Matemáticas II
Grado en Ingeniería Eléctrica
Convocatoria Junio 2016

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Observaciones

- No está permitido el uso de calculadora programable.
- Los cálculos deben ser **exactos** y los ángulos deben expresarse en **radianes**.
- **Todos los cálculos deben ser razonados adecuadamente**.
- Entregue la hoja del enunciado.
- Procure empezar cada problema en un folio nuevo.
- Puntuación: El examen está puntuado sobre 10 y supone el 80 % de la evaluación final en las condiciones descritas en la guía docente y en la convocatoria.

---

1. Dada la función
$$v(x,y) = -2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3.$$

 a) **(0.25 puntos)** Compruebe que v es armónica.
 b) **(1 punto)** Encuentre una función $u(x,y)$, para que la función definida por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea derivable en $\mathbb{C}$ y cumpla $f(1+i) = 4i$.
 c) **(0.25 puntos)** Exprese $f'(z)$ en forma binómica.

Solución:

a) Para que $v(x,y)$ sea una función armónica debe cumplir la ecuación de Laplace
$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1}$$
Derivando $v(x,y)$
$$\begin{aligned} v_x &= -4x + 12xy \Rightarrow v_{xx} = -4 + 12y \\ v_y &= 4y + 6x^2 - 6y^2 \Rightarrow v_{yy} = 4 - 12y \end{aligned}$$
comprobamos que efectivamente v cumple la ecuación 1:
$$\underbrace{(-4+12y)}_{u_{xx}} + \underbrace{(4-12y)}_{u_{yy}} = 0.$$

b) Para el cálculo de $u(x,y)$, la parte real de $f(x,y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:
$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Usando la primera ecuación (esta elección es indiferente para el resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x = 4y + 6x^2 - 6y^2,$$

Integramos respecto a x para obtener $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int u_x dx = \int \left(4y + 6x^2 - 6y^2\right) dx = 4xy + 2x^3 - 6y^2 x + \varphi(y),$$

siendo $\varphi(y)$ constante para y; para encontrar su expresión derivamos $u(x, y)$ respecto de y

$$u_y = 4x - 12yx + \varphi'(y),$$

y usamos la otra ecuación de Cauchy-Riemann

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow 4x - 12yx + \varphi'(y) = -(-4x + 12xy) \Leftrightarrow 4x - 12yx + \varphi'(y) = 4x - 12xy,$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(y) = 0,$$

e integrando respecto a y se obtiene

$$\varphi(y) = c \in \mathbb{R}.$$

La expresión para $u(x, y)$ será

$$u(x, y) = 4xy + 2x^3 - 6y^2 x + c,$$

y para la función $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ se obtiene:

$$f(x, y) = \left(4xy - 6y^2 x + 2x^3 + c\right) + i\left(-2x^2 + 2y^2 + 6x^2 y - 2y^3\right).$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x, y)$ como función de z de la forma (evaluando la expresión anterior en $(z, 0)$)

$$f(z) = 2z^3 - i2z^2 + c$$

Como $f(1 + i) = 4i \Leftrightarrow u(x, y) = 0$ y $v(x, y) = 4$

$$\begin{aligned} u(1, 1) &= 4 - 6 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0, \\ v(1, 1) &= -2 + 2 + 6 - 2 = 4, \end{aligned}$$

y la función buscada será

$$f(x, y) = \left(4xy - 6y^2 x + 2x^3\right) + i\left(-2x^2 + 2y^2 + 6x^2 y - 2y^3\right) = 2z^3 - i2z^2.$$

c) La expresión para $f'(z)$ en forma binómica se obtiene de la expresión

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \left(4y - 6y^2 + 6x^2\right) + i(-4x + 12xy).$$

2. Se considera la función

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}.$$

Conteste de forma razonada a cada apartado:

a) **(0.25 puntos)** Demuestre que $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de $f(z)$.

b) **(1 punto)** Calcule el desarrollo de Taylor de $f(z)$ en $z_0 = 0$, indicando su disco de convergencia.

c) **(0.25 puntos)** Calcule el valor de $f^{(200)}(0)$.

