

Capítulo 1

Cálculo de primitivas

1.1. Primitivas o integrales indefinidas

Definición 1.1 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una primitiva de $f \iff F$ es derivable en I y $F'(x) = f(x)$.

Proposición 1.1 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces si $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una primitiva de $f \Rightarrow G(x) = F(x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$ es también primitiva de f .

La demostración de este resultado es trivial puesto que la derivada de una constante, en este caso k , es 0.

La búsqueda de funciones primitivas de una función $f(x)$ se expresará como

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Además teniendo en cuenta las propiedades de la derivada tendremos los siguientes resultados:

Proposición 1.2 Sea $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dos funciones reales de variable real, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una primitiva de f y $G : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una primitiva de g , entonces $\alpha F(x) + \beta G(x)$ es una primitiva de $\alpha f(x) + \beta g(x)$. O utilizando la notación anterior

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Como vemos el cálculo de primitivas es un operador lineal.

A continuación se dan una serie de tablas con primitivas inmediatas, se prescinde en cada tabla de la constante de integración y se incluye la correspondiente primitiva en el caso de que el argumento utilizado sea una función $f(x)$, utilizando en este caso la regla de la cadena puesto que

$$(F[f(x)])' = F'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Función	Primitivas	Función	Primitiva
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$[f(x)]^\alpha f'(x), \alpha \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x) $
e^x	e^x	$f'(x) e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$f'(x) a^{f(x)}$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a}$

Función	Primitivas	Función	Primitiva
$\cos x$	$\sin x$	$f'(x) \cos[f(x)]$	$\sin[f(x)]$
$\sin x$	$-\cos x$	$f'(x) \sin[f(x)]$	$-\cos[f(x)]$
$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\tan x$	$\frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} = f'(x) \sec^2[f(x)]$	$\tan[f(x)]$
$\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$	$\cotan x$	$\frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]} = f'(x) \operatorname{cosec}^2[f(x)]$	$\cotan[f(x)]$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsen x$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arcsen[f(x)]$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan[f(x)]$

Función	Primitivas	Función	Primitiva
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$	$f'(x) \operatorname{Ch}[f(x)]$	$\operatorname{Sh}[f(x)]$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$	$f'(x) \operatorname{Sh}[f(x)]$	$\operatorname{Ch}[f(x)]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\arg \operatorname{Sh} x$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}$	$\arg \operatorname{Sh}[f(x)]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arg \operatorname{Ch} x$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	$\arg \operatorname{Ch}[f(x)]$

Ejemplo 1.1 *Calcula las siguientes primitivas inmediatas*

$$\begin{array}{ll} a) \int \operatorname{sen}(3x) dx & b) \int 2^{3x} dx \\ c) \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx & d) \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ e) \int \frac{1}{1+3x^2} dx & f) \int \frac{x}{1+x^4} dx \\ g) \int \frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}} & h) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \int \operatorname{sen}(3x) dx &= \frac{1}{3} \int 3 \operatorname{sen}(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + k \\ b) \int 2^{3x} dx &= \int (2^3)^x dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} = \frac{(2^3)^x}{\ln 2^3} = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + k \\ c) \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen}(\sqrt{3}x) + k \\ d) \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k \\ e) \int \frac{1}{1+3x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan}(\sqrt{3}x) + k \\ f) \int \frac{x}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x^2 + k \\ g) \int \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3}x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arg Sh}(\sqrt{3}x) + k \\ h) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} + k \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1 *Calcula las siguientes integrales inmediatas*

$$\begin{array}{lll} a) \int x dx & b) \int 2x dx & c) \int \frac{1}{x^4 \sqrt{1+x^2}} dx \\ d) \int 3x^2 dx & e) \int (3x^3 - 7x - 2) dx & f) \int x^5 dx \end{array}$$

1.2. Métodos de integración

1.2.1. Cambio de variable

Si podemos hacer un cambio del tipo $x = g(t)$ entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Ejemplo 1.2 *Calcula las siguientes primitivas mediante el cambio de variable adecuado*

$$a) \int x \operatorname{sen}(3x^2) dx \quad b) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$c) \int x\sqrt{3x-4} dx \quad d) \int xe^{-x^2/2} dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \int x \operatorname{sen}(3x^2) dx &\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = t \\ 6x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{1}{6} dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} \int \operatorname{sen}(t) dt = -\frac{1}{6} \cos(t) + k \\ &\Rightarrow -\frac{1}{6} \cos(3x^2) + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx &= \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \Rightarrow \sqrt{x} = t \\ dx = 2t dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \int \frac{2t^2}{1+t} dx = 2(t^2 - t + \ln|1+t|) + k \\ &\Rightarrow 2x - 2\sqrt{x} + 2\ln|1 + \sqrt{x}| + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \int x\sqrt{3x-4} dx &= \Rightarrow \begin{cases} 3x-4 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(t^2+4) \\ dx = \frac{2}{3}t dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{2}{9} \int t^2(t^2+4) dt = \frac{2}{45}t^5 + \frac{8}{27}t^3 \\ &\Rightarrow \frac{2}{45}(3x-4)^{5/2} + \frac{8}{27}(3x-4)^{3/2} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int x e^{-x^2/2} dx &= \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} = t \\ x dx = dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \int e^{-t} dt = -e^{-t} + k \\ &\Rightarrow -e^{-x^2/2} + k \end{aligned}$$

Algunos cambios de variable

- Para funciones del tipo

$$\int R(a^x) dx$$

donde $R(x)$ es una función racional, se propone el cambio $t = a^x$, por tanto

$$\ln t = x \ln a \Rightarrow \frac{1}{t} dt = (\ln a) dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{t} dt$$

- Para funciones del tipo

$$\int R(\arcsin x) dx$$

donde $R(x)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \arcsin x$ y por tanto

$$\sin t = x \Rightarrow \cos(t) dt = dx$$

- Para funciones del tipo

$$\int R(\arctan x) dx$$

donde $R(x)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \arctan x$ y por tanto

$$\tan t = x \Rightarrow (1 + \tan^2 t) dt = dx$$

- Para funciones del tipo

$$\int R(\tan x) dx$$

donde $R(x)$ es una función racional, se propone el cambio $t = \tan x$ y por tanto

$$\arctan t = x \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} dt = dx$$

