1. **(1.2 puntos)** Encuentra en $\mathbb{C}$ todas las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\cos(z) + 2\sqrt{5}i = 0.$$

Solución: Rercordemos la definición de $\cos z$ en términos de la función exponencial compleja

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

y podremos reescribir la ecuación como

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + 2\sqrt{5}i = 0.$$

Se hace el cambio**:**

$$e^{iz} = w,$$

y como $e^{iz} \neq 0$, entonces existe su inverso $\frac{1}{e^{iz}}$ y se cumple

$$\frac{1}{e^{iz}} = e^{-iz} = \frac{1}{w}.$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} + 2\sqrt{5}i = 0 \Rightarrow \frac{w^2+1}{2w} + 2\sqrt{5}i = 0.$$

Si multiplicamos toda la ecuación por el valor no nulo $2w$, obtenemos una ecuación de segundo grado en w

$$w^2 + 4\sqrt{5}iw + 1 = 0,$$

y obviamente podemos deducir que

$$w = \frac{-4\sqrt{5}i \pm \sqrt{\left(4\sqrt{5}i\right)^2 - 4}}{2} = \frac{-4\sqrt{5}i \pm \sqrt{-84}}{2} = \frac{-4\sqrt{5}i \pm 2\sqrt{21}i}{2} = \left(-2\sqrt{5} \pm \sqrt{21}\right) i.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(-2\sqrt{5} + \sqrt{21}\right) i, \\ w_2 &= \left(-2\sqrt{5} - \sqrt{21}\right) i, \end{aligned}$$

y tendremos

$$e^{iz_1} = w_1 = \left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i,$$

$$e^{iz_2} = w_2 = \left(-\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i,$$

y tomando logaritmos complejos

$$iz_1 = \log(w_1) = \log\left[\left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i\right]$$

$$iz_2 = \log(w_2) = \log\left[-\left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right) i\right]$$

Expresando cada complejo en forma polar:

$$\left.\begin{array}{c} |z_1| = \left|\left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i\right| = \sqrt{21} - 2\sqrt{5} \\ \arg(z_1) = \arg\left(\left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i\right) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) i = \left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right) e^{i\pi/2}$$

$$\left.\begin{array}{c} |z_2| = \left|-\left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right) i\right| = \sqrt{21} + 2\sqrt{5} \\ \arg(z_2) = \arg\left(-\left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right) i\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right) i = \left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right) e^{-i\pi/2}$$

y los valores de las soluciones serían:

$$iz_1 = \log(|z_1|) + i\arg(z_1) \Rightarrow z_1 = \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\log\left(\sqrt{21} - 2\sqrt{5}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$iz_2 = \log(|z_2|) + i\arg(z_2) \Rightarrow z_1 = \left[\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\log\left(\sqrt{21} + 2\sqrt{5}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Dada la siguiente función:

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

   a) **(1 punto)** Calcule su desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 0$, indicando su anillo de convergencia, así como su partes regular y singular.

   b) **(0.4 puntos)** Utilizando el desarrollo del apartado anterior calcule

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Solución:

a) **Solución:** Hay que utilizar el desarrollo de Taylor de $\cos(z)$ pero evaluado en $\frac{1}{z}$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} z^{2n} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} \quad \forall z \neq 0$$

A continuación multiplicamos por la función $\left(z^2 + \frac{1}{z}\right)$

$$\left(z^2 + \frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(z^2 + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{1}{z^{2n-2}} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right).$$

Uno de los términos sólo contiene términos pares y el otro impares, luego podemos poner la serie como

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

En la segunda serie sólo hay potencias negativas de z, mientras que en la primera hay sólo dos potencias positivas: para $n = 0$ y para $n = 1$, que separamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-2}} = \underbrace{z^2}_{n=0} - \underbrace{\frac{1}{2} z}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-2}}.$$