Solución:

a) Está claro que $z_0 = 0$ es una singularidad de $f(z)$, puesto que anula su denominador. Para comprobar que es una singularidad evitable hay que comprobar que existae el límite de la función en z_0. Al hacerlo de forma directa:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(z)}{z^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0},$$

obtenemos una indeterminación del tipo $0/0$, como las funciones de numerador y denominador son derivables aplicaremos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{d}{dz}1-\cos(z)}{\frac{d}{dz}z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{2z} = \frac{0}{0},$$

y como sigue la indeterminación en el límite, hay que aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{d}{dz}\operatorname{sen}(z)}{\frac{d}{dz}2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{C}.$$

Hemos demostrado que la función tiene límite en el punto $z_0 = 0$, luego z_0 es una singularidad evitable.

b) Como la función no tiene singularidades propias (que no sean evitables) la función es derivable en todos los puntos de $\mathbb{C}$. Para encontrar su desarrollo de Taylor utilizaremos el desarrollo de Taylor de la función $\cos z$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

y por tanto el numerador puede expresarse como

$$\begin{aligned} 1-\cos z &= 1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right) = \frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{6!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots, \\ &\quad \text{o en forma de serie} \\ 1-\cos z &= 1-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n} \end{aligned}$$

Ahora dividimos por z^2 para encontrar el desarrollo de $f(z)$

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2(n-1)},$$

o haciendo el cambio $(n-1) = n$ y en ese caso $n = (n+1)$ y $(n+1) = (n+2)$

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+2}}{(2(m+1))!}z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^2}{(2m+2)!}z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+2)!}z^{2m}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

c) Usando el teorema de Taylor, sabemos que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!,$$

en nuestro caso y como sólo hay potencias pares tendremos

$$a_n = \begin{cases} \text{Si } n = 2m & \Rightarrow a_n = a_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} \\ \text{Si } n = 2m+1 & \Rightarrow a_n = a_{2m+1} = 0 \end{cases}$$

por tanto si estamos calculando a_{200}, entonces $n = 200$ y por tanto $m = 100$

$$f^{(200)}(0) = a_{200}\cdot 200! = \left.\frac{(-1)^m}{(2m+2)!}\right|_{m=100} = \frac{(-1)^{100}}{202!}200! = \frac{200!}{202!} = \frac{1}{201\cdot 202} = \frac{1}{40602}.$$

3. **(1.25 punto)** Calcule la siguiente integral en función de $m \in \mathbb{Z}$:

$$I_1(m) = \int_\gamma z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución: La única singularidad del integrando es $z_0 = 0$, que como está en el argumento de una función trigonométrica es una singularidad esencial. Además está dentro de la curva que es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r = 1$ por lo que el cálculo de la integral es directo mediante el teorema de los residuos

$$\int_\gamma z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Como es una singularidad esencial, para calcular su residuo necesitamos la serie de Laurent centrada en dicho punto $z_0 = 0$ y utilizamos la serie de Taylor de la función $\operatorname{sen}(z)$ para obtener la de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}},$$

y multiplicando por z^m obtenemos la del integrando

$$z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1-m}}$$

El residuo corresponde al coeficiente del término $\frac{1}{z}$, por tanto, tenemos que hacer la identificación

$$\frac{1}{z^{2n+1-m}} = \frac{1}{z}$$

e identificando los coeficientes

$$2n + 1 - m = 1 \Leftrightarrow 2n = m \Leftrightarrow n = \frac{m}{2}$$

Como n es un número natural, tendremos dos posibles opciones

$$\text{Si } m \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{m}{2} \Rightarrow \operatorname{Res}\left(z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{(-1)^{m/2}}{(m+1)!}$$

$$\text{Si } n \text{ es impar} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2} \text{ no es natural y por tanto no existe el valor de } n \Rightarrow \operatorname{Res}\left(z^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$$

4. **(1.25 puntos)** Dada la siguiente integral:

$$I_2(r) = \int_\gamma \frac{z^2 - 1}{z(z-1)(z-2)^2} dz; \qquad \gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad r > 0.$$

Calcule $I_2(r)$ en función de $r > 0$, usando el teorema de los residuos, justificando previamente porqué se puede aplicar dicho teorema.

