Matemáticas II
Grado Ingeniería Eléctrica/Electrónica Industrial y Automática

Examen de problemas, 20 de septiembre de 2014

1. **(1 punto)** Encuentre en $\mathbb{C}$ los complejos para los cuales sucede

$$\operatorname{sen}(z) = \cos(z)$$

Nota: No se aceptará ninguna respuesta que no esté razonada y que no utilice teoría de variable compleja.

Solución: Si utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en términos de la función exponencial podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2}$$

Haciendo el cambio:

$$e^{iz} = w$$

y como $e^{iz} \neq 0$ se deduce que:

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w - \dfrac{1}{w}}{2i} = \frac{w + \dfrac{1}{w}}{2} \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2iw} = \frac{w^2 + 1}{2w}$$

Multiplicamos toda la ecuación por el valor no nulo $2wi$

$$w^2 - 1 = i\left(w^2 + 1\right)$$

o de forma equivalente

$$(1 - i)\, w^2 - (1 + i) = 0$$

obviamente podemos deducir que

$$w^2 = \frac{(1 + i)}{(1 - i)} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$$

Por tanto

$$w = \sqrt{i}$$

Como en forma ponencial podemos poner $i = e^{i\pi/2}$, aplicando la definición de raíz n–ésima de un complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi_k} \qquad \text{con } \varphi_k = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

obtenemos para este caso donde $n = 2$, $|z| = 1$ y $\theta_z = \frac{\pi}{2}$, dos soluciones

$$w_1 = e^{i\pi/4}$$

$$w_2 = e^{i5\pi/4}$$

Teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio , $e^{iz} = w$, tendremos

$$w_1 = e^{i\pi/4} = e^{iz_1}$$

$$w_2 = e^{i5\pi/4} = e^{iz_2}$$

como $e^z = e^{z+2k\pi i}$ se cumple

$$z_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

2. **(1s punto)** Determine los puntos para los que la siguiente función:

$$f(x,y) = \left(x^3 + y + 4\right) + i\left(y^3 - x - 4\right)$$

es derivable y encuentre la derivada en esos puntos.

Solución: Para que $f(z) = u + iv$ sea es derivable en un complejo $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto:

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \Rightarrow \begin{cases} u_x(x_0,y_0) = 3x_0^2 \\ \\ v_y(x_0,y_0) = 3y_0^2 \end{cases} \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0)\, y \Rightarrow \begin{cases} u_y(x_0,y_0) = 1 \\ \\ v_x(x_0,y_0) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann se cumple para cualquier valor (x_0, y_0) ya que $u_y = -v_x$. Para la primera ecuación

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3y_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - y_0^2 = 0 \Rightarrow (x_0 - y_0)(x_0 + y_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = -y_0 \end{cases}$$

y los puntos donde la función $f(z)$ es derivable son:

$$P_1 = (x_0, x_0)$$

$$P_2 = (x_0, -x_0)$$

Calculamos la derivada de $f(x,y)$ en esos punto utilizando su definición

$$f'(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x = 3x_0^2 - i$$

Para P_1

$$f'(x_0,x_0) = u_x(x_0,x_0) + iv_x(x_0,x_0) = 3x_0^2 - i$$

mientras que para P_2

$$f'(x_0,-x_0) = u_x(x_0,-x_0) + iv_x(x_0,-x_0) = 3x_0^2 - i$$

3. **(1.5 puntos)** Determine la serie de Laurent de $f(z)$ en el anillo qu4e se indica, indicando su parte regular y su parte singular

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} \qquad \text{en} \qquad 1 < |z| < 2$$

Solución: Buscamos la descomposición en factores simples de $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+i)(z-i1)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-2}$$

Calculamos los coeficientes A, B y C :

$$A(z+i)(z-2) + B(z-i)(z-2) + C(z+i)(z-i) = z^2 - 2z + 5$$

$$\begin{aligned} z &= i \Rightarrow A(2i)(i-2) = i^2 - 2i + 5 \Rightarrow A(-2-4i) = -2i - 4 \Rightarrow A = i \\ z &= i- \Rightarrow B(-2i)(-i-2) = (-i)^2 - 2(-i) + 5 \Rightarrow B(-2+4i) = 2i + 4 \Rightarrow B = -i \\ z &= 2 \Rightarrow C(2+i)(2-i) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 \Rightarrow 5C = 5 \Rightarrow C = 1 \end{aligned}$$

de donde

$$f(z) = \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} + \frac{1}{z-2}$$

