industriales
etsii UPCT

Curso 2016/2017
Grado en Ingeniería Eléctrica
Matemáticas II - Problemas
Series de potencias. Series de Laurent

1. Encuentra el radio de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right) z^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$

2. Desarrolla las siguientes funciones en series de Taylor en los puntos correspondientes y calcula el radio de convergencia de la serie obtenida.

a) $f(z) = \operatorname{sen}(2z+1)$ en $z_0 = -1$.

b) $f(z) = \cos z$ en $z_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{3z+1}$ en $z_0 = -2$.

d) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+i}$ en $z_0 = 0$.

e) $f(z) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{z}{2}\right)$ en $z_0 = 0$.

3. (*) Dada la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, calcula el valor de $f^{(20)}(1)$.

4. Determina la región de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}$ d) $\displaystyle\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

5. Desarrolla en series de Laurent en un entorno de $z_0 = 0$ las siguientes funciones:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} \qquad \text{b)} \frac{e^z}{z^3} \qquad \text{c) } z^4 \cos\frac{1}{z} \qquad \text{d) } \frac{1-e^{-z}}{z^3} \qquad \text{e)} \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

6. Desarrolla las siguientes funciones en series de Laurent en la región considerada

$$\text{a) } \frac{1}{z^2+z} \text{ en } 0 < |z| < 1 \qquad \text{b) } \frac{1}{z^2+z} \text{ en } 1 < |z| < \infty$$

$$\text{c) } \frac{2z+3}{z^2+3z+2} \text{ en } 1 < |z| < 2 \quad \text{d) } \frac{1}{(z^2-4)^2} \text{ en } 4 < |z+2| < \infty$$

7. Para la función
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

   a) Determina su serie de McLaurin, describiendo la región de validez de tal representación.
   b) Determina su u serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

8. Calcula la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z-2}$ en los recintos:

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$

9. Determina la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$, alrededor de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = 1$ y $z_0 = i$.

10. Calcula la serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos que se indican:

$$\text{a) } z^2 e^{1/z}, \quad z_0 = 0 \qquad \text{b) } e^{1/(1-z)}, \quad z_0 = 1$$

$$\text{c) } z\operatorname{sen}(1/(z-1)), \quad z_0 = 1 \quad \text{d) } \cos(1/z), \quad z_0 = 0$$

$$\text{e) } \frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad z_0 = i$$

11. (*) Sea función $f(z) = L_\pi(z)$, ¿puede escribirse dicha función como una serie de Laurent en un cierto anillo alrededor del punto $z_0 = 0$? ¿Por qué?.

12. Determina y clasifica las singularidades de las funciones:

$$\text{a) } \frac{1}{z-z^3} \qquad \text{b) } \frac{z^4}{1+z^4} \qquad \text{c) } \frac{z^5}{(1-z)^2}$$

$$\text{d) } \frac{1}{z\,(z^2+4)^2} \qquad \text{e) } \frac{z^2+1}{e^z} \qquad \text{f) } \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$$

$$\text{g) } \frac{1}{z^3(2-\cos z)} \qquad \text{h) } e^{z-\frac{1}{z}} \qquad \text{i) } \frac{1}{\cos z + \cos a} \quad (a \in \mathbb{R})$$

13. Encuentra la transformada Z de las siguientes sucesiones, determinando su conjunto de convergencia:

a) $y_n = n + 1$ b) $y_n = (0, 1, 0, 1, \ldots,)$ c) $y_n = n^4$

d) $y_n = (0, 1, 1, 1, \ldots,)$ e) $y_n = 2^{2n}$ f) $y_n = 1 + 2^n$

g) $y_n = 1/2^n$ h) $y_n = n3^n$ i) $y_n = (0, 1, 0, 2, 0, \ldots, 0, 2^n)$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones homogéneas:

a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 0$ b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$

c) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ d) $y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = 0$

e) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 0$ f) $y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} - 2y_n = 0$

g) $y_{n+2} + \lambda^2 y_n = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ h) $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$

i) $y_{n+4} + y_{n+2} - 2y_n = 0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones no homogéneas:

a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 2^n$ b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 2$

c) $y_{n+2} + y_n = n^2$ d) $y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = n2^n$

e) $y_{n+2} + 4y_n = n\,(-1)^n$ f) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 6y_n = 3^n + n$

g) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 1$ h) $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^3$

i) $y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} - 2y_n = (-1)^n$

16. Resuelve los siguientes problemas de condiciones iniciales, estudiando su estabilidad:

a) $\begin{cases} y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^2 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 0 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 1 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = n \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} - 2y_n = 2^n \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y_{n+2} + y_n = n + 2 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = 0 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y_{n+2} + y_n = n \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

(*) Ejercicios con dificultad especial.