1.2.2. Integración por partes

Usando la definición de derivada de un producto

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

podemos reagrupar términos e integrar para obtener la expresión

$$\int u \cdot v' = \int (u \cdot v)' - \int (u' \cdot v) = (u \cdot v) - \int (u' \cdot v)$$

Ejemplo 1.3 *Calcula las siguientes primitivas mediante la integración por partes*

$$a) \int x \ln(1+x^2) dx \quad b) \int \arctan x dx$$

$$c) \int \ln(1+x^2) dx \quad d) \int x^2 e^x dx$$

Solución:

a) Tomamos

$$u = \ln(1+x^2) \Rightarrow u' = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$v' = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x^2) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k \end{aligned}$$

b) Tomamos

$$u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$v' = dx \Rightarrow v = x$$

y por tanto

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k$$

c) Tomamos

$$u = \ln(1+x^2) \Rightarrow u' = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$v' = dx \Rightarrow v = x$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x \end{aligned}$$

d) Tomamos

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x dx$$

$$v' = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

y por tanto

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

en la primitiva que nos queda tomamos

$$u = x \Rightarrow u' = dx$$

$$v' = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

y por tanto

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + k \\ &= (x^2 - 2x - 2) e^x + k \end{aligned}$$

1.2.3. Funciones racionales

Las primitivas de funciones racionales son de la forma:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} dx$$

donde $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $Q_m(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ son polinomios con coeficientes $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Podemos suponer que $m > n$, ya que en caso contrario podemos realizar la división polinomial

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = C(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}$$

siendo p , el grado de $R(x)$, menor que m . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b_m = 1$ (siempre podemos dividir todo el polinomio por b_m). Distinguiremos varios casos:

1. El polinomio $Q_m(x)$ tiene m raíces reales y distintas.

La descomposición del polinomio en factores sería de la forma

$$Q_m(x) = x^m + \dots + b_1 x + b_0 = (x - r_1) \dots (x - r_m)$$

En este caso, realizamos una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \dots + \frac{A_m}{(x - r_m)}$$

donde los coeficientes A_k se obtienen sumando las fracciones a la derecha e igualando los numeradores de ambas expresiones. A continuación se integra cada sumando

$$\begin{aligned} \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx &= \int \left(\frac{A_1}{(x-r_1)} + \dots + \frac{A_m}{(x-r_m)} \right) dx \\ &= \int \frac{A_1}{(x-r_1)} dx + \dots + \int \frac{A_m}{(x-r_m)} dx \\ &= A_1 \ln|x-r_1| + \dots + A_m \ln|x-r_m| + k \end{aligned}$$

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente primitiva

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$$

En este caso

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

y por tanto la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-3)}$$

para encontrar los coeficientes A_1 y A_2 , sumamos las fracciones del término de la derecha

$$\frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-3)} = \frac{A_1(x-3) + A_2(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

y a continuación igualamos los numeradores de ambas fracciones

$$1 = A_1(x-3) + A_2(x-1)$$

Para encontrar los valores de A_1 y A_2 , podemos actuar de dos formas. La primera es evaluando cada miembro de la ecuación en las raíces del denominador, en ambos casos debe darnos el mismo resultado

$$x = 1 \Rightarrow 1 = A_1(1-3) + A_2(1-1) \Rightarrow 1 = -2A_1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x = 3 \Rightarrow 1 = A_1(3-3) + A_2(3-1) \Rightarrow 1 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$$

La segunda opción es identificar los coeficientes de los polinomios que hay en cada miembro

$$1 = A_1(x-3) + A_2(x-1) = (A_1 + A_2)x - (3A_1 + A_2)$$

$$\text{Igualando coeficientes} \Rightarrow \begin{cases} \text{Coeficiente de } x & 0 = A_1 + A_2 \\ \text{Coeficiente independiente} & 1 = -(3A_1 + A_2) \end{cases}$$

si ahora resolvemos este sistema, obtendremos los valores de los coeficientes, que obviamente serían los mismos valores que hemos obtenido antes.

Por uno u otro método, la descomposición buscada es

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-3)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-3)}$$

Ahora se puede integrar cada sumando

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-3)} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x-3| + k \end{aligned}$$

o factorizando

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \ln \sqrt{\frac{|x-3|}{|x-1|}} + k$$

2. El polinomio $Q_m(x)$ sólo tiene raíces reales, no todas simples.

La descomposición del polinomio en factores sería de la forma

$$Q_m(x) = x^m + \dots + b_1x + b_0 = (x-r_1)^{m_1} \dots (x-r_p)^{m_p}$$

donde cada m_k es la multiplicidad de la correspondiente raíz r_k . Realizamos una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{p,1}}{(x-r_p)} + \dots + \frac{A_{p,m_p}}{(x-r_p)^{m_p}}$$

es decir, se incluyen m_k sumandos para cada raíz r_k , usando la multiplicidad. Con esta descomposición tendremos integrales de cada sumando de dos formas

$$\int \frac{1}{(x-r)^m} dx = \int (x-r)^{-m} dx = \begin{cases} \ln |x-r| & \text{Si } m = 1 \\ \frac{1}{1-m} (x-r)^{1-m} & \text{Si } m \neq 1 \end{cases}$$

Por ejemplo

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2} dx$$

en este caso el polinomio del denominador se puede descomponer en factores como

$$x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$$

y la función racional sería

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{(x-1)} + \frac{A_{3,1}}{(x+1)}$$

donde hemos tenido en cuenta que la raíz 0, es doble. Para obtener los coeficientes $A_{i,j}$, sumamos las fracciones del miembro de la derecha, usando para ello el mínimo común múltiplo $x^2(x-1)(x+1)$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{(x-1)} + \frac{A_{3,1}}{(x+1)} \\ = & \frac{A_{1,1}x(x-1)(x+1) + A_{1,2}(x-1)(x+1) + A_{2,1}x^2(x+1) + A_{3,1}x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

y ahora igualamos los numeradores de ambas fracciones

$$1 = A_{1,1}x(x-1)(x+1) + A_{1,2}(x-1)(x+1) + A_{2,1}x^2(x+1) + A_{3,1}x^2(x-1)$$

