Curso 2016/2017
Grado en Ingeniería Eléctrica
Matemáticas II - Problemas
El Cuerpo de los números complejos

1. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

$$\text{a) } z_1 + z_2 \quad \text{b) } 3z_1 - 2z_2 \quad \text{c) } z_1 z_2 \quad \text{d) } (z_2)^{-1} \quad \text{e) } \frac{z_1}{z_2}$$

2. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1 + i)(x + iy) = i$.

3. Calcula el módulo de los números complejos:

$$\text{a) } 3 + 4i \qquad \text{b) } \tfrac{1+i}{1-i} \qquad \text{c) } i^7 + i^{10} \qquad \text{d) } 1 + i + i^2$$

4. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$ b) $-3i$ c) -1 d) 3 e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

f) $-3 + i\sqrt{3}$ g) $\frac{1+i}{1-i}$ h) $i^7 + i^{10}$ i) $3 + 3i$ j) $1 + i + i^2$

5. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1 + i)^3$ b) $\frac{2+3\,i}{3-4\,i}$ c) $i^5 + i^{16}$ d) $1 + i + i^2 + i^3$

e) $\frac{1}{i}$ f) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ g) $2_{\pi/2}$ h) $1_{\pi/4}$

i) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ j) $(2 + 2i)^2$ k) $(2 - 2i)^2$ l) $(2 + 2i)(2 - 2i)$

m) $e^{-i\pi/2}$ n) $2e^{-i\pi}$ ñ) $3e^{-i\pi/2}$ o) $2e^{-i\pi/4}$

p) $i + 3e^{i2\pi}$ q) $e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}$ r) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$ s) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

6. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $\|z\| = 1$	b) $\|z\| \leq 1$	c) $z + \overline{z} \leq 1$
d) $z - \overline{z} = i$	e) $\operatorname{Im}(z) < 0$	f)$\|\operatorname{Re}(z)\| < 1$
g) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = z\overline{z}$	h) $\|z\|^{-1} \geq 1,\ (z \neq 0)$	i) $\|z - 5i\| = 8$
j) $\operatorname{Im}(z^2) > 2$	k) $\operatorname{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$	l) $\operatorname{Re}(z^2 - z) = 0$
m) $\|z - 2\| = \|1 - 2\overline{z}\|$	n) $2 < \|z\| < 3$	ñ) $\left\|\dfrac{z-1}{z+1}\right\| \leq 1$
o) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$	p) $z + \overline{z} \geq \|z\|^2$	

7. Comprueba que para cada par $z, w \in \mathbb{C}$ se verifican las relaciones siguientes:

   a) $|z - w| \geq ||z| - |w||$
   b) $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$
   c) $|1 - \overline{z} \cdot w|^2 - |z - w|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

   a) $(1+i)^{100}$ b) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{30}$ c) $\left(\sqrt{1-i}\right)^{10}$ d) $\dfrac{1}{(1-i)^5}$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

10. Calcula las siguientes raíces:

a)$\sqrt[3]{1}$	b) $\sqrt[3]{i}$	c) $\sqrt[6]{-8}$	d)$\sqrt[4]{-1}$
e) $\sqrt[8]{1}$	f) $\sqrt{1-i}$	g) $\sqrt{3+3i}$	h) $\sqrt[3]{-2+2i}$
i) $\sqrt[3]{-1+i}$	j) $\sqrt[4]{-8\left(1-\sqrt{3}i\right)}$	k) $\sqrt[4]{-81}$	l) $\sqrt[4]{1}$

11. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$:

    a) $z^2 + 1 = 0$ b) $z^3 + 2 = 0$ c) $z^5 + 64 = 0$ d) $(z^2+4)(z-1)^2 = 0$

12. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{C}$:

    a) $z^2 - (6+i)\,z + (7+9i) = 0$ b) $z^2 - 2\,(2-i)\,z + 3\,(1-2i) = 0$ c) $z^4 + 64 = 0$

13. Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{Re}\,(z) \neq 0$, entonces $|z| = 1 \iff \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z^{-1})$.

14. Sea $p(z) = a_n\, z^n + \cdots + a_1\, z + a_0$ un polinomio con coeficientes reales ($a_j \in \mathbb{R}$).

    a) Comprueba que para cada $z \in \mathbb{C}$, se cumple la igualdad $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.

    b) Usando el apartado anterior, prueba que si z_0 es solución compleja de $p\,(z) = 0$, entonces su conjugado $\overline{z}_0$ también es solución.

    c) Sabiendo que $z = i$ es una raíz del polinomio $p\,(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z - 2$, calcula todas sus raíces.

    d) Calcula todas las raíces del polinomio, $q(z) = z^4 - 2z^3 + 2\,z^2 - 2\,z + 1$.

15. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\text{a) } (1+i)^{2/3} \quad \text{b) } \left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/4}$$

16. ¿En qué vector se transformará el complejo $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?. ¿Qué ángulo se necesita para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Expresa en forma trigonométrica los números complejos siguientes

$$\text{a) } -\frac{1}{2}i \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{c)} \sqrt{3} \quad \text{d) } -i \quad \text{e) } -\frac{1}{2}$$

18. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\mathrm{sen}\,(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\mathrm{sen}\,(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\mathrm{sen}\,(4x)$?

19. Halla las cuatro raíces de $z^4 + 4 = 0$ y úsalas para factorizar $z^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

20. Siendo z, w dos números complejos distintos y $\dfrac{(z+w)\,i}{(z-w)} \in \mathbb{R}$. Encuentra la relación entre $|z|$ y $|w|$.

21. Encuentra los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

22. Resuelve: $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

23. Demuestra la identidad de Lagrange, para se verifica

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

24. (*) Resuelve las siguientes cuestiones:

    a) Demuestra que todo número complejo z distinto de 1, pero con módulo 1, se puede expresar como:

$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Sean z_1, z_2 y z_3 tres complejos con $|z_j| = 1$, tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Prueba que al menos uno debe ser igual a 1.

c) Encuentra 3 complejos z_1, z_2 y z_3 de módulo 1 que verifiquen:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$$

25. (*) Prueba que si z_1, z_2 y z_3 son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

entonces forman en el plano un triángulo equilátero.

(*) Ejercicios con dificultad especial.