Matemáticas II
Grado en Ingeniería Eléctrica/Grado en Ingeniería Electrónica y Automática
Convocatoria febrero 2016

---

1. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación siguiente:
$$3 + 2\cos(z) = 0.$$

Solución: Usamos la definición de $\cos z$ en términos de la función exponencial compleja

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

para reescribir la ecuación como

$$3 + 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0.$$

y simplificando

$$3 + e^{iz} + e^{-iz} = 0$$

Se hace el cambio:

$$e^{iz} = w,$$

y como $e^{iz} \neq 0$, entonces existe su inverso $\frac{1}{e^{iz}}$ y se cumple

$$\frac{1}{e^{iz}} = e^{-iz} = \frac{1}{w}.$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$3 + w + \frac{1}{w} = 0.$$

Y multiplicando por $w \neq 0$ obtenemos una ecuación de segundo grado en w

$$w^2 + 3w + 1 = 0,$$

y obviamente podemos deducir que

$$w = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto

$$w_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2},$$
$$w_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Tendremos

$$e^{iz_1} = w_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2},$$
$$e^{iz_2} = w_2 = -\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

y tomando logaritmos complejos

$$iz_1 = \log(w_1) = \log\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$iz_2 = \log(w_2) = \log\left[-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

Expresando cada complejo en forma polar:

$$\left.\begin{array}{r}|z_1| = \left|\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \arg(z_1) = \arg\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\pi}$$

$$\left.\begin{array}{r}|z_2| = \left|-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right| = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \arg(z_2) = \arg\left(-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \pi\end{array}\right\} \Rightarrow -\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\pi}$$

y los valores de las soluciones serían:

$$iz_1 = \log(|z_1|) + i\arg(z_1) \Rightarrow z_1 = \left[(\pi + 2k\pi) - i\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$iz_2 = \log(|z_2|) + i\arg(z_2) \Rightarrow z_2 = \left[(\pi + 2k\pi) - i\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Se considera la función racional:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)}.$$

a) Calcule justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$A(0;1,2) = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\},$$

indicando en cada caso la parte regular y la parte singular del desarrollo.

b) Calcule justificando la validez de la región de convergencia, el desarrollo de Laurent de f convergente en el anillo

$$A\left(i;0,\sqrt{2}\right) = \left\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z-i| < \sqrt{5}\right\},$$

indicando en cada caso la parte regular y la parte singular del desarrollo.

c) ¿Es posible calcular alguno de los residuos de las singularidades de $f(z)$ utilizando los desarrollos encontrados en los apartados anteriores? En caso afirmativo indique cómo, en caso contrario indique porqué.

Solución:

a) Realizamos la descomposición en factores simples:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} = \left(\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+2}\right)$$

Para la expresión entre paréntesis tenemos

$$\frac{A(z+2) + B(z-i)}{(z-i)(z+2)}$$

Por tanto

$$A(z+2) + B(z-i) = 1$$

y dando a z los valores de las raíces

$$\left.\begin{array}{l} z = i \Rightarrow A(i+2) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2+i} \Rightarrow A = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ z = -2 \Rightarrow B(-2-i) = 1 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{2+i} \Rightarrow B = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \end{array}\right\}$$

La descomposición es

$$f(z) = \left(\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+2}\right) = \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i} + \frac{-2+i}{5}\frac{1}{z+2}$$

El desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $1 < |z| < 2$ de cada fracción se hace de forma independiente. Para la primera fracción y como $1 < |z|$, entonces $\frac{|i|}{|z|} = \frac{1}{|z|} < 1$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{z^n} \text{ con } \left|\frac{i}{z}\right| < 1$$

Para la segunda fracción y como $|z| < 2$, entonces $\frac{|z|}{|2|} = \frac{|z|}{2} < 1$ el desarrollo es

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

La función tendrá el siguiente desarrollo de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i} + \frac{-2+i}{5}\frac{1}{z+2} = \frac{2-i}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{z^n} + \frac{-2+i}{5}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)(i)^{n-1}}{5}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2+i}{10}\right)(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \end{aligned}$$

y por tanto

$$\text{Parte Regular:} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2+i}{10}\right)(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\text{Parte Esencial:} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)(i)^{n-1}}{5}\frac{1}{z^n}$$

b) En este caso se busca un desarrollo de Laurent en potencias de $(z-i)$, como

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z+2}$$

aunque no es necesario realizar descomposición en fracciones simples, ya que $\frac{1}{z-i}$ ya es una potencia de $(z-i)$, utilizaremos la encontrada en el apartado anterior para poner

$$f(z) = \left(\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+2}\right) = \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i} + \frac{-2+i}{5}\frac{1}{z+2}$$