Para obtener los coeficientes, evaluamos ambos polinomios en cada una de las raíces del denominador

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -A_{1,2} \Rightarrow A_{1,2} = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 2A_{2,1} \Rightarrow A_{2,1} = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -2A_{3,1} \Rightarrow A_{3,1} = -\frac{1}{2}$$

Pero como la raíz 0 es doble y no podemos usarla otra vez, para encontrar $A_{1,1}$ usamos cualquier otro valor, por ejemplo $x = 2$

$$1 = 6A_{1,1} + 3A_{1,2} + 12A_{2,1} + 4A_{3,1}$$

y sustituyendo los valores conocidos

$$1 = 6A_{1,1} + 3(-1) + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 6A_{1,1} - 3 + 6 - 2 = A_{1,1} + 1$$

de donde

$$A_{1,1} = 0,$$

la descomposición es

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)}$$

que podemos sustituir en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)} \right) dx \\ &= -\int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)} dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + k = \frac{1}{x} + \ln \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} + k. \end{aligned}$$

3. El polinomio $Q_m(x)$ tiene raíces reales y raíces complejas simples.

Suponiendo que $\alpha + i\beta$ es una raíz de $Q_m(x)$ entonces, como los coeficientes son reales, también será raíz de $Q_m(x)$ el complejo conjugado $\alpha - i\beta$ y habrá un factor de la forma

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = ((x - \alpha) - i\beta)((x - \alpha) + i\beta)$$

a la derecha tenemos una identidad notable de suma por diferencia, luego

$$((x - \alpha) - i\beta)((x - \alpha) + i\beta) = (x - \alpha)^2 - (i\beta)^2$$

y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, los dos factores asociados a las raíces complejas simples $\alpha \pm i\beta$ se puede poner como

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

es decir, una raíz compleja y su conjugada se reúnen en un factor de la forma $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, donde α es la parte real de la raíz y β es la parte imaginaria.

Suponiendo ahora que $Q_m(x)$ tiene p raíces reales con multiplicidades m_1, \dots, m_p y q raíces complejas simples distintas, con sus correspondientes conjugadas, el polinomio se puede factorizar como sigue

$$Q_m(x) = (x - r_1)^{m_1} \dots (x - r_p)^{m_p} \left((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 \right) \dots \left((x - \alpha_q)^2 + \beta_q^2 \right)$$

La descomposición en fracciones simples propuesta es

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{p,1}}{(x-r_p)} + \dots + \frac{A_{p,m_p}}{(x-r_p)^{m_p}} + \frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \dots + \frac{B_qx+C_q}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2}$$

es decir, se incluyen m_k sumandos para cada raíz real r_k , usando su multiplicidad y q fracciones correspondientes a las raíces complejas. Al integrar cada sumando, obtendremos sumandos de la forma

$$\int \frac{1}{(x-r)^m} dx = \int (x-r)^{-m} dx = \begin{cases} \ln|x-r| & \text{Si } m = 1 \\ \frac{1}{1-m} (x-r)^{1-m} & \text{Si } m \neq 1 \end{cases}$$

para las raíces reales y

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx + (\alpha+C) \int \frac{1/\beta}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx \\ &= \frac{B}{2} \ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{(B\alpha+C)}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

para las raíces complejas.

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente integral

$$\int \frac{1}{x(x^2-2x+5)} dx.$$

Calculamos las raíces del denominador

$$x(x^2-2x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^2-2x+5 = 0$$

La solución de la ecuación de segundo grado tiene por solución

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

és decir una raíz compleja y su conjugada, que se agrupan para formar un sólo factor de segundo orden de la forma:

$$\operatorname{Re}(1 + 2i) = 1 \text{ e } \operatorname{Im}(1 + 2i) = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 2^2 = (x - 1)^2 + 4$$

La descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{1}{x(x^2 - 2x + 5)} = \frac{1}{x(4 + (x - 1)^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x - 1)^2 + 4}$$

Se ha puesto una fracción correspondiente a la raíz real ($r_1 = 0$) y otro sumando que engloba a las dos raíces complejas conjugadas. Sumando ambas fracciones obtenemos

$$\frac{1}{x((x - 1)^2 + 4)} = \frac{A((x - 1)^2 + 4) + (Bx + C)x}{x((x - 1)^2 + 4)}$$

e identificando numeradores, puesto que los denominadores son iguales se obtiene:

$$1 = A((x - 1)^2 + 4) + (Bx + C)x.$$

Si agrupamos coeficientes según las potencias de x , obtenemos

$$1 = A(x^2 - 2x + 5) + Bx^2 + Cx = (A + B)x^2 + (C - 2A)x + 5A,$$

como es una identidad polinomial los coeficientes deben ser iguales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Coeficiente de } x^2 & 0 = (A + B) \\ \text{Coeficiente de } x & 0 = C - 2A \\ \text{Coeficiente independiente} & 1 = 5A \end{array} \right.$$

El sistema así obtenido tiene por solución:

$$A = \frac{1}{5} \quad B = -\frac{1}{5} \quad C = \frac{2}{5}$$

Y la descomposición en fracciones simples sería

$$\frac{1}{x(4 + (x - 1)^2)} = \frac{1}{5} \frac{1}{x} - \frac{1}{5} \frac{x - 2}{4 + (x - 1)^2}$$

Ya podemos integrar cada sumando de forma independiente

$$\int \frac{1}{x(x^2 - 2x + 5)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{x - 2}{4 + (x - 1)^2} dx$$

El primer sumando es directo

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} \ln |x|.$$

Para el segundo sumando hay que hacer algunas modificaciones en la fracción para obtener una integral inmediata

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4+(x-1)^2} &= \frac{x-1-1}{4+(x-1)^2} = \frac{x-1}{4+(x-1)^2} - \frac{1}{4+(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(x-1)}{4+(x-1)^2} - \frac{1}{4\left(1+\frac{(x-1)^2}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(x-1)}{4+(x-1)^2} - \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(x-1)}{4+(x-1)^2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{4+(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{2(x-1)}{4+(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(4+(x-1)^2\right) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-1}{2}\right) \end{aligned}$$

y la integral pedida es sustituyendo

$$\int \frac{1}{x(x^2-2x+5)} dx = \frac{1}{5} \ln |x| - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \ln \left(4+(x-1)^2\right) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-1}{2}\right) \right) + k.$$

