Matemáticas II

Grado Ingeniería Eléctrica/Electrónica Industrial y Automática

Examen de problemas, 28 de junio de 2014

1. Encuentre en $\mathbb{C}$ las singularidades de la siguiente función, indicando su tipo y calculando, si procede, sus correspondientes residuos:

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \sqrt{3}}$$

Solución: Las singularidades de $f(z)$ son los ceros del denominador, por tanto debemos resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \sqrt{3} = 0$$

Utilizamos la definición de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en términos de la función exponencial para reescribir la ecuación como

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) - \sqrt{3} = 0$$

Si hacemos el cambio

$$e^{iz} = w$$

como $w \neq 0$ se deduce que:

$$e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}} = \frac{1}{w}$$

De esta forma se obtiene una ecuación en la variable w

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} + \frac{w + \frac{1}{w}}{2} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \frac{w^2 - 1}{2wi} + \frac{w^2 + 1}{2w} - \sqrt{3} = 0$$

Multiplicamos toda la ecuación por el valor no nulo $2wi$ y obtenemos una ecuación de segundo grado

$$\left(w^2 - 1\right) + i\left(w^2 + 1\right) - 2wi\sqrt{3} \Rightarrow (1+i)\, w^2 - 2wi\sqrt{3} + (i-1) = 0$$

que podemos resolver fácilmente mediante la correspondiente fórmula de segundo grado

$$w = \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(2i\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot(1+i)(i-1)}}{2\cdot(1+i)} = \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2(1+i)} = \frac{2i\sqrt{3} \pm 2i}{2(1+i)} = \left(\sqrt{3} \pm 1\right)\frac{i}{(1+i)}$$

obteniendo dos soluciones

$$w_1 = \left(\sqrt{3} + 1\right)\frac{i}{(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$$

$$w_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{i}{(1+i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)$$

Con estos valores para w_1 y w_2 y teniendo en cuenta el cambio que se hizo al principio del ejercicio obtendremos, usando la definición de logaritmo complejo $e^{iz} = w \Rightarrow iz = \log w$. Para el cálculo de estos logaritmos necesitamos la forma exponencial de w_1 y w_2 que es claramente

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$$

por lo que

$$iz_1 = \log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \Rightarrow z_1 = -i\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$iz_2 = \log\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \Rightarrow z_2 = -i\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

Todas las singularidades son polos simples ya que como hemos visto anulan el denominador, pero su derivada

$$D(z) = \operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \sqrt{3} \Rightarrow D'(z) = \cos z - \operatorname{sen} z$$

se anula en

$$D'(z) = \cos z - \operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \cos z = \operatorname{sen} z \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

que no coincide con ninguno de los anteriores, por tanto son ceros simples de $D(z)$ y polos simples de $f(z)$.

Para el cálculo de los residuos en estos polos simples utilizamos la expresión

$$\operatorname{Res}(f(z), z_k) = \lim_{z\to z_k} (z-z_k) f(z)$$

que al aplicar directamente

$$\lim_{z\to z_k} (z-z_k) \frac{1}{\operatorname{sen}(z)+\cos(z)-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}$$

y por tanto debemos utilizar L'Hôpital

$$\operatorname{Res}(f(z), z_k) = \lim_{z\to z_k} (z-z_k) \frac{1}{\operatorname{sen}(z)+\cos(z)-\sqrt{3}} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\cos(z)-\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{\cos(z_k)-\operatorname{sen}(z_k)}$$

Podemos dejar este resultado indicado o podemos simplificarlo como sigue: En primer lugar tenemos en cuenta que para z_k se cumple

$$\operatorname{sen}(z_k) + \cos(z_k) - \sqrt{3} = 0$$

por ser un cero del denominador, de donde

$$\operatorname{sen}(z_k) = \sqrt{3} - \cos(z_k)$$

y sustituyendo en la expresión del Residuo

$$\operatorname{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{\cos(z_k)-\operatorname{sen}(z_k)} = \frac{1}{\cos(z_k) - \left(\sqrt{3}-\cos(z_k)\right)} = \frac{1}{2\cos(z_k)-\sqrt{3}}$$

Sería posible simplificar aún más esta expresión utilizando la expresión de $\cos(z_k)$ y los valore de z_k, pero hasta aquí el resultado sería correcto.