Como se ha comentado sólo es necesario el desarrollo de Laurent en el conjunto indicado $0 < |z-i| < \sqrt{5}$ para la segunda fracción, puesto que la primera ya está en potencias de $(z-i)$. Para la segunda fracción hacemos como en clase una traslación haciendo el cambio

$$z - i = w \Rightarrow z = w + i,$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{w+(2+i)}$$

y desarrollamos esta fracción en potencias de $w = 0$, y como $|z-i| < \sqrt{5}$, entonces $\frac{|z-i|}{|2+i|} = \frac{|w|}{|2+i|} = \frac{|w|}{\sqrt{5}} < 1$ el desarrollo es

$$\frac{1}{w+(2+i)} = \frac{1}{2+i}\frac{1}{1+\frac{w}{2+i}} = \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{2+i}\right)^n, \qquad \frac{|w|}{|2+i|} < 1;$$

y deshaciendo el cambio

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2+i)^{n+1}}$$

La función tendrá el siguiente desarrollo de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i}+\frac{-2+i}{5}\frac{1}{z+2}=\frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i}+\frac{-2+i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2+i)^{n+1}} \\ &= \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2+i)(-1)^n}{5(2+i)^{n+1}}(z-i)^n \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} &\text{Parte Regular:} && \frac{2-i}{5}\frac{1}{z-i} \\ &\text{Parte Esencial:} && \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2+i)(-1)^n}{5(2+i)^{n+1}}(z-i)^n \end{aligned}$$

c) Para calcular el residuo de una función en una singularidad aislada utilizando para ello el desarrollo de Laurent, tenemos que hacer este desarrollo en un anillo que tenga por centro la singularidad y cuyo radio interior sea 0. El primer desarrollo se hace en torno a $z_0 = 0$ que no es una singularidad, luego no podemos utilizarlo. En el segundo desarrollo el centro es $z_0 = i$ que sí es singularidad, además el radio interno es 0, luego es el único desarrollo que podría usarse, el cálculo del residuo mediante la serie de Laurent se hace tomando el coeficiente asociado a $\frac{1}{z-i}$, que corresponde con

$$b_1 = \frac{2-i}{5}$$

3. Calcule la siguiente integral aplicando la Fórmula Integral de Cauchy, justificando de forma razonada porqué se puede aplicar esta fórmula.

$$\int_\gamma \frac{e^{zs}}{z^2}dz; \qquad \gamma(t) = 4e^{it}, \quad t\in[0,2\pi],$$

siendo $s \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

Solución: La fórmula integral de Cauchy concluye que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

siempre que

$$\begin{aligned} f(z) &\in \mathcal{H}\left(\gamma^* \cup \mathring{\gamma}\right) && \text{Función derivable sobre la curva y en su interior.} \\ z_0 &\in \mathring{\gamma} && \text{Punto interior a la curva.} \end{aligned}$$

Está claro que para este caso

$$f(z) = e^{zs} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \qquad \text{Es una función entera para cualquier valor } s > \mathbb{R}.$$

$$z_0 = 0 \Rightarrow d(z_0, 0) = 0 < 4 \qquad \text{Distancia del punto al centro menor que el radio } \Rightarrow \text{El punto está dentro.}$$

y para este caso $n = 1$, por tanto utilizando la fórmula integral de Cauchy

$$f'(0) = \frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zs}}{z^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zs}}{z^2}dz.$$

Si calculamos la derivada de e^{zs}

$$f'(z) = se^{zs}$$

la integral será

$$\int_\gamma \frac{e^{zs}}{z^2}dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i s.$$

4. Calcule en función de $r > 0$ y mediante el teorema de los residuos la siguiente integral; justificando de forma razonada porqué se puede aplicar dicho teorema:

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}dz; \qquad \gamma(t) = 1 + re^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad r > 0.$$

