

1. Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$\begin{array}{llll}
 a) f(t) = \sin(3t) & b) f(t) = e^{5t} & c) f(t) = e^{5t} \cos(3t) & d) f(t) = te^t \\
 e) f(t) = t^3 - t & f) f(t) = \sinh t & g) f(t) = \cos t \sin t & h) f(t) = e^t \cos t \sin 2t
 \end{array}$$

2. (*) Una función $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es periódica con periodo $a > 0$, o a -periódica si para cada $t \geq 0$, se tiene que $f(t) = f(t+a)$. Comprueba que en caso de existir la transformada de Laplace de $f(t)$, se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-az}} \int_0^a e^{-zt} f(t) dt$$

Usa el resultado anterior para calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida en $[0, 2]$ por

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ 2 - t & t \in [1, 2] \end{cases}$$

3. (*) Calcula la transformada de Laplace de la función escalonada

$$f(t) = \begin{cases} \pi & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

extendida a todo $[0, \infty)$ como 2-periódica.

4. (*) Sea la función $E(t)$ que a cada número $t \geq 0$, le asigna su parte entera, es decir, $E(t)$ es un número natural de forma que

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

Calcula la transformada de Laplace de $E(t)$.

5. Calcula la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

6. Dada la función

$$f(t) = \int_0^t e^{-s} \operatorname{sen}(s) ds \quad t \geq 0$$

Calcula $\mathcal{L}[f(t)](z)$. Calcula $\mathcal{L}[g(t)](z)$ siendo $g(t) = t \cdot f(t)$.

7. Calcula la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$a) f(t) = |\operatorname{sen} t| \quad b) f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases} \quad c) f(t) = \begin{cases} t^2 - 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

8. Calcula la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$a) F(z) = \frac{z^2}{1+z^3}$$

$$b) F(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2-2)}$$

$$c) F(z) = \frac{z+1}{z^4}$$

$$d) G(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^3-1)}$$

$$e) F(z) = \frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$f) F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

$$g) F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$$

$$h) F(z) = \frac{e^{-z}}{z} + \frac{z-1}{z^2+2}$$

9. Calcula la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$a) F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5}$$

$$b) F(z) = \frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2}$$

$$c) F(z) = \frac{z+1}{e^z z^2 (z^2+9)}$$

$$d) F(z) = \frac{e^{-az}}{1+z^2} \quad a > 0$$

10. Utiliza la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (problemas de valor inicial):

$$a) \left. \begin{aligned} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) &= 1 \\ y(0) = y'(0) &= 1, \quad y''(0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= e^{-2t} \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= 5h_4(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$d) \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$e) \left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) &= \phi(t), \quad \text{con } \phi(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$f) \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \operatorname{sen} t \\ y(0) = y'(0) &= -1 \end{aligned} \right\}$$

11. Usa la transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\left. \begin{aligned} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) &= 0 \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = y_2'(0) = 0$.

12. Obtén la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) &= 3 \operatorname{sen} t + 5 \cos t \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) &= \operatorname{sen} t + \cos t \end{aligned} \right\}$$

para las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

13. Resuelve el problema $y''(t) + y'(t) = f(t)$ con valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, siendo $f(t)$ la función definida a trozos

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

14. Resuelve la ecuación diferencial $y''(t) + y(t) = f(t)$ con condiciones iniciales nulas $y(0) = y'(0) = 0$ y la función definida a trozos

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ -1 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

15. Resuelve con transformada de Laplace la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ y

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{para } t \geq 1. \end{cases}$$

16. Resuelve el problema $y'' + 2y' + 5y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y la función

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & t \in [0, \pi], \\ 0 & t > \pi. \end{cases}$$

17. Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) + 2y(t) + 1 + 2 \int_0^t y(x) dx = f(t)$$

con la condición inicial $y(0) = 2$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & t > 2. \end{cases}$$

18. Resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

(*) Ejercicios con dificultad especial.

©Silvestre Paredes Hernández[®]