2. Determine el valor o valores de la constantes reales a, b y c para que la función

$$u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

sea armónica. Determine a continuación sus armónicas conjugadas.

Solución: Para que $u(x,y)$ sea una función armónica debe cumplir la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Se deriva $u(x,y)$ respecto de x e y

$$\begin{aligned} u_x &= 2ax + by \Rightarrow u_{xx} = 2a \\ u_y &= bx + 2cy \Rightarrow u_{yy} = 2c \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación 1:

$$\underbrace{2a}_{u_{xx}} + \underbrace{2c}_{u_{yy}} = 0$$

De la ecuación anterior se deduce que para que $u(x,y)$ sea armónica debe ocurrir

$$a = -c$$

mientras que para b no hay ninguna restricción. La función debe ser de la forma

$$u(x,y) = a\left(x^2 - y^2\right) + bxy \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Para el cálculo de las armónicas conjugadas de $u(x,y)$, hay que utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Tomando, por ejemplo, la primera de estas ecuaciones (aunque como siempre esta elección es indiferente del resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 2ax + by = v_y$$

Si se integra respecto a y obtenemos la siguiente expresión para $v(x,y)$

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int (2ax + by)\, dy = 2axy + \frac{by^2}{2} + \varphi(x)$$

donde $\varphi(x)$ es constante para y; para encontrar su expresión derivamos $v(x,y)$ respecto de x

$$v_x = 2ay + \varphi'(x)$$

Utilizando la otra ecuación de Cauchy-Riemann, el opuesto de esta expresión debe coincidir con $u_y = bx - 2ay$

$$u_y = -v_x \Rightarrow bx - 2ay = -\left(2ay + \varphi'(x)\right)$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(x) = -bx$$

e integrando respecto a x se obtiene su expresión

$$\varphi(x) = -\frac{bx^2}{2} + k \in \mathbb{R}.$$

Finalmente la expresión para $v(x,y)$ será

$$v(x,y) = 2axy + \frac{by^2}{2} - \frac{bx^2}{2} + k = 2axy + \frac{b}{2}\left(y^2 - x^2\right) + k$$

y la función sería

$$f(x,y) = a\left(x^2 - y^2\right) + bxy + i\left(2axy + \frac{b}{2}\left(y^2 - x^2\right) + k\right)$$

que en términos de z se puede expresar como

$$f(z) = \left(a - \frac{b}{2}i\right)z^2 + ik$$

3. Determine los puntos para los que la siguiente función:

$$f(x,y) = \left(x^3 + 3xy^2\right) + i\left(y^3 + 3x^{2y}\right)$$

es derivable. Encuentre la derivada en esos puntos.

Solución: En los puntos en los que la función es derivable se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, un número complejo cualquiera, por tanto para que $f(x,y)$ sea derivable en z, se debe cumplir

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u_x(x_0,y_0) = 3x_0^2 + 3y_0^2 \\ \\ v_y(x_0,y_0) = \end{array}\right\} \Rightarrow 3x_0^2 + 3y_0^2 = 3x_0^2 + 3y_0^2 \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0)\,y \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u_y(x_0,y_0) = 6x_0y_0 \\ \\ v_x(x_0,y_0) = 6x_0y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x_0y_0 = -6x_0y_0 \end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann se cumple para cualquier valor (x_0,y_0) ya que $u_x = v_y$. La segunda ecuación de Cauchy-Riemann es

