Capítulo 3

Límites y continuidad de funciones de varias variables

3.1. Definiciones. Espacios Métricos.

Definición 3.1 *Llamamos* espacio métrico *a un par* (X, d) *formado por un conjunto* $X \neq \varnothing$, *no vacío y una aplicación*

$$\begin{array}{lcl} d : X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & d(x, y) \end{array}$$

que cumple $\forall (x, y) \in X \times X$

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \ \forall z \in A$ *(Desigualdad triangular).*

La aplicación $d(x, y)$ *es una* métrica *o* distancia.

Ejemplo 3.1 *Son distancias sobre los espacios métricos correspondientes*

1. ***Distancia asociada al valor absoluto:*** *En* $\mathbb{R}^n$ *se define* d_1 *como la distancia asociada a la norma del valor absoluto* $|\cdot|_1$ *que está definida como*

   $$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{x}|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

   y se define la métrica d_1 *como:*

   $$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d_1(\vec{x},\ \vec{y}) = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n|$$

2. ***Distancia euclídea:*** *En* $\mathbb{R}^n$ *se define* d_2 *como la distancia euclídea que está basada en la norma o producto euclídeo que, recordemos, está definida como*

   $$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{x}|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

   y se define la métrica d_2 *como:*

   $$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d_2(\vec{x},\ \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - y_n)^2}$$

3. ***Distancia del supremo:*** *En $\mathbb{R}^n$ se define la distancia del supremo d_∞, o también d_0, como la distancia asociada a la norma del supremo definida por*

$$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{x}|_\infty = \sup \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Se define esta métrica d_∞ como

$$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d_\infty(\vec{x}, \ \vec{y}) = \sup \{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\}.$$

4. ***Distancia discreta:*** *En $\mathbb{R}$ definimos la distancia discreta d_D como*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow d_D(x, \ y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

en este caso no está asociada a ninguna norma.

A partir de la definición de distancia podemos dar una estructura topológica al espacio métrico X, definiendo conjuntos elementales como abiertos y cerrados.

Definición 3.2 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Llamamos* diámetro de A, $\operatorname{diam}(A)$ *a*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

es el supremo de las distancias entre dos puntos de A.

Definición 3.3 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Diremos que A está* acotado *si*

$$\operatorname{diam}(A) < \infty.$$

Definición 3.4 *Sea (X, d) un espacio métrico, definimos* bola abierta *de centro $a \in X$ y radio $r > 0, r \in \mathbb{R}$ al conjunto definido como*

$$B(a, r) = B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Definición 3.5 *Sea (X, d) un espacio métrico, definimos* bola cerrada *de centro $a \in X$ y radio $r > 0, r \in \mathbb{R}$ al conjunto definido como*

$$B[a, r] = B_r[a] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Definición 3.6 *Sea (X, d) un espacio métrico, definimos* esfera *de centro $a \in X$ y radio $r > 0, r \in \mathbb{R}$ al conjunto definido como*

$$\delta B(a, r) = \delta B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}.$$

Observemos que

$$\delta B(a, r) = B[a, r] - B(a, r)$$

Definición 3.7 *Sea (X, d) un espacio métrico, se llama* entorno reducido *o* perforado *de centro $a \in X$ y radio $r > 0, r \in \mathbb{R}$ al conjunto definido como*

$$B^*(a, r) = B_r^*(a) = \{x \in X \mid 0 < d(a, x) < r\} = B(a, r) - \{a\}.$$

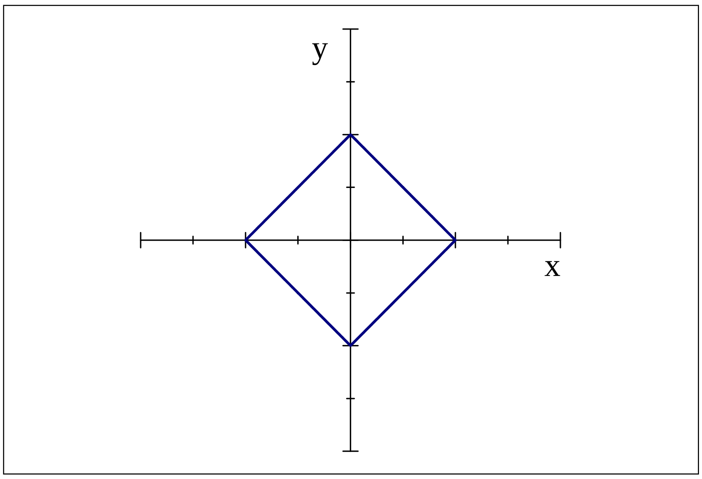
Ejemplo 3.2 *Vamos a dibujar las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ para cada una de las distancias definidas al principio de la sección. Por simplicidad en los cálculos tomaremos $a = (0,0)$. Para d_1 la definición de bola abierta sería*