Finalmente agrupamos la parte regular (pontencias positivas de z) y la parte esencial (potencias negativas de z):

$$f(z) = z^2 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \underbrace{z^2 - \frac{1}{2}}_{\text{Parte Regular}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n+1}}}_{\text{Parte Singular}}.$$

b) El residuo es el coeficiente de $\frac{1}{z}$ que como es una potencia impar lo encontramos en el segundo de los sumatorios infinitos tomando $n = 0$:

$$\text{Res}\left(f\left(z\right), 0\right) = \left.\frac{\left(-1\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}\right|_{n=0} = 1$$

Observación: Otra forma de resolver el problema es

$$\begin{aligned} f\left(z\right) &= \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}\frac{1}{z^{2n}} = \left(z^2 + \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \cdots\right) \\ &= z^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \cdots\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \cdots\right) \\ &= \left(z^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^7} + \cdots\right) \end{aligned}$$

y reagrupando

$$f\left(z\right) = \left(z^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\boxed{\frac{1}{z}} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{8!}\frac{1}{z^6} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^7} + \cdots\right)$$

donde como antes

$$\text{Res}\left(f\left(z\right), 0\right) = 1$$

.

3. **(1.2 puntos)** Calcule la siguiente integral aplicando la Fórmula Integral de Cauchy, justificando de forma razonada porqué se puede aplicar esta fórmula.

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}\, z}{z\left(z-2\right)^2}dz; \qquad \gamma\left(t\right) = 4e^{it}, \quad t \in \left[0, 2\pi\right].$$

La fórmula integral de Cauchy concluye que

$$f^{(n)}\left(z_0\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\left(z\right)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}dz$$

siempre que

$$\begin{aligned} f\left(z\right) &\in \mathcal{H}\left(\gamma^* \cup \overset{\circ}{\gamma}\right) && \text{Función derivable sobre la curva y en su interior.} \\ z_0 &\in \overset{\circ}{\gamma} && \text{Punto interior a la curva.} \end{aligned}$$

Está claro que para este caso

$$f\left(z\right) = \frac{\text{sen}\, z}{z} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right) \qquad \text{Es una función entera, puesto que } z = 0 \text{ es una singularidad evitable} \Rightarrow \text{Derivable en } \mathbb{C}.$$

$$z_0 = 2 \Rightarrow d\left(z_0, 0\right) = 2 < 4 \qquad \text{Distancia del punto al centro menor que el radio } \Rightarrow \text{El punto está dentro.}$$

y para este caso $n = 1$, por tanto utilizando la fórmula integral de Cauchy

$$f'\left(2\right) = \frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\text{sen}\, z/z}{\left(z-2\right)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\text{sen}\, z/z}{\left(z-2\right)^2}dz.$$

Si calculamos la derivada de $\text{sen}\left(z\right)/z$

$$f'\left(z\right) = \frac{z\cos z - \text{sen}\, z}{z^2}$$

la integral será

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}\, z}{z\left(z-2\right)^3}dz = 2\pi i f'\left(2\right) = 2\pi i\frac{2\cos 2 - \text{sen}\, 2}{4} = \pi i\frac{2\cos 2 - \text{sen}\, 2}{2}.$$

4. **(1.2 puntos)** Calcule en función de $r > 0$ y mediante el teorema de los residuos la siguiente integral; justificando de forma razonada porqué se puede aplicar dicho teorema:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz; \qquad \gamma(t) = 1 + re^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad r > 0.$$

Solución: La curva es cerrada (circunferencia de centro 1 y radio r) y la función del integrando sólo tiene singularidades aisladas

$$z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que ambas son singularidades tipo polo de orden 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)^2} &= \frac{1}{0} = \infty \qquad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Para el orden} \quad \Rightarrow &\quad \lim_{z\to 0} z^1 \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2} = \frac{1}{(-\pi/2)^2} = \frac{4}{\pi^2} \in \mathbb{C} - \{0\} \\
\lim_{z\to \pi/2} \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)^2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow (\text{L'Hôpital}) \Rightarrow \lim_{z\to\pi/2} \frac{-\operatorname{sen} z}{(z-\pi/2)^2 + 2(z-\pi/2)z} = \frac{-1}{0} = \infty \qquad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Para el orden} \quad \Rightarrow &\quad \lim_{z\to\pi/2} (z-\pi/2)^1 \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)^2} = \lim_{z\to\pi/2} \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)} = \frac{0}{0} \Rightarrow (\text{L'Hôpital}) \Rightarrow \lim_{z\to\pi/2} \frac{-\operatorname{sen} z}{(z-\pi/2)+z} = -
\end{aligned}$$