Solución: La curva es cerrada (circunferencia de centro 1 y radio r) y la función del integrando sólo tiene singularidades aisladas

$$\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que ambas son singularidades tipo polo de orden 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 4} \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} &= \frac{e^4 - 1}{0} = \infty \qquad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Para el orden} &\Rightarrow \lim_{z\to 4}(z-4)\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} = \lim_{z\to 4}\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{e^4 - 1}{(4)^2} = \frac{e^4 - 1}{16} \in \mathbb{C} - \{0\} \\
\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} &= \frac{0}{0} \Rightarrow (\text{L'Hôpital}) \Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2z(z-4)+z^2} = \frac{1}{0} = \infty \qquad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Para el orden} &\Rightarrow \lim_{z\to 0} z\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z(z-4)} = \frac{0}{0} \Rightarrow (\text{L'Hôpital}) \Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-4)+z} = \frac{1}{-4} \in \mathbb{C} - \{0\}
\end{aligned}$$

además al comprobar el orden del polo también hemos calculado los residuos correspondiente.
El valor de la integral depende de las singularidades que estén dentro de la curva que es una circunferencia de radio variable y podemos distinguir 2 casos

$$\begin{aligned}
0 &< r < 1 \Rightarrow z_1 \notin \mathring{\gamma}, z_2 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}dz = 0 \text{ (Teorema de Cauchy-Gourssat).} \\
1 &< r < 3 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}, 0\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2} \\
3 &< r \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}dz = 0 = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z - 1}{z^2(z-4)}, 4\right)\right) \\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{e^4 - 1}{16}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^4 - 5}{16}\right) = \pi i\left(\frac{e^4 - 5}{8}\right)
\end{aligned}$$

5. Calcule mediante el teorema de los residuos la siguiente integral, justificando de forma razonada cada paso realizado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3} - 2\cos t}dt.$$

Solución: Es una integral trigonométrica entre 0 y 2π que resolveremos mediante el cambio **de siempre:**

$$\begin{aligned}
\cos t &= \frac{z^2 + 1}{2z} \\
dt &= \frac{1}{iz}dz.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3} - 2\cos t}dt &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{3} - 2\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1}\frac{2z}{\sqrt{3}z - z^2 - 1}\frac{1}{iz}dz \\
&= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{2}{z^2 - \sqrt{3}z + 1}dz
\end{aligned}$$

La integral se calcula mediante el teorema de los Residuos, siendo en estos casos la curva una circunferencia centrada en 0 y radio 1. Calculamos las singularidades

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Hay dos singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Tenemos que ver cuál de ellas está dentro de la curva (centro 0 y radio 1), para ello sólo hay que calcular los módulos y comprobar si son más o menos grandes que 1

$$\begin{aligned} |z_1| &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ |z_2| &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Luego la curva pasa por las singularidades y no es posible calcular la integral por este método.

6. Resuelva cada apartado de forma independiente:

   a) Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = (t-2) \cdot h_2(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución:

a) Utilizando el segundo teorema de traslación obtenemos

$$\mathcal{L}[x(t)](z) = \mathcal{L}[(t-2) \cdot h_2(t)](z) = e^{-2z}\mathcal{L}[t](z) = \frac{e^{-2z}}{z^2}$$

b) Denotemos por

$$Y(z) = \mathcal{L}[y](s),$$
$$x(t) = (t-2) \cdot h_2(t),$$

por el apartado anterior

$$X(z) = \mathcal{L}[x(t)](z)) = \frac{e^{-2z}}{z^2}.$$

Entonces utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + Y(z) = X(z)$$

de donde

$$\left(z^2 Y(z) - 1\right) + Y(z) = X(z)$$

$$\begin{aligned} \left(z^2+1\right) Y(z) - 1 &= \frac{e^{-2z}}{z^2} \\ \left(z^2+1\right) Y(z) &= 1 + \frac{e^{-2z}}{z^2} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$Y(z) = \frac{1}{z^2+1} + e^{-2z}\left(\frac{1}{z^2\left(z^2+1\right)}\right).$$

Obtenemos $y(t)$ tomando la transformada inversa de $Y(z)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t).$$

Primero por linealidad podemos poner:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right)\right](t)$$

y utilizando el segundo teorema de traslación

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) + h_2(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t-2)$$

En el primer término la inversa es directa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) = \operatorname{sen}(t),$$

para el segundo podemos utilizar residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) = \operatorname{Res}\big(e^{zt}F(z),0\big) + \operatorname{Res}\big(e^{zt}F(z),i\big) + \operatorname{Res}\big(e^{zt}F(z),-i\big).$$