$$\begin{aligned} B\left((0,0), r\right) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1\left((0,0),(x,y)\right) < r\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < r\right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, obtenemos

$$|x| + |y| < r = \begin{cases} x + y < r & x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y < r & x \geq 0, y < 0 \\ -x + y < r & x < 0, y \geq 0 \\ -x - y < r & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

y su representación en $\mathbb{R}^2$ es:



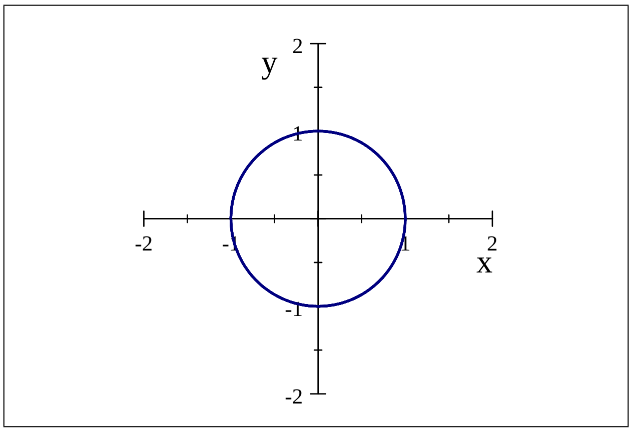
Para d_2, la distancia euclídea, tendremos

$$\begin{aligned} B\left((0,0), r\right) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2\left((0,0),(x,y)\right) < r\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\right\} \end{aligned}$$

o elevando al cuadrado

$$B\left((0,0), r\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\right\}$$

que es la ecuación del interior de un círculo de centro $(0,0)$ y radio r



Para d_∞, la distancia del supremo, tendremos

$$\begin{aligned} B((0,0),r) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_\infty((0,0),(x,y))<r\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|,|y|\}<r\right\} \end{aligned}$$

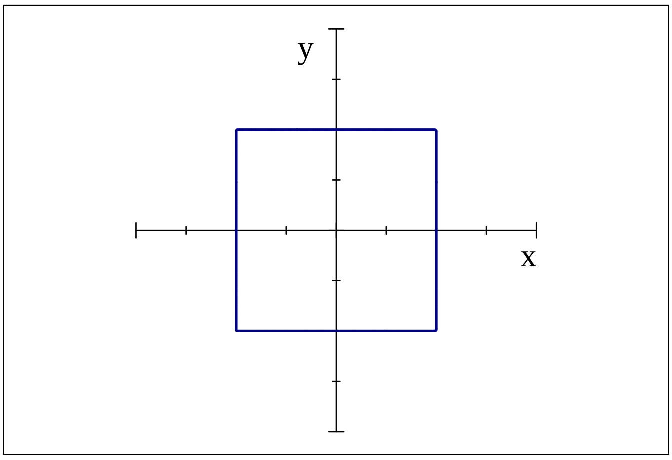
por la definición está claro que

$$|x|<r \text{ y } |y|<r$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} -r &< x<r \\ -r &< y<r \end{aligned}$$

y su representación sería



Definición 3.8 *Sea (X,d) un espacio métrico, sea $A\subseteq X$, diremos que $a\in X$ es un* punto interior *de $A \Longleftrightarrow \exists r>0; B(a,r)\subseteq A$.*

El conjunto de los puntos interiores de A se llama interior *de A y se representa como $\overset{\circ}{A}=\operatorname{int}(A)$.*

Un conjunto se dice abierto$\Leftrightarrow \overset{\circ}{A}=A$

Definición 3.9 *Sea (X,d) un espacio métrico, sea $A\subseteq X$, diremos que $a\in X$ es un* punto exterior *de $A \Longleftrightarrow \exists r>0; B(a,r)\subseteq X-A$.*

El conjunto de los puntos exteriores de A se llama exterior *de A y se representa como $\operatorname{ext}(A)$.*

Definición 3.10 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq X$, diremos que $a \in X$ es un* punto frontera de $A \Longleftrightarrow$

$$\forall r > 0 \Rightarrow B(a, r) \cap A \neq \varnothing \text{ y } B(a, r) \cap (X - A) \neq \varnothing \ .$$

El conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto A se llama frontera *de A y se representa como* $\operatorname{fr}(A)$.