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow 6x_0y_0 = -6x_0y_0 \Leftrightarrow 12x_0y_0 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_0 = 0 \\ \text{ó} \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Luego los puntos donde se cumple esta ecuación y por tanto la función es derivable son

$$\begin{aligned} P_x &= (0,y_0) \\ &\text{y} \\ Q_y &= (x_0,0) \end{aligned}$$

es decir los puntos sobre los ejes cartesianos. Calculamos la derivada de $f(x,y)$ en esos puntos utilizando su definición

$$f'(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x$$

Por tanto

$$f'(P_x) = f'(iy_0) = u_x(0, y_0) + iv_x(0, y_0) = 3y_0^2$$

mientras que

$$f'(Q_y) = f'(x_0) = u_x(x_0, 0) + iv_x(x_0, 0) = 3x_0^2$$

4. Determine la serie de Laurent de cada una de las funciones en los anillos que se indican. Indica en cada una de ellas su parte regular y su parte singular

   a)
   $$f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} \text{ en } |z| > 0$$

   b)
   $$f(z) = \frac{1}{z(z-R)} \qquad \text{en } |z| < R$$

   Solución:

   a) De forma directa, teniendo en cuenta la serie de Taylor de la función exponencial
   $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
   como para $z \neq 0$ existe el complejo $\frac{1}{z}$, podemos utilizar el desarrollo anterior tanto para z, como para $\frac{1}{z}$ y obtendremos:
   $$e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

   b) Un posible desarrollo sería
   $$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-R} = \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{R}\frac{1}{1-z/R}\right) = -\frac{1}{zR}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^n = -\frac{1}{zR} - \sum_{n=0} \frac{z^n}{R^{n+2}}$$
   donde hemos tenido en cuenta que como $|z| < R$, entonces $\left|\frac{z}{R}\right| < 1$.

5. Determina el valor de la integral:
   $$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz$$
   en los siguientes casos:

   a) γ es la circunferencia de centro 0 y radio $\frac{1}{4}$.

   b) γ es la circunferencia de centro 0 y radio 1.

   c) γ es el rectángulo de vértices $-i$, $-2-i$, $-2+i$, i.

   d) γ es el rectángulo de vértices $2+i$, $-2+i$, $-2-i$, $2-i$.

Solución: Todas las curvas del problema son cerradas y la función del integrando es un cociente de funciones derivables, por tanto tendremos que aplicar el teorema de los residuos. Para ello procederemos en primer lugar a buscar las singularidades que son los complejos que anulan el denominador

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado con soluciones

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Notar que z_1 también anula el numerador

$$\cos \frac{\pi \cdot 1}{2} = 0$$

por tanto esta singularidad es de tipo evitable y su residuo será cero, por tanto no contribuye en ninguno de los cuatro caso al cálculo de la integral. Básicamente el problema consiste en comprobar cuando la otra de las singularidades cae dentro de la curva.

a) Calculamos la distancia de la singularidad al centro de la circunferencia

$$d\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

por tanto la singularidad está fuera de la curva y aplicando el teorema de Cauchy la integral es nula.

b) Calculamos la distancia de la singularidad al centro de la circunferencia

$$d\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} < 1$$

en este caso la singularidad está dentro de la curva y la integral vale

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1}, -\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{2}{3} i\sqrt{2}\pi$$

c) Para comprobar si la singularidad está o no dentro de la curva, comparamos las coordenadas de ésta $(-1/2, 0)$ con los límites del rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Eje OX} &: \quad -2 < -\frac{1}{2} < 0 \\ \text{Eje OY} &: \quad -1 < 0 < 1 \end{aligned}$$

por tanto la singularidad está dentro de la curva y la integral vale lo mismo que en el apartado anterior.

d) Como antes para comprobar si la singularidad está o no dentro de la curva, comparamos las coordenadas de ésta $(-1/2, 0)$ con los límites del rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Eje OX:} \quad -2 < & \ -\frac{1}{2} < 2 \\ \text{Eje OY:} \quad -1 < & \ 0 < 1 \end{aligned}$$

por tanto la singularidad está dentro de la curva, aunque en este caso está recorrida en sentido negativo, por tanto la integral vale justo el valor opuesto

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = \frac{2}{3} i\sqrt{2}\pi$$