Solución: El teorema de los residuos se puede aplicar directamente, puesto que la curva es cerrada (circunferencia de centro 0 y radio r, orientada positivamente) y la función del integrando sólo tiene singularidades aisladas que podemos calcular fácilmente:

$$z(z-1)(z-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = 2 \end{cases}$$

Se comprueba que z_1 y z_3 son singularidades tipo polo,

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2 - 1}{z(z-1)(z-2)^2} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow \quad \text{Es tipo polo.}$$

$$\text{Orden } 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to 0} z \frac{z^2 - 1}{z(z-1)(z-2)^2} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 - 1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{-1}{(-1)(-4)^2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{C} - \{0\}$$

$$\lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 1}{z(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{Es tipo polo.}$$

$$\text{Orden } 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to 2} (z-2)^2 \frac{z^2 - 1}{z(z-1)(z-2)^2} = \lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 1}{z(z-1)} = \frac{3}{2} \in \mathbb{C} - \{0\}$$

mientras que como z_2 también anula el numerador y debemos considerar si es una singularidad evitable, así que calculamos el límite de la función en ese punto

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2}=\frac{0}{0}=(\text{L'Hôpital})=\lim_{z\to 1}\frac{\frac{d}{dz}\left(z^2-1\right)}{\frac{d}{dz}\left(z\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2\right)}=\lim_{z\to 1}\frac{2z}{\left(2z-1\right)\left(z-2\right)^2+2\left(z^2-z\right)\left(z-2\right)}=2,$$

luego al existir el límite de la función en z_2, este valor es una singularidad evitable y no se tiene en cuenta en el cálculo de la integral puesto que su residuo es 0.

Podemos expresar el numerador como $z^2-1=\left(z-1\right)\left(z+1\right)$, lo que permite simplificar la función y poner

$$f\left(z\right)=\frac{\left(z-1\right)\left(z+1\right)}{z\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2}=\frac{z+1}{z\left(z-2\right)^2}$$

Usando el teorema de los residuos el valor de la integral depende de las singularidades que estén dentro de la curva y esto depende de $r>0$. Para ello calculamos la distancia de cada singularidad al centro de la circunferencia

$$\begin{aligned} z_1 &= 0\Rightarrow d\left(0,z_1\right)=\left|z_1-0\right|=\left|0-0\right|=\left|0\right|=0\\ z_3 &= 2\Rightarrow d\left(0,z_3\right)=\left|z_3-0\right|=\left|2-0\right|=\left|2\right|=2 \end{aligned}$$

La integral depende del radio de r y esto influye en las singularidades que caen dentro. Teniendo en cuenta las distancias que hemos calculado al centro debemos distinguir:

$$\begin{aligned} 0 &< r<2\Rightarrow z_1\in\mathring{\gamma},z_3\notin\mathring{\gamma}\Rightarrow I\left(r\right)=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),0\right)\\ 2 &< r\Rightarrow z_1\in\mathring{\gamma},z_3\in\mathring{\gamma}\Rightarrow I\left(r\right)=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),0\right)+\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),2\right)\right) \end{aligned}$$

Calcularemos ahora los residuos. Como z_1 es simple, el límite que hemos utilizado para conocer el orden del polo también proporciona el residuo, por tanto

$$\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),0\right)=\frac{1}{4}.$$

Para calcular el residuo en $z_3=2$, que es un polo doble, usamos la fórmula general

$$\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),2\right)=\lim_{z\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z-2\right)^2\frac{z+1}{z\left(z-2\right)^2}=\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{z}=\lim_{z\to 2}\frac{z-\left(z+1\right)}{z^2}=\frac{-1}{4}.$$

La integral en función de r será

$$\begin{aligned} 0 &< r<2\Rightarrow z_1\in\mathring{\gamma},z_3\notin\mathring{\gamma}\Rightarrow I\left(r\right)=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),0\right)=2\pi i\frac{1}{4}=\frac{\pi i}{2}\\ 2 &< r\Rightarrow z_1,z_2\in\mathring{\gamma}\Rightarrow I\left(r\right)=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),0\right)+\mathrm{Res}\left(f\left(z\right),2\right)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0 \end{aligned}$$

Para el caso $r=2$ la curva pasa por la singularidad y por tanto no podremos calcular la integral.

5. Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''\left(t\right)+y\left(t\right)=1-h_2\left(t\right), & t\geq 0,\\ y\left(0\right)=0,\\ y'\left(0\right)=0. \end{cases}$$

donde $h_2\left(t\right)$ es la función de Heaviside de parámetro 2. Se pide:

a) **(1.5 puntos)** Resuelva el problema utilizando la transformada de Laplace.

b) **(0.5 puntos)** Compruebe que la solución cumple las condiciones iniciales y la ecuación diferencial del problema.

Solución:

a) Definimos

$$Y(z) = \mathcal{L}[y](z),$$
$$x(t) = 1 - h_2(t).$$

Utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[y''+y](z) & = & \mathcal{L}[x(t)](z) \\ & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\ \mathcal{L}[y''](z) + \mathcal{L}[y](z) & = & \mathcal{L}[x(t)](z) \\ & \Downarrow & \text{(Derivación)} \end{array}$$

$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z).$$

Usando las condiciones iniciales:

$$z^2 Y(z) + Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z).$$

Despejando $Y(z)$

$$\left(z^2+1\right) Y(z) = \mathcal{L}[x(t)](z) \Rightarrow Y(z) = \frac{\mathcal{L}[x(t)](z)}{z^2+1}.$$

Calculamos $\mathcal{L}[x(t)](z)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[x(t)](z) & = & \mathcal{L}[1-h_2(t)](z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{e^{-2z}}{z} = \dfrac{1-e^{-2z}}{z} \\ & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\ \mathcal{L}[x(t)](z) & = & \mathcal{L}[1](z) - \mathcal{L}[h_2(t)](z) \\ & \Downarrow & \text{(Función Heaviside)} \\ \mathcal{L}[x(t)](z) & = & \dfrac{1}{z} - \dfrac{e^{-2z}}{z} \end{array}$$

Sustituyendo en $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{z} - \frac{e^{-2z}}{z}}{(z^2+1)} = \frac{1}{z(z^2+1)} - \frac{e^{-2z}}{z(z^2+1)}.$$

Tomando la transformada inversa de Laplace encontraremos la solución $y(t)$. Utilizando linealidad podemos poner

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) \\ & \Downarrow & \\ y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{z(z^2+1)} - \dfrac{e^{-2z}}{z^2+1}\right](t) \\ & \Downarrow & \text{(Linealidad)} \\ y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{z(z^2+1)}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2z}}{z^2+1}\right](t) \end{array}$$

y si tenemos en cuenta que hay una exponencial en el segundo término, debemos utilizar el segundo teorema de traslación para poner

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) - h_2(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t-2),$$

Notar que en ambos sumandos se calcula la inversa de la misma función. Para calcular esta inversa vamos a utilizar residuos. Las singularidades son $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$, que son todo polos simples; así por la fórmula de Bromwich tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), 0\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), -i\right)$$

Estos residuos se calculan mediante la fórmula general para polos de orden k, en este caso $k = 1$ para todos ellos

$$z_1 = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), 0\right) = \lim_{z\to 0} z\left(e^{zt}F(z)\right) = \lim_{z\to 0} e^{zt}\tfrac{1}{(z^2+1)} = 1$$

$$z_2 = i \quad \Rightarrow \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right) = \lim_{z\to i} (z-i)\left(e^{zt}F(z)\right) = \lim_{z\to 2} e^{zt}\tfrac{1}{z(z+i)} = e^{it}\tfrac{1}{i(2i)} = -\tfrac{e^{it}}{2}$$

Como $z_3 = -i$ es el conjugado de z_2, su residuo será el conjugado del anterior

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), -i\right) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), \bar{i}\right) = \overline{\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right)} = -\frac{e^{-it}}{2}.$$

Sumando todos los residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = 1 + \left(-\frac{e^{it}}{2}\right) + \left(-\frac{e^{-it}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = 1 - \cos t.$$

Finalmente la solución buscada será

$$y(t) = (1-\cos t) - (1-\cos(t-2))\,h_2(t).$$

b) Para comprobar las condiciones iniciales y la ecuación diferencial necesitamos calcular $y'(t)$ e $y''(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(t-2)\,h_2(t), \\ y''(t) &= \cos t - \cos(t-2)\,h_2(t). \end{aligned}$$