4. El polinomio $Q_m(x)$ tiene raíces complejas múltiples.

Se puede desarrollar un método similar a los anteriores, aunque en su lugar describiremos un método menos costoso desde el punto de vista de las operaciones realizadas, el llamado **método Hermite**, que consiste en descomponer en fracciones simples de una forma especial. Para ello supongamos que $Q_m(x)$ tiene p raíces reales r_k con multiplicidad m_k y q raíces complejas $\alpha_j + i\beta_j$, junto con sus conjugadas correspondientes, con multiplicidad n_j ; los sumandos propuestos para la descomposición son:

- Por cada raíz real r_k de $Q_m(x)$, independientemente de su multiplicidad, se incluye un solo factor de la forma: $\frac{A_k}{(x-r_k)}$.
- Por cada raíz compleja $\alpha_j + i\beta_j$ de $Q_m(x)$, independientemente de su multiplicidad, se incluye un solo factor de la forma: $\frac{B_j x + C_j}{(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2}$.
- Se construye el factor de Hermite $H(x)$, definido como la siguiente función racional

$$H(x) = \frac{R(x)}{(x-r_1)^{m_1-1} \cdots (x-r_p)^{m_p-1} \left((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right)^{n_1-1} \cdots \left((x-\alpha_q)^2 + \beta_q^2\right)^{n_q-1}}$$

donde $R(x)$ es un polinomio de grado una unidad menos que el grado del denominador. Notar que en el denominador se han incluido todos los factores que hay en el polinomio $Q_m(x)$, pero disminuyendo en una unidad la correspondiente multiplicidad.

La descomposición propuesta por el método de Hermite es de la forma:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \cdots + \frac{A_p}{(x-r_p)} + \frac{B_1x+C_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \frac{B_qx+C_q}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2} + H'(x).$$

donde se ha incluido la derivada del término de Hermite, $H'(x)$.

Si ahora integramos cada sumando:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int \frac{A_1 dx}{(x-r_1)} + \cdots + \int \frac{A_p dx}{(x-r_p)} + \int \frac{(B_1x+C_1)dx}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \int \frac{(B_qx+C_q)dx}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2} + \int H'(x) dx$$

obviamente se cumple

$$\int H'(x) dx = H(x)$$

el resto de sumandos se obtiene como en el caso anterior y la primitiva sería

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int \frac{A_1 dx}{(x-r_1)} + \cdots + \int \frac{A_p dx}{(x-r_p)} + \int \frac{(B_1x+C_1)dx}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \int \frac{(B_qx+C_q)dx}{(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2} + H(x)$$

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la siguiente primitiva:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} dx.$$

El denominador tiene una raíz real simple en $r_1 = 1$ y una pareja de raíces complejas conjugadas $\alpha_1 + i\beta_1 = 0 + 3i$, que son dobles. La descomposición en fracciones simples usando Hermite es

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + H'(x)$$

donde el factor de Hermite se define como

$$H(x) = \frac{Dx+E}{x^2+9}.$$

y su derivada

$$H'(x) = \frac{D(x^2+9) - 2x(Dx+E)}{(x^2+9)^2},$$

que es la fracción que hay que usar en la descomposición de la función.

El cálculo de los coeficientes A, B, C, D y E se hace en la forma usual: se suman las fracciones usando el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + \frac{D(x^2+9) - (Dx+E)2x}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{A(x^2+9)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+9) + (D(x^2+9) - (Dx+E)2x)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)^2} \\ &= \frac{Ax^4 - Dx^3 + (D - 2E + 18A + B)x^2 + x(9D + 2E - B + C) + (81A - 9D - C)}{(x-1)(x^2+9)^2} \end{aligned}$$

y después se identifican los numeradores:

$$1 = A(x^2 + 9)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 9) + (D(x^2 + 9) - (Dx + E)2x)(x - 1)$$

$$1 = (A + B)x^4 + (C - B - D)x^3 +$$

$$(18A + 9B - C + D - 2E)x^2 +$$

$$(9C - 9B + 9D + 2E)x +$$

$$(81A - 9C - 9D)$$

Igualando coeficientes del mismo grado en ambos lados de la igualdad obtenemos el siguiente sistema:

$$0 = A + B$$

$$0 = C - B - D$$

$$0 = 18A + 9B - C + D - 2E$$

$$0 = 9C - 9B + 9D + 2E$$

$$1 = 81A - 9C - 9D$$

cuya solución es:

$$A = \frac{1}{100} \quad B = -\frac{1}{100} \quad C = -\frac{7}{450} \quad D = -\frac{1}{180} \quad E = \frac{1}{20}$$

Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} dx &= \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + H'(x) \right) dx \\ &= A \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+9} dx + H(x). \end{aligned}$$

La primera integral es inmediata

$$A \int \frac{1}{x-1} dx = A \ln|x-1|$$

la segunda es del tipo que hemos resuelto en el apartado anterior con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$

$$\int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+9) + \frac{C}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

de forma que

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} dx = A \ln|x-1| + \frac{B}{2} \ln(x^2+9) + \frac{C}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{Dx+E}{(x^2+9)}$$

es decir

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)^2} dx = \frac{1}{100} \ln|x-1| - \frac{1}{200} \ln(x^2+9) - \frac{7}{1350} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{180} \frac{x-9}{x^2+9} + k.$$

1.2.4. Integrales de tipo trigonométrico

En esta sección vamos a calcular primitivas de funciones que incluyan las funciones trigonométricas reales.