además al comprobar el orden del polo también hemos calculado el residuo correspondiente.
El valor de la integral depende de las singularidades que estén dentro de la curva que es una circunferencia de radio variable y podemos distinguir 3 casos

$$\begin{aligned}
0 &< r < \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow z_1 \notin \mathring{\gamma}, z_2 \notin \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 0 \\
\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) &< r < 1 \Rightarrow z_1 \notin \mathring{\gamma}, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -4i \\
1 &< r \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}, z_2 \in \mathring{\gamma} \Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 0 = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}, 0\right)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\right) = 4i\left(\frac{2-\pi}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

5. **(1.4 puntos)** Calcule mediante el teorema de los residuos la siguiente integral, justificando de forma razonada cada paso realizado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \operatorname{sen} t} dt.$$

Solución: Es una integral trigonométrica entre 0 y 2π que resolveremos mediante el cambio **de siempre:**

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{z^2 - 1}{2zi} \\
dt &= \frac{1}{iz} dz.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \operatorname{sen} t} dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{10} + \frac{z^2-1}{2zi}} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{2zi}{2\sqrt{10}zi + z^2 - 1} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2\sqrt{10}zi - 1} dz$$

La integral se calcula mediante el teorema de los Residuos, siendo en estos casos la curva una circunferencia centrada en 0 y radio 1. Calculamos las singularidades

$$z^2 + 2\sqrt{10}zi - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2\sqrt{10}i \pm \sqrt{-4\left(\sqrt{10}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{-2\sqrt{10}i \pm \sqrt{4(1-10)}}{2} = \frac{-2\sqrt{10}i \pm 2\sqrt{-36}}{2} = -\sqrt{10}i \pm 3i$$

Hay dos singularidades

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(-\sqrt{10}+3\right)i \\ z_2 &= \left(-\sqrt{10}-3\right)i \end{aligned}$$

Tenemos que ver cuál de ellas está dentro de la curva (centro 0 y radio 1), para ello sólo hay que calcular los módulos y comprobar si son más o menos grandes que 1

$$\begin{aligned} |z_1| &= 3-\sqrt{10}<1 \\ |z_2| &= 3+\sqrt{10}>1 \end{aligned}$$

Luego z_2 está fuera de la circunferencia, mientras que z_1 está dentro. El valor de la integral es:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}+\operatorname{sen} t}dt &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2+2\sqrt{10}zi-1}, \left(-\sqrt{10}+3\right)i\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to\left(-\sqrt{10}+3\right)i} \left(z-\left(-\sqrt{10}+3\right)i\right)\frac{2}{\left(z-\left(-\sqrt{10}+3\right)i\right)\left(z-\left(-\sqrt{10}-3\right)i\right)} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to\left(-\sqrt{10}+3\right)i} \frac{2}{\left(z-\left(-\sqrt{10}-3\right)i\right)} \\ &= 2\pi i \frac{2}{\left(\left(-\sqrt{10}+3\right)i-\left(-\sqrt{10}-3\right)i\right)} \\ &= 2\pi i \frac{2}{6i} \\ &= \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

6. Resuelva cada apartado de forma independiente:

   a) **(0.4 puntos)** Usando la definición, demuestre que la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1 + t\cdot h_3(t)$, es la función de variable compleja

   $$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}\right); \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

   donde $h_3(t)$ es la función de Heaviside de parámetro 3.

   b) **(1.4 puntos)** Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

   $$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + y(t) = 1 + t\cdot h_3(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución:

a) Utilizando linealidad

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[1+t\cdot h_3(t)](z) = \mathcal{L}[1](z) + \mathcal{L}[th_3(t)](z)$$