Ejemplo 3.3 *Está claro que la frontera de una bola abierta (o cerrada) de centro $a \in X$ y radio $r > 0$, es la esfera de centro a y radio r :*

$$\operatorname{fr}(B(a, r)) = \delta B(a, r) \, .$$

Definición 3.11 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $F \subseteq X$, diremos que F es un conjunto* cerrado $\Longleftrightarrow (X - F)$ *es un conjunto abierto.*

Proposición 3.1 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $F \subseteq X$*

$$F \text{ es cerrado } \Longleftrightarrow F = \operatorname{fr}(F) \cup \operatorname{int}(F)$$

Definición 3.12 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq X$, diremos que $a \in X$ es un* punto de adherencia de $A \Longleftrightarrow$

$$\forall r > 0 \Rightarrow B(a, r) \cap A \neq \varnothing$$

El conjunto de todos los puntos de adherencia se denomina clausura o adherencia *y se representa por* $\overline{A}$.

Definición 3.13 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq X$, diremos que $a \in X$ es un* punto de acumulación de $A \Longleftrightarrow$

$$\forall r > 0 \Rightarrow B^*(a, r) \cap A \neq \varnothing$$

es decir, en cada entorno del punto a, hay puntos de A distintos de ese punto.

El conjunto de todos los puntos de acumulación se denomina conjunto derivado *y se representa por A'.*

Definición 3.14 *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $K \subseteq X$, diremos que K es compacto $\Longleftrightarrow K$ es cerrado y acotado.*

3.2. Funciones entre espacios métricos

Definición 3.15 *Se llama* función real de n variables reales *o* campo escalar, *a toda función de la forma*

$$\begin{array}{ccc} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

y se llama función vectorial real de n variables reales *o* campo vectorial *a toda función de la forma*

$$\begin{array}{ccc} F : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & F(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Como $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$, también podemos escribir

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

siendo f_k la componente k–ésima de F.

$$\begin{array}{ccc} f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & f_k(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

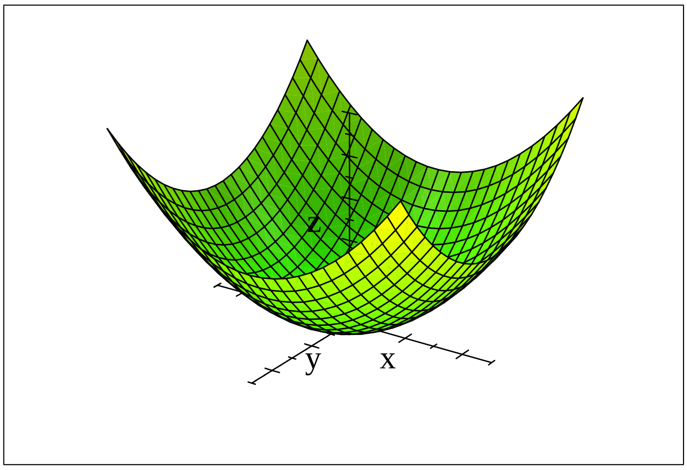
Ejemplo 3.4 *A continuación vemos algunos ejemplos de campos escalares y vectoriales*

1. *Toda aplicación lineal entre $\mathbb{R}$–espacios vectoriales es una función vectorial, por ejemplo*

$$\begin{array}{lcl} F : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \rightsquigarrow & f(x, y) = (x + y, y, y - x) \end{array}$$