1. Integrales del tipo

$$\int R(\cos x, \operatorname{sen} x) dx$$

donde $R(x, y)$ es una función racional en las variables x, y , es decir

$$R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$$

a) *Caso general:* En el caso general se realiza el cambio de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

de este modo

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{(1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right))}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

mientras que

$$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x} dx$$

hacemos el cambio propuesto

$$\int \frac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{t^2 + 4t + 1} dt$$

que es una integral racional con

$$t^2 + 4t + 1 = (t - \alpha)(t - \beta)$$

donde $\alpha = -2 + \sqrt{3}$ y $\beta = -2 - \sqrt{3}$. De forma que

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{t^2 + 4t + 1} dt &= \int \left(\frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \beta} \right) dt \\ &= A \int \frac{1}{t - \alpha} dt + B \int \frac{1}{t - \beta} dt \\ &= A \ln|t - \alpha| + B \ln|t - \beta| \end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores para A y B

$$\frac{2}{t^2 + 4t + 1} = \frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \beta} = \frac{A(t - \beta) + B(t - \alpha)}{(t - \alpha)(t - \beta)}$$

y deducimos A y B dando valores $t = \alpha$ y $t = \beta$

$$2 = A(\alpha - \beta) \Rightarrow A = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{2}{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$2 = B(\beta - \alpha) \Rightarrow B = \frac{2}{\beta - \alpha} = \frac{2}{(-2 - \sqrt{3}) - (-2 + \sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

y sustituyendo estos valores

$$\int \frac{2}{t^2 + 4t + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |t - \alpha| - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |t - \beta| = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \alpha}{t - \beta} \right|$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) + 2 - \sqrt{3}}{\tan(x/2) + 2 + \sqrt{3}} \right| + k$$

o también

$$\int \frac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x/2) + (2 - \sqrt{3}) \cos(x/2)}{\operatorname{sen}(x/2) + (2 + \sqrt{3}) \cos(x/2)} \right| + k$$

Vemos a continuación otro ejemplo con el coseno, calculando la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{1 + 2 \cos x} dx$$

haciendo el cambio propuesto

$$\int \frac{1}{1 + 2 \cos t} dx = \int \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{3-t^2} dt = - \int \frac{2}{t^2-3} dt$$

que es una integral racional con

$$t^2 - 3 = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$$

De forma que

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{t^2 - 3} dt &= \int \left(\frac{A}{t - \sqrt{3}} + \frac{B}{t + \sqrt{3}} \right) dt \\ &= A \int \frac{1}{t - \sqrt{3}} dt + B \int \frac{1}{t + \sqrt{3}} dt \\ &= A \ln |t - \sqrt{3}| + B \ln |t + \sqrt{3}| \end{aligned}$$

Calculamos ahora los valores para A y B

$$\frac{2}{t^2 - 3} = \frac{A}{t - \sqrt{3}} + \frac{B}{t + \sqrt{3}} = \frac{A(t + \sqrt{3}) + B(t - \sqrt{3})}{(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})}$$

y deducimos A y B dando valores $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$

$$2 = A(2\sqrt{3}) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2 = -2B(\sqrt{3}) \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y la integral pedida es

$$\int \frac{2}{3-t^2} dt = -\int \frac{2}{t^2-3} dt = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln|t-\sqrt{3}| - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|t+\sqrt{3}|\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \right|$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \frac{1}{1+2\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) + \sqrt{3}}{\tan(x/2) - \sqrt{3}} \right| + k$$

o también

$$\int \frac{1}{1+2\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(x/2) + \sqrt{3} \cos(x/2)}{\operatorname{sen}(x/2) - \sqrt{3} \cos(x/2)} \right| + k$$

b) *Caso particular I:* La función racional es par en x, y , es decir $R(x, y)$ cumple

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \tan x$$

de este modo

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

mientras que

$$dt = (1 + \tan^2(x)) dx = (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$$

podemos comprobar que es par

$$R(-\cos x, -\operatorname{sen} x) = \frac{(-\cos x)^2}{1 + (-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

y podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} dt$$

Se consigue una integral racional con dos raíces complejas simples en el denominador, por tanto podemos realizar la descomposición

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} &= \frac{At + B}{2t^2 + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} \\ \frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} &= \frac{(At + B)(t^2 + 1) + (Ct + D)(2t^2 + 1)}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} &= \frac{(A + 2C)t^3 + (B + 2D)t^2 + (A + C)t + (B + D)}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)}\end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores para A y B igualando los coeficientes de los numeradores

$$A + 2C = 0$$

$$B + 2D = 0$$

$$A + C = 0$$

$$B + D = 1$$

que tiene por solución

$$A = 0 \quad B = 2 \quad C = 0 \quad D = -1$$

Sustituimos estos valores en la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} = \frac{2}{2t^2 + 1} - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{2}} - \frac{1}{1 + t^2}$$

y la integral es inmediata

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1)} dt &= \int \left(\frac{2}{1 + 2t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \int \frac{2}{1 + (\sqrt{2}t)^2} dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \sqrt{2} \arctan \sqrt{2}t - \arctan t + k\end{aligned}$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \arctan (\sqrt{2} \tan x) - x + k.$$

c) *Caso particular II:* La función racional es impar en x , es decir $R(x, y)$ cumple

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \sin x$$

de este modo

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$$

mientras que

$$dt = (\cos x) dx = \sqrt{1 - t^2} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$$

podemos comprobar que

$$R(-\cos x, \operatorname{sen} x) = \frac{-\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt$$

que es una integral inmediata con

$$\int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + k$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \arctan(\operatorname{sen} x) + k$$

d) *Caso particular III*: La función racional es impar en y , es decir la función $R(x, y)$ cumple

$$R(\cos x, -\operatorname{sen} x) = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

En este caso se aconseja el cambio

$$t = \cos x$$

de este modo

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$$

mientras que

$$dt = -\operatorname{sen}(x) dx = -\sqrt{1 - t^2} dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} dx$$

podemos comprobar que

$$R(\cos x, -\operatorname{sen} x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} = -R(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

luego podemos aplicar el cambio propuesto

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} dx = \int \frac{-1}{t + t^2} dt = -\int \frac{1}{t(1 + t)} dt$$

que es una integral racional con

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)}$$

con

$$A(t+1) + Bt = 1 \Leftrightarrow (A+B)t + A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

de donde

$$\int \frac{-1}{t+t^2} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t+1} dt = -\ln|t| + \ln|t+1| = \ln \frac{|t+1|}{|t|} + k$$

deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} dx = \ln \frac{|1 + \cos x|}{|\cos x|} + k$$

2. Integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$$

distinguiremos según los valores de m y n .

a) Caso m impar.