El primer término es la transformada de Laplace de $h_0(t)$

$$\mathcal{L}[h_0](s) = \int_0^\infty h_0(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{1}{z}$$

para el segundo

$$\mathcal{L}[t](z) = \int_0^\infty th_3(t)e^{-zt}dt = \int_3^\infty te^{-zt}dt$$

integrando por partes con $u = t$ y $dv = e^{-zt}dt$, es decir, $du = dt$ y $v = -\frac{1}{z}e^{-zt}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t](s) &= \int_3^\infty te^{-zt}dt = -t\frac{1}{z}e^{-zt}\Big|_{t=3}^{t\to\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{z}dt \\
&= \frac{3}{z}e^{-3z} + \left(-\frac{1}{z^2}e^{-zt}\right)\Big|_{t=3}^{t\to\infty} \\
&= \frac{3}{z}e^{-3z} + \frac{1}{z^2}e^{-3z}.
\end{aligned}$$

Sumando obtenemos la transformada de $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z}e^{-3z} + \frac{1}{z^2}e^{-3z} = \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z}\right).$$

También es posible utilizar las propiedades de la transformada de Laplace, concretamente el 2^o teorema de traslación para el cálculo de $\mathcal{L}[th_3(t)](z)$.

$$\mathcal{L}[f(t-a)h_a(t)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f(t)](z)$$

Identificando tendremos

$$\begin{aligned}
a &= 3 \\
f(t-3) &= t
\end{aligned}$$

por tanto tendremos

$$f(t) = t + 3$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[th_3(t)](z) &= e^{-3z}\mathcal{L}[t+3](z) = e^{-3z}(\mathcal{L}[t](z) + 3\mathcal{L}[1](z)) = \\
& e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right),
\end{aligned}$$

como antes.

$b)$ Denotemos por

$$Y(z) = \mathcal{L}[y](s),$$
$$x(t) = 1 + t \cdot h_3(t),$$

por el apartado anterior

$$X(z) = \mathcal{L}[x(t)](z)) = \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z}\right).$$

Entonces utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) - 4(zY(z) - y(0)) + Y(z) = X(z)$$

de donde

$$\left(z^2Y(z) - z\right) - 4(zY(z) - 1) + Y(z) = X(z)$$

$$\begin{aligned}
\left(z^2 - 4z + 1\right)Y(z) - z + 4 &= \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z}\right) \\
\left(z^2 - 4z + 1\right)Y(z) &= \frac{1}{z} + z - 4 + e^{-3z}\left(\frac{3z+1}{z^2}\right) \\
\left(z^2 - 4z + 1\right)Y(z) &= \frac{z^2 - 4z + 1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{3z+1}{z^2}\right)
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$Y(z) = \frac{1}{z} + e^{-3z}\left(\frac{3z+1}{z^2(z^2 - 4z + 1)}\right).$$

Calculamos los ceros del polinomio $\left(z^2-4z+1\right)$

$$\left(z^2-4z+1\right)=0 \Leftrightarrow z=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

y si definimos por comodidad $\alpha=2+\sqrt{3}$ y $\beta=2-\sqrt{3}$, entonces

$$z^2-4z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$$

y podemos expresar $Y(z)$ como

$$Y(z)=\frac{1}{z}+e^{-3z}\left(\frac{3z+1}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}\right).$$

Obtenemos $y(t)$ tomando la transformada inversa de $Y(z)$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t).$$

Primero por linealidad podemos poner:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3z}\left(\frac{3z+1}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}\right)\right](t)$$

y utilizando el segundo teorema de traslación

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+h_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3z+1}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}\right](t-3)$$

En el primer término la inversa es directa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)=h_0(t),$$

para el segundo podemos utilizar residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3z+1}{z^2(z-2)^2}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)=\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),\alpha\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),\beta\right).$$