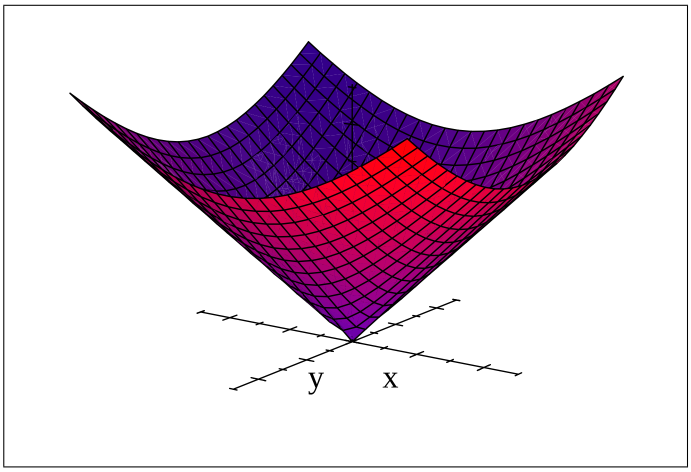
2. *Paraboloide de revolución*

$$\begin{array}{lcl} F : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array}$$



3. *Cono*

$$\begin{array}{lcl} F : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$



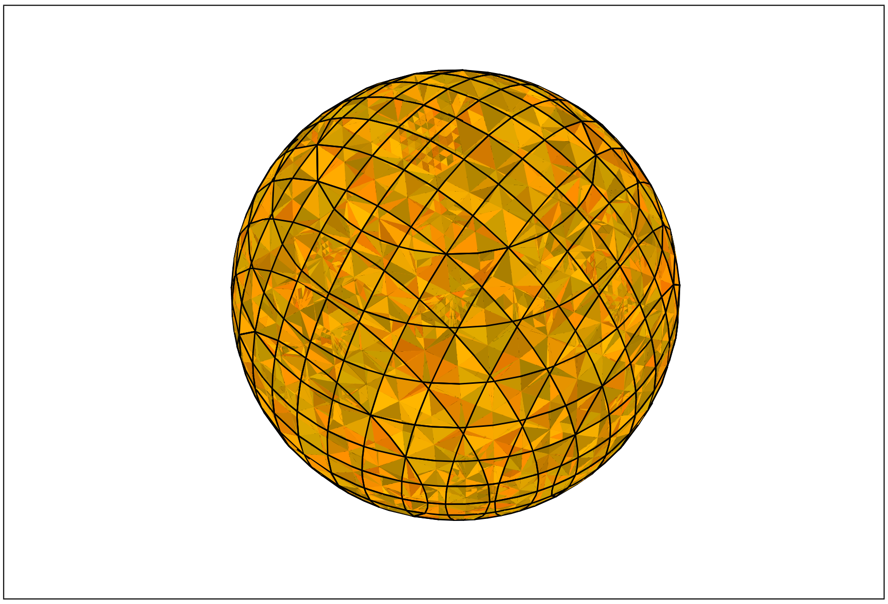
4. *Otros ejemplos:*

$$\begin{gathered} f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 \\ f(x, y, z) = x^2 - 3xy + y^2 + z^3 - e^{xyz} \\ F(x, y) = (xy, e^{x+y}, \operatorname{sen} x) \\ F(x, y) = \left(xy, e^{x+y}, \operatorname{sen} x, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \end{gathered}$$

5. *También podemos definir funciones en forma implícita como*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

que es una esfera de centro $(0, 0, 0)$ *y radio* 1



Definición 3.16 *Dada* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *se llama* dominio de definición *al conjunto*

$$\text{Dom}\,(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\}$$

Definición 3.17 *Dada* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *al lugar geométrico de los puntos* $P = (x, y, f\,(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, *que satisfacen la ecuación*