Para $F(z)$

$$z=0 \text{ polo doble de } F(z) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \operatorname{Res}(e^{zt}F(z),0) &= \lim_{z\to 0}\tfrac{1}{1!}\tfrac{d}{dz}z^2e^{zt}F(z) = \lim_{z\to 0}\tfrac{d}{dz}e^{zt}\tfrac{1}{(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 0} te^{zt}\tfrac{1}{(z^2+1)} + e^{zt}\tfrac{-2z}{(z^2+1)^2} \\ &= t \end{aligned}$$

$$z=i \text{ polo simple de } F(z) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \operatorname{Res}(e^{zt}F(z),i) &= \lim_{z\to i}(z-i)\,e^{zt}F(z) = \lim_{z\to i}e^{zt}\tfrac{1}{z^2(z+i)} = \\ &= e^{it}\tfrac{1}{-2i} \end{aligned}$$

$$z=-i \text{ polo simple de } F(z) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \operatorname{Res}(e^{zt}F(z),-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\,e^{zt}F(z) = \lim_{z\to -i}e^{zt}\tfrac{1}{z^2(z-i)} = \\ &= e^{-it}\tfrac{1}{2i} \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = t - e^{it}\frac{1}{2i} + e^{-it}\frac{1}{2i} = t - \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = t - \operatorname{sen} t$$

La solución final será

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h_2(t)\left((t-2) - \operatorname{sen}(t-2)\right)$$

7. Resuelva mediante la transformada $\mathcal{Z}$ el siguiente problema de valor inicial en tiempo discreto:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_n = 0, & n \geq 0, \\ y_0 = 0, & \\ y_1 = \sqrt{5}. & \end{cases}$$

a) Aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}[y_{n+2} - 5y_n](z) = \mathcal{Z}[0](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) - 5\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[0](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_n](z) &= Y(z) \\ \mathcal{Z}[y_{n+1}](z) &= z\mathcal{Z}[y_n](z) - zy_0 = zY(z) \\ \mathcal{Z}[y_{n+2}](z) &= z^2\mathcal{Z}[y_n](z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z) - \sqrt{5}z \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}\left(z^2Y(z)-\sqrt{5}z\right)-5Y(z) &= \mathcal{Z}[0](z)\\ \left(z^2-5\right)Y(z)-\sqrt{5}z &= \mathcal{Z}[0](z)\end{aligned}$$

y despejando

$$Y(z)=\frac{\mathcal{Z}[0](z)+\sqrt{5}z}{(z^2-5)}$$

Está claro que

$$\mathcal{Z}[0](z)=0;\quad |z|>3$$

por tanto

$$Y(z)=\frac{\sqrt{5}z}{(z^2-5)}=\frac{\sqrt{5}z}{\left(z+\sqrt{5}\right)\left(z-\sqrt{5}\right)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n=\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}z}{\left(z+\sqrt{5}\right)\left(z-\sqrt{5}\right)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples,tenemos:

$$F(z)=\frac{\sqrt{5}z}{\left(z+\sqrt{5}\right)\left(z-\sqrt{5}\right)}=\left(\frac{A}{z+\sqrt{5}}+\frac{B}{z-\sqrt{5}}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0,r,\infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+\sqrt{5}} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{5}^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5^{(n-1)/2}}{z^n}\quad \text{si } |z|>\sqrt{5}\\ \frac{1}{z-\sqrt{5}} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{5}^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{(n-1)/2}}{z^n}\quad \text{si } |z|>\sqrt{5}\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{A}{z+\sqrt{5}}+\frac{B}{z-\sqrt{5}}\right) &= \left(A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^{(n-1)/2}+B\sum_{n=1}^{\infty}5^{(n-1)/2}\right)\quad \text{si } |z|>\sqrt{5}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n A+B\right)5^{(n-1)/2}\frac{1}{z^n}\quad |z|>\sqrt{5}\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos. Vemos que

$$y_0=0$$

mientras que para $n\geq 1$

$$y_n=\left(\left((-1)^n A+B\right)5^{(n-1)/2}\right)$$

Vamos a calcular A y B de la descomposición en fracciones simples

$$\frac{\sqrt{5}z}{\left(z+\sqrt{5}\right)\left(z-\sqrt{5}\right)}=\left(\frac{A}{z+\sqrt{5}}+\frac{B}{z-\sqrt{5}}\right)$$

por tanto

$$A\left(z-\sqrt{5}\right)+B\left(z+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}z$$

de donde

$$\begin{aligned}
\text{Si } z &= -\sqrt{5} \Rightarrow A\left(-\sqrt{5}-\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5}\sqrt{5} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\text{Si } z &= \sqrt{5} \Rightarrow B\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}\sqrt{5} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Y la expresión de y_n será

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\,(-1)^{n-1}\,5^{(n-1)/2} + \sqrt{5}5^{(n-1)/2}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{n-1}+1\right)5^{n/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)5^{n/2}.
\end{aligned}$$

Podemos comprobar el valor de y_1

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)5^{n/2}\Big|_{n=1} = \frac{1}{2}\left(1-(-1)\right)5^{1/2} = 5^{1/2}.$$