I \simeq c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

Como tenemos 4 incógnitas c_0, c_1, x_0 y x_1 necesitamos obtener 4 ecuaciones. Para ello, supondremos que se deben obtener resultados exactos sobre funciones polinómicas de hasta grado 3. Así:

$$\begin{aligned}
c_0 P_0(x_0) + c_1 P_0(x_1) &= \int_{-1}^{1} P_0(x)\,dx \\
c_0 P_1(x_0) + c_1 P_1(x_1) &= \int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx \\
c_0 P_2(x_0) + c_1 P_2(x_1) &= \int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx \\
c_0 P_3(x_0) + c_1 P_3(x_1) &= \int_{-1}^{1} P_3(x)\,dx
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= x^2 \\
P_3(x) &= x^3
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 &= \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2 \\
c_0 x_0 + c_1 x_1 &= \int_{-1}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 \\
c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 &= \int_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\
c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 &= \int_{-1}^{1} x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

sistema cuya solución es

$$c_0 = 1 \quad c_1 = 1 \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el valor de la integral se obtiene según la expresión:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

expresión conocida con el nombre de Fórmula de Gauss-Legendre para 2 puntos ($n = 1$).

Regla del trapecio como caso particular

Supongamos que sólo conocemos el valor de la función en los extremos de integración. Usando la técnica de coeficientes indeterminados se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_1 f(a) + c_2 f(b)$$

como sólo tenemos dos incógnitas, impondremos la condición de obtener valores exactos para polinómios de grado hasta 1 con, lo cual:

$$\begin{aligned} c_0 P_0(a) + c_1 P_0(b) &= c_0 + c_1 = \int_a^b 1dx = b-a \\ c_0 P_1(a) + c_1 P_1(b) &= c_0 \cdot a + c_1 \cdot b = \int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}$$

cuya solución es

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

que nos da la conocida regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_1 f(a) + c_2 f(b) = \left(\frac{b-a}{2}\right) f(a) + \left(\frac{b-a}{2}\right) f(b) = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

10.3.2. Fórmulas de Gauss-Legendre basada en $n+1$ puntos

El proceso descrito anteriormente se puede generalizar de forma directa sin más que añadir más ecuaciones al sistema. Así, en general:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_0 f(x_0) + \cdots + c_n f(x_n) = \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j)$$

Como tenemos $2(n+1)$ incógnitas necesitamos $2(n+1)$ ecuaciones, para ello exigiremos que se obtenga el valor exacto para polinómios de grado menor o igual que $2n+1$, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j x_j^k = \int_{-1}^{1} x^k dx = \left.\frac{x^{k+1}}{(k+1)}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{k+1}\left(1+(-1)^k\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n, 2n+1$$

En la siguiente tabla se muestran los valores que se obtienen hasta 6 puntos junto con el error de truncamiento que se comete:

Puntos $n+1$	Factores de peso	Argumentos de la función
2	$c_0 = 1{,}000000000$	$x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577350269$
	$c_1 = 1{,}000000000$	$x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350269$
3	$c_0 = \dfrac{5}{9} = 0{,}555555556$	$x_0 = -0{,}774596669$
	$c_1 = \dfrac{8}{9} = 0{,}888888889$	$x_1 = 0{,}0$
	$c_2 = \dfrac{5}{9} = 0{,}555555556$	$x_2 = 0{,}774596669$
4	$c_0 = 0{,}3478548451$	$x_0 = -0{,}861136312$
	$c_1 = 0{,}6521451549$	$x_1 = -0{,}339981044$
	$c_2 = 0{,}6521451549$	$x_2 = 0{,}339981044$
	$c_3 = 0{,}3478548451$	$x_3 = 0{,}861136312$
5	$c_0 = 0{,}236926885$	$x_0 = -0{,}906179846$
	$c_1 = 0{,}478628670$	$x_1 = -0{,}538469310$
	$c_2 = 0{,}568888889$	$x_2 = 0{,}0$
	$c_3 = 0{,}478628670$	$x_3 = 0{,}538469310$
	$c_4 = 0{,}236926885$	$x_4 = 0{,}906179846$
6	$c_0 = 0{,}171324492$	$x_0 = -0{,}932469514$
	$c_1 = 0{,}360761573$	$x_1 = -0{,}661209386$
	$c_2 = 0{,}467913935$	$x_2 = -0{,}238619186$
	$c_3 = 0{,}467913935$	$x_3 = 0{,}238619186$
	$c_4 = 0{,}360761573$	$x_4 = 0{,}661209386$
	$c_5 = 0{,}171324492$	$x_5 = 0{,}932469514$