$$z = f\,(x, y)$$

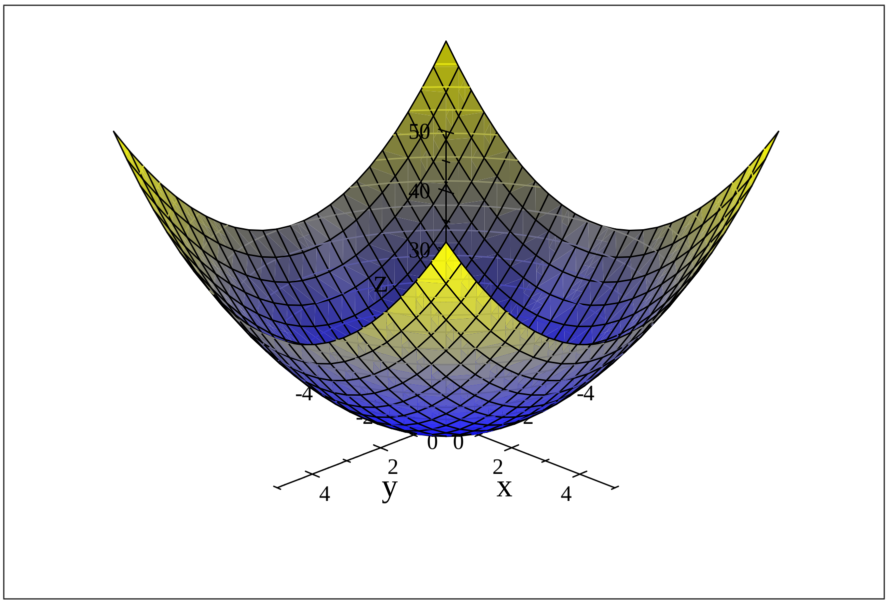
es decir el conjunto

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f\,(x, y)\,; \forall\,(x, y) \in D\right\}$$

se le llama gráfica de f*.*

Está claro que sólo podemos hacer representación de funciones reales de dos variables, incluso en estos casos la representación no es sencilla, si no se cuenta con un programa matemático adecuado (como MAXIMA, Gnuplot, Octave, Scilab, Matlab) y es normal recurrir a las llamadas curvas de nivel que definimos a continuación.

Definición 3.18 *Dada* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *se llama* curva de nivel (a nivel k) *a la proyección en uno de los planos coordenados de la intersección de la gráfica de* f *con un plano paralelo a dicho plano. Por ejemplo se expresa a continuación las curvas de nivel relacionadas con la función* $f\,(x, y) = x^2 + y^2$



3.3. Límite de funciones de varias variables

Definición 3.19 *Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, punto de acumulación de D, diremos que F tiene por límite $\overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^m$ cuando $\overrightarrow{x}$ tiende a $\overrightarrow{a}$ y se escribe como*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{l} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : d_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) < \delta \Rightarrow d_m\left(F(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{l}\right) < \varepsilon$$

Donde d_n es la distancia asociada al espacio métrico $\mathbb{R}^n$ y d_m la correspondiente a $\mathbb{R}^m$. La definición, como en el caso real, nos dice que si la distancia entre los puntos es pequeña, entonces también lo serán las imágenes del límite. Como caso particular vemos la definición para funciones escalares, es decir, para $m = 1$ y utilizando la distancia.

Definición 3.20 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, punto de acumulación de D, diremos que F tiene por límite $l \in \mathbb{R}$ cuando $\overrightarrow{x}$ tiende a $\overrightarrow{a}$ y se escribe como*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : d_n(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) < \delta \Rightarrow d(f(\overrightarrow{a}), l) < \varepsilon$$

Generalmente se utilizará la distancia euclídea para el espacio $\mathbb{R}^n$ y el valor absoluto para $\mathbb{R}$, de esta forma la definición de límite en este caso puede escribirse como

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\overrightarrow{a}) - l| < \varepsilon$$

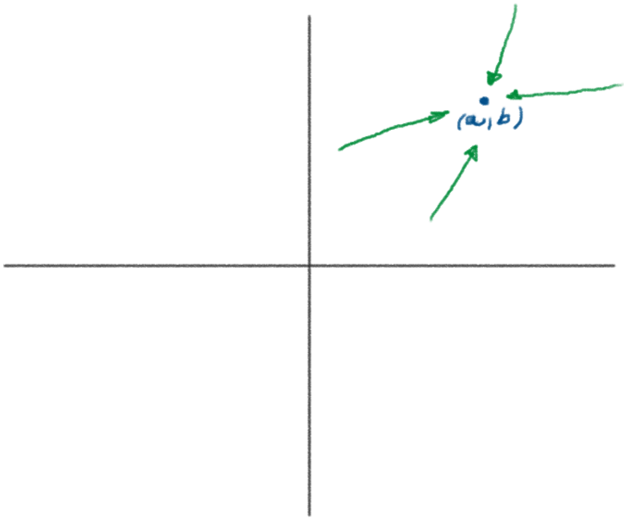
siendo

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

Con esta definición podemos dar una más cómoda para funciones vectoriales en términos de sus componentes.