Como $1 < |z| < 2$, entonces

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ con } \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

Para las otras dos fracciones tenemos dos opciones, la primera es considerar cada fracción individualmente, teniendo en cuenta que en este caso $\left|\frac{z}{i}\right| = \left|\frac{z}{-i}\right| = |z| > 1$, luego

$$\frac{i}{z-i} = \frac{i}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}$$

$$-\frac{i}{z+i} = -\frac{i}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = -\frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^n}$$

La segunda opción es sumar ambas fracciones

$$\begin{aligned} \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} &= \frac{iz - 1 - iz - 1}{z^2+1} = -\frac{2}{1+z^2} = -\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = -\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{1}{z^{2n}} \end{aligned}$$

La función tendrá el siguiente desarrollo de Laurent

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

Finalmente

$$\text{Parte Regular} \quad : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\text{Parte Esencial:} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left(1 + (-1)^n\right) \frac{1}{z^n} = \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2 (-1)^n \frac{1}{z^{2n}}$$

4. **(1.5 puntos)** Sea γ la circunferencia centrada en el origen, radio $R > 0$, y orientada positivamente. Determine en función de R el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)} dz$$

Solución: La curva del problema es cerrada y la función del integrando es un cociente de funciones derivables, por tanto podemos aplicar el *Teorema de los Residuos*. Buscamos en primer lugar las singularidades del integrando y que son los complejos que anulan el denominador

$$z^2 (z-2) = 0$$

es decir

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \text{ raíz doble} \\ &\quad \text{o} \\ z_2 &= 2 \text{ raíz simple} \end{aligned}$$

Hay que notar que ni z_1, ni z_2 anulan el numerador ya que $e^{-z} \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, por tanto z_1 será un polo doble y z_2 un polo simple.

Para resolver el problema hay que comprobar cuándo las singularidades caen dentro de la curva, como el radio de la circunferencia es variable y depende del parámetro R, en función de ese valor la circunferencia contendrá o no las singularidades.

Calculamos la distancia de cada singularidad al centro de la circunferencia

$$d(z_1, 0) = d(0,0) = 0$$

$$d(z_2, 0) = d(2,0) = 2$$

Como $R > 0$, se deduce que z_1 siempre estará en el interior de la curva, independientemente del valor que tome, para z_2 estará dentro siempre que $R > 2$, pero estára fuera cuando ocurra lo contrario. Distinguimos por tanto dos casos:

a) $0 < R < 2$

$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)} dz = 2\pi i \,\text{Res} \left(\frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)}, 0 \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

b) $0 < R < 2$

$$\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)} dz = 2\pi i \left[\text{Res} \left(\frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)}, 0 \right) + \text{Res} \left(\frac{e^{-z}}{z^2 (z-2)}, 2 \right) \right] = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} \right)$$

Los residuos en cada singularidad se han calculado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \text{ (polo doble) } \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-z}}{z^2(z-2)},0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{0!}\frac{d}{dz}z^2\frac{e^{-z}}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^{-z}}{(z-2)} = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-e^{-z}(z-2)-e^{-z}}{(z-2)^2} = \frac{-1(0-2)-1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$z_1 = 2 \text{ (polo simple) } \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-z}}{z^2(z-2)},2\right) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{-z}}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{e^{-2}}{4}$$

5. **(1.75 puntos)** Comprueba, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos t}{3+2\cos t}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-2\right)$$

Solución: Es una integral real de una función trigonométrica. Haciendo los cambios correspondientes

$$\begin{gathered}
e^{it} = z \\
\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\
dt = \frac{1}{iz}dz
\end{gathered}$$

la integral queda

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos t}{3+2\cos t}dt &= \int_\gamma \frac{1+2\frac{z^2+1}{2z}}{3+2\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dt \\
& \int_\gamma \frac{1+\frac{z^2+1}{z}}{3+\frac{z^2+1}{z}}\frac{1}{iz}dt \\
&= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{\frac{z^2+z+1}{z}}{z^2+3z+1}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}dt
\end{aligned}$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$ con $t\in[0,2\pi]$, la circunferencia unidad. Para esta función racional las singularidades son los ceros del denominador

$$z\left(z^2+3z+1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \\ \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Tenemos tres raíces