Comprobamos que se cumplen las condiciones iniciales

$$y(0) = 1 - \cos t - (1-\cos(t-2))\,h_2(t)|_{t=0} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$y'(0) = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(t-2)\,h_2(t)|_{t=0} = 0 - 0 = 0$$

Comprobamos que se cumple la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= (\cos t - \cos(t-2)\,h_2(t)) + (1 - \cos t - (1-\cos(t-2)\,h_2(t))) \\ &= \cos t - \cos(t-2)\,h_2(t) + 1 - \cos t - h_2(t) + \cos(t-2)\,h_2(t) \\ &= 1 - h_2(t). \end{aligned}$$

6. Dado el problema de valor inicial en tiempo discreto:

$$\begin{cases} y_{n+2} + 3y_{n+1} = 2^n, & n \geq 0, \\ y_0 = 0, & \\ y_1 = 0. & \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Resuelva mediante la transformada $\mathcal{Z}$ el problema anterior.

b) **(0.5 puntos)** Calcule el valor de y_{20}.

Aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} + 3y_{n+1}](z) = \mathcal{Z}[2^n](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) + 3\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) = \mathcal{Z}[2^n](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_n](z) &= Y(z) \\ \mathcal{Z}[y_{n+1}](z) &= z\mathcal{Z}[y_n](z) - zy_0 = zY(z) \\ \mathcal{Z}[y_{n+2}](z) &= z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} \left(z^2Y(z)\right) + 3(zY(z)) &= \mathcal{Z}[2^n](z) \\ \left(z^2+3z\right)Y(z) &= \mathcal{Z}[2^n](z) \end{aligned}$$

y despejando

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}[2^n](z)}{(z^2+3z)}$$

Está claro que

$$\mathcal{Z}[2^n](z) = \frac{z}{z-2}; \quad |z| > 2$$

por tanto

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-2}}{(z^2+3z)} = \frac{z}{(z-2)z(z+3)} = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{(z-2)(z+3)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples,tenemos:

$$F(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)} = \left(\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z| > 2 \\
\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z| > 3
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}\right) &= \left(A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} + B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}}{z^n}\right) \quad \text{si } |z| > 3 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A2^{n-1} + B(-1)^{n-1}3^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z| > 3
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos. Vemos que

$$y_0 = 0$$

mientras que para $n \geq 1$

$$y_n = \left(A2^{n-1} + B(-1)^{n-1}3^{n-1}\right)$$

Vamos a calcular A y B de la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(z-2)(z+3)} = \left(\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}\right)$$

por tanto

$$A(z+3) + B(z-2) = 1$$

de donde

$$\begin{aligned}
\text{Si } z &= 2 \Rightarrow A(2+3) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \\
\text{Si } z &= -3 \Rightarrow B(-3-2) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Y la expresión de y_n será

$$y_n = \left(\frac{1}{5}2^{n-1} + \left(-\frac{1}{5}\right)(-1)^{n-1}\,3^{n-1}\right) = \frac{2^n}{10} + \frac{1}{5}(-1)^n\,3^{n-1} = \frac{2^n}{10} + (-1)^n\,\frac{3^n}{15}$$

Podemos comprobar el valor de y_1

$$y_1 = \left.\frac{2^n}{10} + (-1)^n\,\frac{3^n}{15}\right|_{n=1} = \left.\left(\frac{2}{10} - \frac{3}{15}\right)\right| = 0.$$

Usando la ecuación$y_{n+2} + 3y_{n+1} = 2^n \Rightarrow y_{n+2} = 2^n - 3y_{n+1}$

$$y_2 = 2^0 - 3y_1 = 4$$

Usando la solución

$$y_2 = \left.\left(\frac{2^n}{10} + (-1)^n\,\frac{3^n}{15}\right)\right|_{n=2} = \left.\left(\frac{2^2}{10} + (-1)^2\,\frac{3^2}{15}\right)\right| = \frac{4}{10} + \frac{9}{15} = \frac{12+18}{30} = 1$$

Y para y_{20}

$$y_{20} = \left.\left(\frac{2^n}{10} + (-1)^n\,\frac{3^n}{15}\right)\right|_{n=20} = \frac{2^{20}}{10} + \frac{3^{20}}{15} = 232\,557\,151$$