6. Calcule, aplicando la teoría de variable compleja, la integral real:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos t + a^2} dt \qquad (0 < a < 1)$$

Solución: Es una integral real de una función trigonométrica. Haciendo los cambios correspondientes

$$\begin{aligned} e^{it} &= z \\ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &= \frac{z^2 + 1}{2z} \\ \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &= \frac{z^2 - 1}{2zi} \\ dt &= \frac{1}{iz} dz \end{aligned}$$

la integral queda

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos t + a^2} dt &= \int\limits_\gamma \frac{1}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2} \frac{1}{iz} dt \\ &= \frac{1}{i} \int\limits_\gamma \frac{1}{-az^2 + (1 + a^2) z - a} dt \\ &= -\frac{1}{i} \int_\gamma \frac{1}{az^2 - (1 + a^2) z + a} dz \end{aligned}$$

siendo $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia unidad. Para esta función racional las singularidades son los ceros del denominador

$$az^2 - \left(1 + a^2\right) z + a = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\left(1 + a^2\right) \pm \sqrt{\left(1 + a^2\right)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{\left(1 + a^2\right) \pm \sqrt{\left(1 - a^2\right)^2}}{2a} = \frac{\left(1 + a^2\right) \pm \left(1 - a^2\right)}{2a}$$

y tenemos dos raíces

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(1 + a^2\right) + \left(1 - a^2\right)}{2a} = \frac{1}{a} \\ z_2 &= \frac{\left(1 + a^2\right) - \left(1 - a^2\right)}{2a} = a \end{aligned}$$

Teniendo encuenta que según el enunciado del problema $a < 1$ se deduce que $\frac{1}{a} > 1$ y por tanto sólo z_2 está dentro de la curva, de donde por el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{i}\int_\gamma \frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}dz &= -\frac{1}{i}(2\pi i)\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}, a\right) \\
&= -2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}, a\right) \\
&= -2\pi\frac{1}{a\left(a-\frac{1}{a}\right)} \\
&= \frac{2\pi}{1-a^2}
\end{aligned}$$

7. Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = f(t) \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1234 \end{cases}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & t > 1 \end{cases}$$

Comprueba que la solución obtenida cumple las condiciones iniciales, así como la ecuación diferencial.

Solución: Para resolver la ecuación diferencial

$$y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1234$ aplicaremos la transformada $\mathcal{L}$ a ambos lados de la ecuación y utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento:

$$\mathcal{L}\left[y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$$

Primero la linealidad

$$\mathcal{L}\left[y'''(t)\right](z) + 6\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) + 11\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) + 6\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$$

y a continuación la propiedad de desplazamiento junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) &= Y(z) \\
\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= z\mathcal{L}\left[y(t)\right](z) - y(0) = zY(z) \\
\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) \\
\mathcal{L}\left[y'''(t)\right](z) &= z^3Y(z) - z^2y(0) - zy'(0) - y''(0) = z^3Y(z) - 1234
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} z^3 Y(z) - 1234 + 6z^2 Y(z) + 11zY(z) + 6Y(z) &= \mathcal{L}[f(t)](z) \\ \left(z^3 + 6z^2 + 11z + 6\right) Y(z) &= \mathcal{L}[f(t)](z) + 1234 \end{aligned}$$

Despejando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z) + 1234}{(z^3 + 6z^2 + 11z + 6)}$$

El valor de la transformada $\mathcal{L}[f(t)](z)$ puede obtenerse por una parte recordando el valor de la transformada de la función de Heaviside para cualquier parámetro $a > 0$:

$$\mathcal{L}[h_a(t)](z) = \frac{e^{-az}}{z} \qquad \text{si } \operatorname{Re} z > 0$$

y expresando la función $f(t)$ en términos de funciones de Heaviside:

$$f(t) = 1(h_0(t) - h_1(t)) - 1h_1(t) = h_0(t) - 2h_1(t)$$

El valor buscado será:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[h_0(t) - 2h_1(t)](z) = \mathcal{L}[h_0(t)](z) - 2\mathcal{L}[h_1(t)](z) = \frac{1}{z} - 2\frac{e^{-z}}{z} = \frac{1 - 2e^{-z}}{z}$$

y sustituyendo en la expresión de $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z) + 1234}{(z^3 + 6z^2 + 11z + 6)} = \frac{\frac{1-2e^{-z}}{z} + 1234}{(z^3 + 6z^2 + 11z + 6)} = \frac{1 - 2e^{-z} + 1234z}{z(z^3 + 6z^2 + 11z + 6)}$$