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\
z_2 &= \frac{-3-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Tenemos que comprobar ahora cuales de estas singularidades están dentro de la curva (circunferencia de centro 0 y radio 1) y serán las que contribuyan al cálculo de la integral;

$$d(z_0, 0) = d(0,0) = |0-0| = 0 < 1 \Rightarrow z_0 \in \mathring{\gamma}$$

$$d(z_1, 0) = d\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \left|\frac{-3+\sqrt{5}}{2} - 0\right| = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 1 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}$$

$$d(z_2, 0) = d\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \left|\frac{-3-\sqrt{5}}{2} - 0\right| = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow z_2 \notin \mathring{\gamma}$$

Finalmente la integral será

$$\frac{1}{i}\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}dt = \frac{1}{i}2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\tfrac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\tfrac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}, \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-2\right)$$

Los residuos en cada singularidad se han calculado como sigue:

$$z_0 = 0 \text{ (polo simple) } \Rightarrow \mathrm{Res}\left(\tfrac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z\frac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^2+z+1}{z^2+3z+1} = 1$$

$$z_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \text{ (polo simple) } \Rightarrow \mathrm{Res}\left(\tfrac{z^2+z+1}{z(z^2+3z+1)}, \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\left(z - \tfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\tfrac{(z^2+z+1)}{z(z^2+3z+1)}$$

$$= \lim_{z\to\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\left(\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

6. **(1.75 puntos)** Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t) \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$\mathsf{f}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$

Comprueba que la solución obtenida cumple las condiciones iniciales, así como la ecuación diferencial.

Solución: Utilizando la Transformada de Laplace con esta ecuación:

- *Utilizando Linealidad:*
$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z)+2\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z)+\mathcal{L}\left[y(t)\right](z)=\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) \tag{1}$$
- *Derivada de la función transformada:*
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) &= Y(z)\\ \mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z)-y(0)\\ \mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z)-zy(0)-y'(0)\end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales del problema
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) &= Y(z)\\ \mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z)\\ \mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z)\end{aligned}$$
y sustituyendo en la ecuación 1
$$z^2Y(z)+2zY(z)+Y(z)=\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$$
Para el cálculo de $\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$ teniendo en cuenta que utilizando la función de Heaviside $f(t)$ se puede expresar como
$$f(t)=(h_0(t)-h_5(t))$$
entonces
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)=\mathcal{L}\left[h_0(t)-h_5(t)\right](z)=\mathcal{L}\left[h_0(t)\right](z)-\mathcal{L}\left[h_5(t)\right](z)$$
para $h_a(t)$ tenemos
$$\mathcal{L}\left[h_a(t)\right](z)=\frac{e^{-az}}{z}$$
luego
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)=\mathcal{L}\left[h_0(t)\right](z)-\mathcal{L}\left[h_5(t)\right](z)=\frac{1}{z}-\frac{e^{-5z}}{z}$$

Observación: También podríamos utilizar la definición directa
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}dt=\int_0^5 e^{-zt}dt+\int_5^\infty 0\cdot e^{-zt}dt=\int_0^5 e^{-zt}dt$$
que integramos directamente
$$\int_0^5 e^{-zt}dt=-\frac{1}{z}e^{-zt}\bigg|_{t=0}^{t=5}=-\frac{1}{z}e^{-5z}+\frac{1}{z}$$
que obviamente coincide con lo obtenido anteriormente.