Si m es impar, entonces es de la forma $m = 2p+1$, en este caso se hace el cambio $t = \cos(x)$ y $dt = -\operatorname{sen}(x) dx$, de modo que

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx &= \int \operatorname{sen}^{2p+1}(x) \cos^n(x) dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^p \cos^n(x) \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x))^p \cos^n(x) \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

y con el cambio propuesto

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx = -\int (1-t^2)^p t^n dt$$

que es inmediata.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - t^2) t^2 dt \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + k \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

b) *Caso n impar*

Si n es impar, entonces será de la forma $n = 2p + 1$, en este caso se hace el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$ y $dt = \cos(x) dx$, de modo que

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx &= \int \operatorname{sen}^m(x) \cos^{2p+1}(x) dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m(x) (\cos^2(x))^p \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^p \cos x dx \end{aligned}$$

y con el cambio obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt$$

que es inmediata.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx \\ &= \int t^4 (1 - t^2) dt \\ &= \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + k \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + k$$

c) *Caso m y n pares*

Si tanto m como n son números pares, entonces $n = 2p$ y $m = 2q$ y en este caso se hacen los cambios trigonométricos

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

con eso se consigue dividir el exponente a la mitad.

Por ejemplo

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$$

en este caso

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2x$$

podemos utilizar de nuevo el cambio trigonométrico para el término $\cos^2 2x$ y poner

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$$

e integrando

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos}^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \int \frac{1}{8} dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x. \end{aligned}$$

3. Integrales del tipo

$$\int f(x) g(x) dx$$

donde

$$f(x), g(x) \in \{\operatorname{sen} Ax, \operatorname{cos} Bx\} \text{ con } A, B \in \mathbb{R}$$

Para este tipo de integrales se utilizan las siguientes relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} Ax \operatorname{cos} Bx &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} (A - B)x + \operatorname{sen} (A + B)x) \\ \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx &= \frac{1}{2} (\operatorname{cos} (A - B)x - \operatorname{cos} (A + B)x) \\ \operatorname{cos} Ax \operatorname{cos} Bx &= \frac{1}{2} (\operatorname{cos} (A - B)x + \operatorname{cos} (A + B)x) \end{aligned}$$

Por ejemplo, vamos a calcular la siguiente integral

$$\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{cos} 4x dx$$

usando las relaciones trigonométricas anteriores con $A = 3$ y $B = 4$, con $A - B = 3 - 4 = -1$ y $A + B = 3 + 4 = 7$

$$\operatorname{sen} 3x \operatorname{cos} 4x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} (-x) + \operatorname{sen} (7x)) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x)$$

e integrando

$$\begin{aligned} \int (\sen 3x \cos 4x) dx &= \frac{1}{2} \int (\sen 7x - \sen x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x \right) \\ &= \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 7x}{14}. \end{aligned}$$

1.2.5. Integrales de funciones irracionales algebraicas

Son integrales del tipo

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_2/n_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_r/n_r} \right) dx$$

donde $R(x, y_1, y_2, \dots, y_r)$ es una expresión racional, $\frac{m_k}{n_k} \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

En este caso debemos hacer el cambio de variable

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^M$$

donde

$$M = m.c.m(n_1, \dots, n_r)$$

Por ejemplo vamos a calcular

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

En este caso tendremos sólo tenemos un término

$$\sqrt{x} = \left(\frac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1} \right)^{1/2}$$

y por tanto hacemos el cambio

$$x = t^2 \Rightarrow \sqrt{x} = t$$

de donde

$$dx = 2tdt$$

y la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} \\ &= \int \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2 \arctan t + k \\ &= 2 \arctan \sqrt{x} + k \end{aligned}$$

Si queremos calcular

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx = \int \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1/2} dx$$

en este caso

$$\frac{x}{1+x} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

de donde

$$x = t^2(1+x) \Leftrightarrow x = t^2 + t^2x \Leftrightarrow x(1-t^2) = t^2 \Leftrightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

y por tanto

$$dx = \frac{2t(1-t^2) + 2t^3}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t}{(1-t)^2(1+t)^2} dt$$

y por tanto

$$\int \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1/2} dx = \int \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt$$

que es una integral racional cuyo denominador tiene dos raíces reales dobles en 1 y -1

$$\begin{aligned} \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} \\ &= \frac{A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2} \\ &= \frac{(C-A)t^3 + (B-A-C+D)t^2 + (A+2B-C-2D)t + (A+B+C+D)}{(1-t)^2(1+t)^2} \end{aligned}$$

de donde

$$C - A = 0$$

$$(B - A - C + D) = 2$$

$$(A + 2B - C - 2D) = 0$$

$$(A + B + C + D) = 0$$

igualando polinomios y evaluando en las raíces podemos obtener dos valores rápidamente

$$2t^2 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2$$

para $t = 1$

$$2 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

para $t = -1$

$$2 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

de forma que el sistema sería

$$C - A = 0$$

$$-A - C = 1$$

con solución

$$A = C = -\frac{1}{2}$$

la descomposición es

$$\begin{aligned} \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

e integrando término a término

$$\int \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

que son todas inmediatas

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt &= \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \ln |t+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + k \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} - \frac{t}{t^2-1} + k \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$\int \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{x}{1+x}} + 1} - \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}}}{\frac{x}{1+x} - 1} + k.$$

1.2.6. Integrales de funciones radicales I

Son integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

donde $R(x, y)$ es una expresión racional, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Para calcular la primitiva de este tipo de funciones debemos completar el cuadrado de forma que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \right) \\ \Rightarrow \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \int \sqrt{a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right)} dx \end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces podemos hacer el cambio

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = u^2 \Rightarrow \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = u \Rightarrow \sqrt{a} dx = du$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{\left(u^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \right)} du$$

Según el signo de $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$ tendremos dos casos en función de su signo. Si $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) > 0$, entonces podemos poner $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = \lambda^2$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, de forma que la integral se transforma en

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + cx} = \int \sqrt{u^2 + \lambda^2} du$$

por el contrario si $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) < 0$, entonces podemos poner $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = -\lambda^2$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, de forma que la integral se transforma en

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + cx} = \int \sqrt{u^2 - \lambda^2} du$$

Si $a < 0$ entonces, puesto que $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0$, podemos hacer el cambio