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{l} \Longleftrightarrow \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f_k(\overrightarrow{x}) = l_k \;\; k = 1, \ldots, m$$

Proposición 3.2 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, punto de acumulación de D, entonces*



1. *Si existe el límite* $\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = l \in \mathbb{R}$*, entonces es único.*

2. *Si existe el límite* $\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = l \in \mathbb{R}$*, entonces la función está acotada en un entorno de dicho punto.*

Proposición 3.3 *Sea* $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, y sea* $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$*. Supongamos que existen* $\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = l_1$ *y* $\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} g(\overrightarrow{x}) = l_2$ *entonces*

1. $$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} (f+g)(\overrightarrow{x}) = l_1 + l_2$$

2. $$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} (f\cdot g)(\overrightarrow{x}) = l_1 \cdot l_2$$

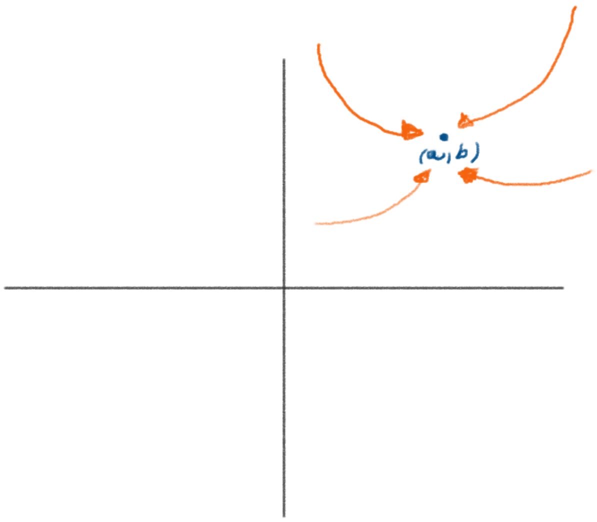
3. *Si* $l_2 \neq 0$
$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{x}) = \frac{l_1}{l_2}$$
.

3.3.1. Límites direccionales

Vamos a estudiar con más detalle los límites de funciones escalares o vectoriales sobre $\mathbb{R}^2$. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en este caso la definición de límite es de la forma:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \iff \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Como el límite es único, podemos acercarnos al punto (a,b) desde cualquier dirección y el resultado debe ser el mismo, es decir, el límite debe ser independiente de la dirección de acercamiento al punto (a,b). En particular podemos acercarnos al punto (a,b), siguiendo algunas trayectorias específicas como rectas, cuya ecuación general es de la forma $y = m(x-a) + b$ forma o parábolas, cuyas ecuaciones



generales son de la forma

$$y = m\,(x-a)^2 + b \qquad \text{Ecuación general de la parábola en } y \text{ que pasa por } (a,b)$$

$$x = m\,(y-b)^2 + a \qquad \text{Eucación general de la parábola en } x \text{ que pasa por } (a,b)$$

Notar que en estos casos dejamos el límite en función de una sola variable, ya que en los tres casos, si tomamos $x \to a$, entonces, se obtiene que $y \to b$.

Si el límite sobre estas direcciones depende m, es decir, depende de la curva que tomemos para acercarnos al punto, entonces podremos asegurar que el límite de la función no existirá. Obviamente, si el límite de la función existiera, entonces coincidiría con los límites obtenidos por estos métodos. Sin embargo, que el límite no dependa del parámetro m, no garantiza la existencia del límite de la función. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.5 *Comprueba mediante límites direccionales que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$$

Para ello vamos a aproximarnos al punto $(0,0)$ *por rectas de la forma*

$$y = mx$$

y si cambiamos y *por* mx *en el límite:*

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+2\,(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(1-m^2)}{x^2\,(1+2m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-m^2)}{(1+2m^2)} = \frac{1-m^2}{1+2m^2}.$$

Comprobamos que este límite depende de m*, es decir, depende de la pendiente de la recta desde donde nos acercamos al punto* $(0,0)$*, lo que implica que no hay límite.*

Ejemplo 3.6 *Comprueba mediante límites direccionales que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2}$$

Para ello vamos a aproximarnos al punto $(0,0)$ *por rectas de la forma*

$$y = mx$$

y si cambiamos y *por* mx *en el límite:*

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{2x^2+3(mx)^2-2(mx)^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(2+3m^2-2m^3x\right)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2+3m^2-2m^3x}{1+m^2} = \frac{2+3m^2}{1+m^2}.$$