Si despejamos $Y(z)$ se obtiene
$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)}{(z^2+2z+1)}=\frac{\frac{1}{z}-\frac{e^{-5z}}{z}}{(z^2+2z+1)}\\ &= \frac{1-e^{-5z}}{z\left(z^2+2z+1\right)}\\ &= \frac{1}{z\left(z+1\right)^2}-\frac{e^{-5z}}{z\left(z+1\right)^2}\\ &= Y_1(z)-e^{-5z}Y_1(z)\end{aligned}$$

Encontraremos $y\left(t\right)$ mediante la transformada inversa de Laplace

$$y\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y\left(z\right)\right]\left(t\right)$$

que por linealidad

$$y\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y_1\left(z\right)\right]\left(t\right)-\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-5z}Y_1\left(z\right)\right]\left(t\right)=y_1\left(t\right)-y_2\left(t\right)$$

y utilizando el 2^a teorema de traslación

$$y_2\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-5z}Y_1\left(z\right)\right]\left(t\right)=h_5\left(t\right)\mathcal{L}^{-1}\left[Y_1\left(z\right)\right]\left(t-5\right)=h_5\left(t\right)y_1\left(t-5\right)$$

Calculamos la inversa de $Y_1\left(z\right)$ mediante la fórmula de inversión de Bromwich por residuos

$$y\left(t\right)=\sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y\left(z\right),z_k\right)$$

Las singularidades de $Y_1\left(z\right)$ son

$$\begin{aligned}z_0&=0\Rightarrow\text{ Polo simple}\\z_1&=-1\Rightarrow\text{ Polo doble}\end{aligned}$$

siendo los residuos para $Y_1\left(z\right)$ en esas singularidades

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1\left(z\right),0\right)=\lim_{z\to0}ze^{zt}Y_1\left(z\right)=\lim_{z\to0}\frac{e^{zt}}{(z+1)^2}=1$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1\left(z\right),-1\right)=\lim_{z\to-1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z+1\right)^2e^{zt}Y_1\left(z\right)=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z}=\lim_{z\to-1}\frac{te^{zt}z-e^{zt}}{z^2}=-te^{-t}-e^{-t}$$

Sumando los dos residuos obtenemos la función $y_1\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y_1\left(z\right)\right]\left(t\right)$

$$y_1\left(t\right)=1-\left(t+1\right)e^{-t}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de traslación la función buscada será

$$y\left(t\right)=y_1\left(t\right)-y_1\left(t-5\right)\cdot h_5\left(t\right)=\left(1-\left(t+1\right)e^{-t}\right)-\left(1-\left(t-4\right)e^{-(t-5)}\right)\cdot h_5\left(t\right)$$

Comprobamos que se cumplen las condiciones iniciales y la EDO, para ello calculamos $y'\left(t\right)$ e $y''\left(t\right)$, lo hacemos en función de $y_1\left(t\right)$ que es más manejable

$$y'\left(t\right)=y_1'\left(t\right)-y_1'\left(t-5\right)\cdot h_5\left(t\right)$$

$$y''\left(t\right)=y_1''\left(t\right)-y_1''\left(t-5\right)\cdot h_5\left(t\right)$$

donde

$$y_1'\left(t\right)=-e^{-t}+\left(t+1\right)e^{-t}=te^{-t}$$

$$y_1''\left(t\right)=e^{-t}-te^{-t}=\left(1-t\right)e^{-t}$$

Las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}y\left(0\right)&=y_1\left(0\right)-y_1\left(-5\right)h_5\left(0\right)\\&=1-\left(0+1\right)e^{-0}-y_1\left(-5\right)\cdot0=0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= y_1'(0) - y_1'(-5)\, h_5(0) \\
&= 0 - y_1'(-5) \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

y la EDO

$$
\begin{aligned}
y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= \big(y_1''(t) - y_1''(t-5) \cdot h_5(t)\big) \\
&\quad +2\big(y_1'(t) - y_1'(t-5) \cdot h_5(t)\big) \\
&\quad +y_1(t) - y_1(t-5) \cdot h_5(t) \\
&= \big(y_1''(t) + 2y_1'(t) + y_1(t)\big) \\
&\quad -\big(y_1''(t-5) + 2y_1'(t-5) + y_1(t-5)\big) \cdot h_5(t)
\end{aligned}
$$