Para $F(z)$

$$z=0 \text{ polo doble de } F(z) \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),0\right)&=\lim_{z\to 0}\tfrac{1}{1!}\tfrac{d}{dz}z^2e^{zt}F(z)=\lim_{z\to 0}\tfrac{d}{dz}e^{zt}\tfrac{3z+1}{(z^2-4z+1)}\\&=\lim_{z\to 0}te^{zt}\tfrac{3z+1}{(z^2-4z+1)}+e^{zt}\tfrac{3\left(z^2-4z+1\right)-(2z-4)(3z+1)}{(z^2-4z+1)^2}\\&=t+7\end{aligned}$$

$$z=\alpha \text{ polo simple de } F(z) \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),\alpha\right)&=\lim_{z\to\alpha}\tfrac{1}{1!}(z-\alpha)e^{zt}F(z)=\lim_{z\to\alpha}e^{zt}\tfrac{3z+1}{z^2(z-\beta)}=\\&=e^{\alpha t}\tfrac{3\alpha+1}{\alpha^2(\alpha-\beta)}=e^{\left(2+\sqrt{3}\right)t}\tfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)+1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 2\sqrt{3}}=\tfrac{13\sqrt{3}-21}{6}e^{\left(2+\sqrt{3}\right)t}\end{aligned}$$

$$z=\beta \text{ polo simple de } F(z) \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),\beta\right)&=\lim_{z\to\beta}\tfrac{1}{1!}(z-\beta)e^{zt}F(z)=\lim_{z\to\beta}e^{zt}\tfrac{3z+1}{z^2(z-\alpha)}=\\&=e^{\alpha t}\tfrac{3\beta+1}{\beta^2(\beta-\alpha)}=e^{\left(2-\sqrt{3}\right)t}\tfrac{3\left(2-\sqrt{3}\right)+1}{-\left(2-\sqrt{3}\right)^2 2\sqrt{3}}=\tfrac{-13\sqrt{3}-21}{6}e^{\left(2-\sqrt{3}\right)t}\end{aligned}$$

La solución será

$$y(t)=(t+7)+h_3(t)\left(\frac{13\sqrt{3}-21}{6}e^{\left(2+\sqrt{3}\right)(t-3)}-\frac{13\sqrt{3}+21}{6}e^{\left(2-\sqrt{3}\right)(t-3)}\right)$$

7. Resuelva cada apartado de forma independiente.

   a) **(0.4 puntos)** Usando la definición, demuestre que la transformada $\mathcal{Z}$ de la sucesión $x_n=3^n$, es la función de variable compleja

$$X(z)=\frac{z}{(z-3)};\quad |z|>3$$

b) **(1.0 puntos)** Resuelva mediante la transformada $\mathcal{Z}$ el siguiente problema de valor inicial en tiempo discreto:

$$\left\{\begin{array}{rl} y_{n+2} - 16y_n = 3^n, & \quad n \geq 0, \\ y_0 = 0, & \\ y_1 = 2. & \end{array}\right.$$

c) **(0.4 puntos)** Calcule y_2 mediante la ecuación y también mediante la solución obtenida; compruebe que ambos resultados coinciden.

Solución:

a) Aplicamos la definición

$$\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n,$$

la serie es la suma de una progresión geométrica de razón $\frac{3}{z}$, para la que tal y como indica el enunciado ocurre

$$\left|\frac{3}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{z}\right| = \frac{|3|}{|z|} = \frac{3}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > 3.$$

Su suma es

$$\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{\frac{z-3}{z}} = \frac{z}{z-3}.$$

b) Aplicaremos la transformada $\mathcal{Z}$ y sus propiedades: linealidad y desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2} - 16y_n\right](z) = \mathcal{Z}\left[3^n\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z) - 16\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) = \mathcal{Z}\left[3^n\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[y_n\right](z) &= Y(z) \\ \mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right](z) &= z\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) - zy_0 = zY(z) \\ \mathcal{Z}\left[y_{n+2}\right](z) &= z^2\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z) - 2z \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} \left(z^2Y(z) - 2z\right) - 16Y(z) &= \mathcal{Z}\left[3^n\right](z) \\ \left(z^2 - 16\right)Y(z) - 2z &= \mathcal{Z}\left[3^n\right](z) \end{aligned}$$

y despejando

$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}\left[3^n\right](z) + 2z}{\left(z^2 - 16\right)}$$

Por el apartado anterior

$$\mathcal{Z}\left[3^n\right](z) = \frac{z}{z-3}; \quad |z| > 3$$

por tanto

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-3} + 2z}{\left(z^2 - 16\right)} = \frac{z + 2z(z-3)}{(z-3)\left(z^2 - 16\right)} = \frac{2z^2 - 5z}{(z-3)(z-4)(z+4)}$$