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = -u^2 \Rightarrow -a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = u^2$$

de donde

$$\sqrt{-a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = u \Rightarrow \sqrt{-a} dx = du$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{\left(-u^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \right)} du$$

en este caso la única opción posible es que $\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) > 0$ o de lo contrario el radicando es negativo y la función no estaría definida en ningún punto, así que podemos poner $\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = \lambda^2$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, y obtendremos una integral de la forma

$$\int \sqrt{\lambda^2 - u^2} du$$

Para cada uno de los tipos de integrales se propone un cambio de variable distinto

$$\text{Tipo 1} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \int \sqrt{u^2 + \lambda^2} du \quad u = \lambda \operatorname{Sh} t$$

$$\text{Tipo 2} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \int \sqrt{u^2 - \lambda^2} du \quad u = \lambda \operatorname{Ch} t$$

$$\text{Tipo 3} \quad a < 0 \Rightarrow \int \sqrt{\lambda^2 - u^2} du \quad \begin{cases} u = \lambda \cos t \\ 0 \\ u = \lambda \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Otra alternativa a este método es utilizar los llamados cambios de Euler:

	Condición	Cambio
$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \Rightarrow$	$a > 0$	$\pm\sqrt{ax} + t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
	$c > 0$	$tx \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
	α raíz del polinomio	$t(x - \alpha) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Ejemplo 1.4 *Calcula las siguientes integrales*

$$a) \int \sqrt{4 - x^2} dx \quad b) \int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx \quad c) \int \sqrt{1 + x - x^2} dx$$

Solución:

a) El integrando es del Tipo 3 con $\lambda = 4$, así que hacemos el cambio

$$x = 2 \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$$

de modo que

$$x^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t$$

y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t} \cdot 2 \cos t dt \\ &= \int \sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 t)} 2 \cos t dt \\ &= \int 2\sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)} 2 \cos t dt \\ &= \int 4\sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \int 4 \cos^2 t dt \end{aligned}$$

y se transforma en una integral trigonométrica. Hacemos el cambio trigonométrico

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

para obtener

$$\int 4 \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + k$$

b) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx = \int \sqrt{4 - (x - 1)^2} dx$$

que se resuelve como en el apartado anterior, aunque en este caso el cambio debe ser

$$(x - 1) = 2 \cos t.$$

c) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$1 + x - x^2 = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \sqrt{1 + x - x^2} dx = \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx$$

y en este caso el cambio de variable que hay que realizar es

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t.$$

1.2.7. Integrales de funciones radicales II

Son integrales del tipo

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio con coeficientes reales. Para el caso en el que $P_n(x) = A$ sea un polinomio constante, se utilizarán los cambios realizados en el apartado anterior o bien completando el cuadrado, que conducen a integrales del tipo

$$\text{Tipo 1} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \lambda^2 = \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{A}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} du \quad u = \lambda \operatorname{Sh} t$$

$$\text{Tipo 2} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{A}{\sqrt{u^2 - \lambda^2}} du \quad u = \lambda \operatorname{Ch} t$$

$$\text{Tipo 3} \quad a < 0 \Rightarrow \int \frac{A}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}} du \quad \begin{cases} u = \lambda \cos t \\ 0 \\ u = \lambda \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Para otro tipo de polinomios se utiliza el llamado método Alemán que consiste en descomponer la integral de la forma

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = P_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{L}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

siendo $P_{n-1}(x)$ un polinomio de grado menor que $P_n(x)$ y $L \in \mathbb{R}$. Los coeficientes del polinomio se obtienen derivando la ecuación anterior e igualando.

Ejemplo 1.5 *Calcula las siguientes integrales*

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx \quad b) \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx \quad a) \int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$$

Solución:

a) Hacemos el cambio

$$x = \sqrt{3} \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos t dt$$

de modo que

$$x^2 = 3 \operatorname{sen}^2 t$$

2

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3-3\operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{3} \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{3} \cos t dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{3} \cos t} \sqrt{3} \cos t dt \\ &= \int 1 dt = t \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{3}}$$

b) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx$$

que se resuelve como en el apartado anterior, aunque en este caso el cambio debe ser

$$(x - 1) = 2 \cos t.$$

c) Primero hay que transformar la ecuación de segundo grado para completar el cuadrado de una suma:

$$1 + x - x^2 = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

y la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx$$

y en este caso el cambio de variable que hay que realizar es

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t.$$

Ejemplo 1.6 *Calcula la siguiente integral*

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

Solución: Como el numerador no es un polinomio constante, utilizaremos el método Alemán

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = P_{n-1}(x) \sqrt{-x^2-2x+1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

Como el numerador de la integral es un polinomio de grado 1, el polinomio $P_{n-1}(x)$ debe ser un polinomio de grado 0, es decir, una constante $P_{n-1}(x) = A$, por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = A\sqrt{-x^2-2x+1} + \int \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

Derivando la expresión anterior obtendremos los coeficientes A y L

$$\frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} = -A \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} + \frac{L}{\sqrt{-x^2-2x+1}} = \frac{-Ax - A + L}{\sqrt{-x^2-2x+1}}$$

e igualando coeficientes

$$\left. \begin{array}{l} 3 = -A \\ 1 = -A + L \end{array} \right\} \Rightarrow A = -3 \text{ y } L = -2$$

por tanto

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

La integral

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx$$

se calcula mediante un cambio de variable. Completamos el cuadrado de la suma

$$-x^2 - 2x + 1 = 2 - (x+1)^2$$

por tanto

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{2-(x+1)^2}} dx$$

Hacemos el cambio

$$(x+1)^2 = 2 \operatorname{sen}^2 t \iff (x+1) = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \implies dx = \sqrt{2} \cos t dt$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{2-(x+1)^2}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2 t}} dt = \int \frac{2}{\sqrt{2(1-\operatorname{sen}^2 t)}} \sqrt{2} \cos t dt \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 t)}} \cos t dt = \int \frac{2}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt \\ &= \int 2 dt = 2t = 2 \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

De modo que la integral es

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} dx = -3\sqrt{-x^2-2x+1} - 2 \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

1.2.8. Integrales binómicas

Son integrales de la forma

$$\int x^p (a + bx^r)^q dx \quad a, b \in \mathbb{R}; p, q, r \in \mathbb{Q}.$$

Primero se propone la solución de las llamadas integrales binómicas o binomias de tipo I, para las que $a = b = 1$ y $r = 1$, es decir son integrales de la forma

$$\int x^p (1 + x)^q dx; p, q \in \mathbb{Q}$$

para las que distinguimos 3 casos:

Tipo 1 $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Se desarrolla usando el binomio de Newton: $(1 + x)^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} x^k$

Tipo 2 $\begin{cases} q = \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z} \\ p \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Se hace el cambio $(1 + x) = t^n$

Tipo 3 $\begin{cases} q = \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z} \\ p \notin \mathbb{Z} \\ p + q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Multiplicar y dividir por el factor x^q y después hacer el cambio $\left(\frac{1+x}{x}\right) = t^n$

Para las integrales binomias de tipo general se hace el cambio

$$bx^r = at \Rightarrow x^r = \frac{a}{b}t \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}} \Rightarrow dx = \frac{1}{r} \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int x^p (a + bx^r)^q dx &= \int \left(\left(\frac{a}{b}t\right)^{1/r}\right)^p (a + at)^q \frac{1}{r} \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{r}-1} dt \\ &= \int \frac{a^{p/r}}{b^{p/r}} t^{p/r} a^q (1+t)^q \frac{1}{r} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{1}{r}-1} dt \\ &= \int \frac{1}{r} a^{\frac{(q-1)r+p+1}{r}} b^{\frac{r-p-1}{r}} t^{\frac{p+1-r}{r}} (1+t)^q dt \\ &= \frac{1}{r} a^{\frac{(q-1)r+p+1}{r}} b^{\frac{r-p-1}{r}} \int t^{\frac{p+1-r}{r}} (1+t)^q dt \end{aligned}$$

y renombramos las variables como

$$\alpha = \frac{p+1-r}{r}$$

$$\beta = q$$

el integrando será de la forma

$$\int t^\alpha (1+t)^\beta dt$$

que es una integral de tipo I.

Ejemplo 1.7 *Calcula la integral binómica*

$$\int x \left(2 + x^{2/3}\right)^{1/2} dx$$

En primer lugar, la transformamos en una binómica de tipo I, haciendo el cambio

$$x^{2/3} = 2t \Rightarrow x = (2t)^{3/2} = 2\sqrt{2}t^{3/2} \Rightarrow dx = 3\sqrt{2}t^{1/2}dt$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int x \left(2 + x^{2/3}\right)^{1/2} dx &= \int 2\sqrt{2}t^{3/2} (2 + 2t)^{1/2} 3\sqrt{2}t^{1/2}dt \\ &= 12\sqrt{2} \int t^2 (1 + t)^{1/2} dt \end{aligned}$$

como la potencia de t es un entero, entonces haremos el cambio

$$1 + t = u^2 \Rightarrow t = u^2 - 1 \Rightarrow dt = 2udu$$

y sustituyendo

$$24\sqrt{2} \int (u^2 - 1)^2 u^2 du$$

que es inmediata

$$24\sqrt{2} \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du = 24\sqrt{2} \left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right)$$

deshaciendo el segundo cambio

$$24\sqrt{2} \left(\frac{(1+t)^{7/2}}{7} - \frac{2(1+t)^{5/2}}{5} + \frac{(1+t)^{3/2}}{3} \right)$$

y finalmente el primero $\frac{1}{2}x^{2/3} = t$

$$\begin{aligned} &24\sqrt{2} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{7/2}}{7} - \frac{2\left(1 + \frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{5/2}}{5} + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^{2/3}\right)^{3/2}}{3} \right) \\ &24\sqrt{2} \left(\frac{\left(2 + x^{2/3}\right)^{7/2}}{2^{7/2}7} - \frac{2\left(2 + x^{2/3}\right)^{5/2}}{2^{5/2}5} + \frac{\left(2 + x^{2/3}\right)^{3/2}}{2^{3/2}3} \right) \\ &\left(\frac{3\left(2 + x^{2/3}\right)^{7/2}}{7} - \frac{12\left(2 + x^{2/3}\right)^{5/2}}{5} + 4\left(2 + x^{2/3}\right)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8 *Calcula la integral binómica*

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$$

Se trata de una integral que podemos expresar como

$$\int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx$$

En primer lugar, la transformamos en una binómica de tipo I, haciendo el cambio

$$x^2 = t \Rightarrow x = t^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx &= \int (t^{1/2})^{-4} (1+t)^{-1/2} \frac{1}{2}t^{-1/2}dt \\ &= \int t^{-5/2} (1+t)^{-1/2} dt, \end{aligned}$$

se comprueba que ni la potencia de t , ni la potencia de $1+t$ son números enteros, sin embargo, la suma de estos exponentes

$$-\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

si es un número entero, así que multiplicamos y dividimos por $t^\beta = t^{-1/2}$

$$\int t^{-5/2} (1+t)^{-1/2} dt = \int t^{-5/2} (1+t)^{-1/2} \frac{t^{-1/2}}{t^{-1/2}} dt$$

y reagrupamos

$$\int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/2} dt$$

finalmente hacemos el cambio

$$\frac{1+t}{t} = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

$$1+t = u^2 \Rightarrow 1 = t(u^2 - 1) \Rightarrow t = \frac{1}{u^2 - 1} \Rightarrow dt = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du$$

con lo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/2} dt &= \int \left(\frac{1}{u^2 - 1} \right)^{-3} (u^2)^{-1/2} \left(\frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} \right) du \\ &= \int (u^2 - 1)^3 u^{-1} \left(\frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} \right) du \\ &= - \int (u^2 - 1) du \end{aligned}$$

que es inmediata

$$- \int (u^2 - 1) du = -\frac{u^3}{3} + u$$

deshaciendo el segundo cambio

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{3/2} + \left(\frac{1+t}{t} \right)^{1/2}$$

y finalmente el primero $x^2 = t$

$$\int x \left(2 + x^{2/3} \right)^{1/2} dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right)^{3/2} + \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right)^{1/2} + C$$

Ejercicio 1.2 *Calcula las siguientes integrales*

$$a) \int x^3 \sqrt{2x^2 + 1} dx \quad b) \int \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^5}} dx$$

$$c) \int \frac{1}{x^4 \sqrt{1+x^2}} dx \quad d) \int x^3 (1 + 2x^2)^{-3/2} dx$$