Comprobamos que este límite depende de m*, es decir, depende de la pendiente de la recta desde donde nos acercamos al punto* $(0,0)$*, lo que implica que no hay límite.*

3.3.2. Límites iterados

Los límites iterados consisten en aproximarnos al punto (a,b) mediante las coordenadas horizontal y vertical, es decir, tomamos los límites de forma sucesiva, primero cuando $x \to a$, dejando la y fija, al resultado obtenido le buscamos el límite cuando $y \to b$, el resultado de este límite es el primer límite iterado. El proceso se repite intercambiando las variables, esto es, tomamos el límite cuando $y \to b$ y al resultado le calculamos el límite cuando $x \to a$, esto nos dará el segundo límite iterado, en resumen hay que calcular los dos límites siguientes

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

Si estos dos límites son distintos o alguno de ellos no existe, entonces el límite de la función en (a,b) no existirá. Como en el método anterior, que estos dos límites existan y sean iguales no garantizan la existencia del límite de la función, pero en caso de existir, nos daría el valor del mismo.

Ejemplo 3.7 *Comprueba mediante límites iterados que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$$

Calculamos el primer límite iterado

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2} &= \frac{-y^2}{2y^2} = \frac{-1}{2} \\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

y si ahora calculamos el segundo límite iterado

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2} &= \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}\right) &= \lim_{x\to 0}(1) = 1 \end{aligned}$$

Comprobamos que ambos límites son distintos, lo que implica que no hay límite.

Ejemplo 3.8 *Comprueba mediante límites direccionales que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2}$$

Calculamos el primer límite iterado

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2} &= \frac{3y^2-2y^3}{y^2} = 3-2y \\
\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}(3-2y) = 3
\end{aligned}$$

y si ahora calculamos el segundo límite iterado

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2} &= \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\
\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{x\to 0}(2) = 2
\end{aligned}$$

Comprobamos que ambos límites son distintos, lo que implica que no hay límite.

3.3.3. Cambio a coordenadas polares

Podemos expresar la función $f(x,y)$ en función de coordenas polares utilizando el siguiente cambio

$$\begin{aligned}
x &= a + r\cos\theta \\
y &= b + r\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

de forma que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\operatorname{sen}\theta),$$

si este límite no existe o depende de explícitamente de θ, entonces podremos asegurar que no existirá $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Ejemplo 3.9 *Utiliza las coordenadas polares para comprobar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2},$$

Vamos a realizar el cambio a polares, en este caso y como el punto es el origen, entonces

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2} &\Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2-(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+2\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta\right)}{r^2\left(\cos^2\theta+2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta+2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta+2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}
\end{aligned}$$

que depende de θ y por tanto la función $f(x,y)$ no tiene límite en $(0,0)$.

Ejemplo 3.10 *Utiliza las coordenadas polares para comprobar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2},$$

Vamos a realizar el cambio a polares, en este caso y como el punto es el origen, entonces

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2} &\Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{2\,(r\cos\theta)^2+3\left(r\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)-2\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(2\cos^2\theta+3\,\mathrm{sen}^2\,\theta-2r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0}\left(2\cos^2\theta+3\,\mathrm{sen}^2\,\theta-2r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \\
&= \left(2\cos^2\theta+3\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right)
\end{aligned}$$

que depende de θ y por tanto la función $f(x,y)$ no tiene límite en $(0,0)$.

De nuevo, la existencia de este límite no garantiza la existencia del límite de la función. Veamos un ejemplo

Ejemplo 3.11 *Vamos a aplicar todos los métodos vistos hasta ahora (límites direccionales, iterados y en polares) al cálculo del siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}.$$

En primer lugar probamos con los límites direccionales usando rectas de la forma $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(mx)}{x^6+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^2(x^4+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^4+m^2} = 0.$$

Usamos parábolas en $y = mx^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(mx^2\right)}{x^6+\left(mx^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^5}{x^6+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^5}{x^4(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

Usamos límites iterados

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = 0\\
\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{x^6}\right) = 0
\end{aligned}$$

y finalmente coordenadas polares

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\\
y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} &\Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(r\cos\theta)^6+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2\left(r^4\cos^6\theta+\mathrm{sen}^2\theta\right)}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^4\cos^6\theta+\mathrm{sen}^2\theta}\\
&= 0
\end{aligned}$$

que no depende de θ. Todos los métodos dan el mismo límite, 0, podríamos pensar, por tanto que esta función tiene límite 0. Sin embargo, si nos aproximamos a la función mediante curvas de la forma $y = mx^3$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^3}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(mx^3\right)}{x^6+\left(mx^3\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^6}{x^6+m^2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^6}{x^6(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

el límite depende de m y por tanto la función no tendrá límite en ese punto.