Para obtener el valor de y_n tendremos que calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{2z^2 - 5z}{(z-3)(z-4)(z+4)}\right)$$

Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa, hay que encontrar las raíces del denominador y hacer la descomposición de la función racional en fracciones simples,tenemos:

$$F(z) = \frac{2z^2 - 5z}{(z-3)(z-4)(z+4)} = \left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-4} + \frac{C}{z+4}\right)$$

A continuación desarrollamos cada fracción en series de Laurent dentro de conjuntos de la forma $A(0, r, \infty)$, es decir en el exterior de bolas de centro 0 y radio r, en todas hay que hacer la misma operación, transformar la fracción para poder emplear la suma de una serie geométrica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{z^n}^{n-1} \quad \text{si } |z| > 3 \\
\frac{1}{z-4} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4)^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z| > 4 \\
\frac{1}{z+4} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{4}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4)^{n-1}}{z^n} \quad \text{si } |z| > 4
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión para $F(z)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-4} + \frac{C}{z+4}\right) &= \left(A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4)^{n-1}}{z^n} + C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4)^{n-1}}{z^n}\right) \quad \text{si } |z| > 4 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A3^{n-1} + B4^{n-1} + C(-1)^{n-1}4^{n-1}\right)\frac{1}{z^n} \quad |z| > 4
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z son los elementos de la sucesión que buscamos. Vemos que

$$y_0 = 0$$

mientras que para $n \geq 1$

$$y_n = \left(A3^{n-1} + B4^{n-1} + C(-1)^{n-1}4^{n-1}\right)$$

Vamos a calcular A y B de la descomposición en fracciones simples

$$\frac{2z^2 - 5z}{(z-3)(z-4)(z+4)} = \left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-4} + \frac{C}{z+4}\right)$$

por tanto

$$A(z-4)(z+4) + B(z-3)(z+4) + C(z-3)(z-4) = 2z^2 - 5z$$

de donde

$$\begin{aligned}
\text{Si } z &= 3 \Rightarrow A(3-4)(3+4) = 2 \Rightarrow A = \frac{3}{(-1)(7)} = -\frac{3}{7} \\
\text{Si } z &= 4 \Rightarrow B(4-3)(4+4) = 12 \Rightarrow B = \frac{12}{(1)(8)} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

: -7

$$\text{Si } z = -4 \Rightarrow C(-4-3)(-4-4) = 52 \Rightarrow C = \frac{52}{(-7)(-8)} = \frac{13}{14}$$

Y la expresión de y_n será

$$y_n = \left(\left(-\frac{3}{7}3^{n-1} + \frac{3}{2}4^{n-1} + \frac{13}{14}(-1)^{n-1}4^{n-1}\right)\right) = -\frac{1}{7}3^n + \frac{3}{8}4^n - \frac{13}{56}(-1)^n(4)^n =$$

Podemos comprobar el valor de y_1

$$y_1 = -\frac{1}{7}3^n + \frac{3}{8}4^{n-1} - \frac{13}{56}(-1)^n(4)^n\Big|_{n=1} = -\frac{1}{7}3 + \frac{3}{8}4 + \frac{13}{56}4 = 2$$

c) Para calcular y_2 utilizando la ecuación que es válida para $n \geq 0$, observamos que hay que elegir $n = 0$, para obtener

$$y_{n+2} - 16y_n = 3^n\big|_{n=0} \Rightarrow y_2 - 16y_0 = 3^0 \Rightarrow y_2 = 1,$$

mientras que utilizar la solución general

$$y_2 = y_n|_{n=2} = -\frac{1}{7}3^n + \frac{3}{8}4^n - \frac{13}{56}\left(-1\right)^n\left(4\right)^n\bigg|_{n=2} = -\frac{1}{7}3^2 + \frac{3}{8}4^2 - \frac{13}{56}\left(-1\right)^2\left(4\right)^2 = 1,$$

que coincide, como no podía ser de otra forma, con el obtenido mediante la ecuación.