Mediante la transformada inversa obtendremos el valor de $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 - 2e^{-z} + 1234z}{z(z^3 + 6z^2 + 11z + 6)}\right](t)$$

Por linealidad

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{e^{-z}}{z(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) + 1234\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t) - 2\mathcal{L}^{-1}[Y_2(z)](t) + 1234\mathcal{L}^{-1}[Y_3(z)](t) \\ & \quad y_1(t) - 2y_2(t) + 1234y_3(t). \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de traslación

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{e^{-z}}{z(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) = h_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{z(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t-1) = h_1(t)\,y_1(t-1)$$

Calculamos las dos transformadas mediante residuos. Para ello descomponemos el polinomio (Ruffini)

$$z^3 + 6z^2 + 11z + 6 = (z+1)(z+2)(z+3)$$

Para el primer término de $y(t)$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t) \\ &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1(z),0\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1(z),-1\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1(z),-2\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_1(z),-3\right) \end{aligned}$$

Como son todos polos simples este calculo es directo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)},0\right) &= \lim_{z\to 0} z\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to 0}\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{1}{6} \\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)},-1\right) &= \lim_{z\to -1}(z+1)\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -1}\tfrac{e^{zt}}{z(z+2)(z+3)} = -\frac{e^{-t}}{2} \\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)},-2\right) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -2}\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+3)} = \frac{e^{-2t}}{2} \\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)},-3\right) &= \lim_{z\to -3}(z+3)\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -3}\tfrac{e^{zt}}{z(z+1)(z+2)} = -\frac{e^{-3t}}{6} \end{aligned}$$

por tanto

$$y_1(t) = \frac{1}{6}-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{-2t}}{2}-\frac{e^{-3t}}{6}$$

El segundo término sería

$$\begin{aligned} y_2(t) &= -2\left(\frac{1}{6}-\frac{e^{-(t-1)}}{2}+\frac{e^{-2(t-1)}}{2}-\frac{e^{-3(t-1)}}{6}\right)h_1(t) \\ &= \left(-\frac{1}{3}+e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}+\frac{1}{3}e^{-3(t-1)}\right)h_1(t) \end{aligned}$$

Y para el último término:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^3+6z^2+11z+6)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_3(z)](t) \\ &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-1\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-2\right)+\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-3\right) \end{aligned}$$

De nuevo todos los polos son simples

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-1\right) &= \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)},-1\right) = \lim_{z\to -1}(z+1)\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -1}\tfrac{e^{zt}}{(z+2)(z+3)} = \frac{e^{-t}}{2} \\ \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-2\right) &= \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)},-2\right) = \lim_{z\to -2}(z+2)\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -2}\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+3)} = -e^{-2t} \\ \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y_3(z),-3\right) &= \operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)},-3\right) = \lim_{z\to -3}(z+3)\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \lim_{z\to -3}\tfrac{e^{zt}}{(z+1)(z+2)} = \frac{e^{-3t}}{2} \end{aligned}$$

por tanto

$$y_3(t) = 1234\left(\frac{e^{-t}}{2}-e^{-2t}+\frac{e^{-3t}}{2}\right)$$

y la solución buscada se obtiene sumando todos los términos:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1233}{2}e^{-t} - \frac{2467}{2}e^{-2t} + \frac{3701}{6}e^{-3t}\right) + \left(-\frac{1}{3} + e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-3(t-1)}\right) h_1(t) \end{aligned}$$