En algunas ocasiones sí que es posible determinar la existencia del límite usando coordenadas polares a través del siguiente resultado.

Proposición 3.4 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de D, entonces se cumple*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(\overrightarrow{x}) = l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} |f(a + r\cos\theta, b + r\operatorname{sen}\theta) - l| \leq g(r) & \forall\theta \in]0, 2\pi] \\ \\ \qquad\qquad \lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0 \end{cases}$$

La expresión de la derecha equivale a decir que $\lim\limits_{r\to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\operatorname{sen}\theta) = l$ y existe una función mayorante $g(r)$ $\forall\theta \in]0, 2\pi]$, siendo g un infinitésimo en el cero.

Ejemplo 3.12 *Usando polares, calcula el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

usando la representación en coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

tendremos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)^2}{(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)^2}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

Como función mayorante tenemos en cuenta que tanto la función $\operatorname{sen}\theta$ como la $\cos\theta$ están acotadas por 1 y definimos

$$g(r) = r$$

está claro que

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta) - l| = \left|r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right| \leq r$$

y además

$$\lim_{r\to 0} g(r) = 0$$

Luego usando la proposición anterior, podemos decir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

3.4. Continuidad

Como en el caso de una variable, el siguiente paso en el manejo de funciones escalares y/o vectoriales es definir su continuidad.

Definición 3.21 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, y sea $\overrightarrow{a} \in D$. Se dice que la función f es* continua en el punto $\overrightarrow{a}$ *si y sólo si, se cumple*

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{a})$$

Esta definición se puede extender a una función vectorial utilizando las componentes de la misma, de modo que una función $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $\overrightarrow{a} \in D \Longleftrightarrow f_k$, la componente k–ésima de F, es continua en $\overrightarrow{a}$, para cada k.

Ejemplo 3.13 *Los polinomios en varias variables son funciones continuas, por ejemplo, la función*

$$f(x,y,z) = xy + x^2y^3 + xy^2 + xyz + z^2$$

que es un polinomio (función polinomial) de grado 5 sobre $\mathbb{R}^3$*, es una campo escalar continuo.*

Proposición 3.5 *Sean* $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, dos funciones continuas en* $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$*, entonces se cumple*

1. *La función* $(f+g)(x)$ *es continua en* $\overrightarrow{a}$.
2. *La función* $(f \cdot g)(x)$ *es continua en* $\overrightarrow{a}$.
3. *Si* $g(a) \neq 0 \Longrightarrow$ *La función* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ *es continua en* $\overrightarrow{a}$.

Teorema 3.6 (Teorema de la función compuesta) *Sea* $F : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, continua en* $\overrightarrow{a} \in D_1$ *y sea* $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua en* $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{a}) \in D_2$*, entonces la función compuesta*

$$(g \circ F)(x) = g(F(x))$$

es continua en $\overrightarrow{a}$.

Teorema 3.7 (Teorema de Weierstrass) *Sea* $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, una función continua en todo* K*, con* K *un conjunto compacto. Entonces la función* f *está acotada superior e inferiormente y existen dos puntos* $\overrightarrow{x}_M, \overrightarrow{x}_m \in K$*, tal que en ellos la función alcanza sus valores máximo y mínimo (absolutos), es decir*

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}_M) &= \max\{f(x) \mid \overrightarrow{x} \in D\} \\ f(\overrightarrow{x}_m) &= \min\{f(x) \mid \overrightarrow{x} \in D\} \end{aligned}$$

Teorema 3.8 (Valores intermedios) *Sea* $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, una función continua en todo* K*, con* K *un conjunto compacto. Entonces si* M *y* m *son, respectivamente los valores máximo y mínimo que alcanza* f *en* K*, entonces*

$$\forall \alpha \text{ con } m < \alpha < M \Longrightarrow \exists \overrightarrow{x} \in K : f(\overrightarrow{x}) = \alpha$$