Desarrollamos cada término

$$
\begin{aligned}
y_1''(t) + 2y_1'(t) + y_1(t) &= (1-t)\, e^{-t} + 2te^{-t} + 1 - (t+1)\, e^{-t} \\
&= (1 - t + 2t - t - 1)\, e^{-t} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1''(t-5) + 2y_1'(t-5) + y_1(t-5) &= (1-(t-5))\, e^{-(t-5)} + 2(t-5)\, e^{-(t-5)} + 1 - ((t-5)+1)\, e^{-(t-5)} \\
&= (6-t)\, e^{-(t-5)} + 2(t-5)\, e^{-(t-5)} - (t-4)\, e^{-(t-5)} + 1 \\
&= (6 - t + 2t - 10 - t + 4)\, e^{-(t-5)} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

es decir

$$
y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1 - 1 \cdot h_5(t) = h_0(t) - h_5(t)\,.
$$

7. **(1 punto)** Utilizando las propiedades adecuadas, calcula la transformada Z de la siguiente sucesión:

$$
x_n = (n+1)^2\, 2^n
$$

Solución: Podemos desarrollar

$$
x_n = \left(n^2 + 2n + 1\right) 2^n = n^2 2^n + 2n2^n + 2^n
$$

y emplear la linealidad para poner

$$
\mathcal{Z}[x_n](z) = \mathcal{Z}\left[n^2 2^n + 2n2^n + 2^n\right](z) = \mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) + 2\mathcal{Z}[n2^n](z) + \mathcal{Z}[2^n](z)
$$

y después la potenciación para poner

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \mathcal{Z}[2^n](z) \\
\mathcal{Z}[n2^n](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right) \mathcal{Z}[2^n](z)
\end{aligned}
$$

sólo queda calcular $\mathcal{Z}[2^n](z)$, que se puede hacer de forma directa o mediante propiedades:

$$
\mathcal{Z}[2^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}
$$

y aplicar el operador $\left(-z\frac{d}{dz}\right)$ en cada caso

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n2^n\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)\mathcal{Z}\left[2^n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-2}\right) = -z\frac{(z-2)-z}{(z-2)^2} = \frac{2z}{(z-2)^2} \\
\mathcal{Z}\left[n^2 2^n\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2\mathcal{Z}\left[2^n\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-2}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(z-2)^2}\right) \\
&= -z\frac{2(z-2)^2 - 2(z-2)\,2z}{(z-2)^4} = -z\frac{2(z-2)-4z}{(z-2)^3} = \frac{2z^2+4z}{(z-2)^3}
\end{aligned}$$

La transformada buscada será

$$\mathcal{Z}\left[x_n\right](z) = \frac{2z^2+4z}{(z-2)^3} + 2\frac{2z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-2} = \frac{z^2(z+2)}{(z-2)^3}$$

Observación: También es posible utilizar la propiedad de exponenciación

$$\mathcal{Z}\left[y_n a^n\right](z) = \mathcal{Z}\left[y_n\right]\left(\frac{z}{a}\right)$$

de donde

$$\mathcal{Z}\left[(n+1)^2\,2^n\right](z) = \mathcal{Z}\left[(n+1)^2\right]\left(\frac{z}{2}\right)$$

mientras que para

$$\mathcal{Z}\left[(n+1)^2\right](z)$$

podemos emplear la propiedad de desplazamiento

$$\mathcal{Z}\left[y_{n+1}\right](z) = z\mathcal{Z}\left[y_n\right](z) - zy_0$$

para calcular

$$\mathcal{Z}\left[(n+1)^2\right](z) = z\mathcal{Z}\left[n^2\right](z) - z\cdot 0 = z\mathcal{Z}\left[n^2\right](z)$$

finalmente tendremos que utilizar la propiedad de potenciación descrita antes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[n^2\right](z) &= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2\mathcal{Z}\left[1\right](z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1}\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) \\
&= -z\frac{(z-1)^2 - 2(z-1)\,z}{(z-1)^4} \\
&= -z\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3} \\
&= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{Z}\left[(n+1)^2\right](z)=\frac{z^2\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

y

$$\mathcal{Z}\left[(n+1)^2\,2^n\right](z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2\left(\frac{z}{2}+1\right)}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^3}=\frac{\frac{z^2}{4}\left(\frac{z+2}{2}\right)}{\left(\frac{z-2}{2}\right)^3}=\frac{z^2\,(z+2)}{(z-2)^3}$$

que coincide obviamente con lo obtenido antes.