Matemáticas II - Grado en Ingeniería Eléctrica
3 de noviembre de 2015
MODELO A - Solución

1. (2.5 puntos) Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ realice las siguientes operaciones, tanto en forma **binómica** como en forma **exponencial o polar**.

a) $z_1 z_2$,

b) $\frac{z_1}{z_2}$.

Solución: Operaciones en forma binómica

$$z_1 z_2 = (1-i)\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-i)}{(1+i\sqrt{3})} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i$$

Operaciones en forma exponencial

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$z_2 = 2e^{i\pi/3}$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i7\pi/12}$$

2. (2.5 puntos) Calcule $z = \left(-\sqrt{3}+i\right)^6 + \left(-\sqrt{3}-i\right)^6$ y exprese el resultado en forma **binómica**.

Solución: Está claro que son complejos conjugados por tanto, utilizando las propiedades

$$z^6 + \overline{z}^6 = z^6 + \overline{z^6} = 2\,\mathrm{Re}\left(z^6\right)$$

Para el cálculo de z^6, expresamos el complejo en forma exponencial

$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow z^6 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{i5\pi} = -2^6 = -128.$$

3. (2.5 puntos) Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z^4 + 64 = 0$ y exprese el resultado en forma **binómica**.

Buscamos las raíces cuartas de -64

$$z^4 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -64 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-64}$$

Poniendo -64 en forma exponencial

$$-64 = 64e^{i\pi}$$

de donde

$$|z| = \sqrt[4]{|-64|} = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$$
$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad k = 0, \ldots, 4$$

y las raíces en forma exponencial y binómica son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i \\
w_1 &= 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i \\
w_2 &= 2\sqrt{2}e^{i5\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - 2i \\
w_3 &= 2\sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - 2i
\end{aligned}$$

4. (2.5 puntos) Encuentre la parte real e imaginaria de la siguiente función

$$f(z) = z^2 e^{\overline{z}}.$$

Solución: Haciendo el cambio $z = x + iy$, obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x+iy)^2 e^{x-iy} = \left(x^2 - y^2 + i2xy\right)\left(e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y\right) \\
&= \left(\left(x^2 - y^2\right)e^x \cos y + 2xye^x \operatorname{sen} y\right) + i\left(2xye^x \cos y - \left(x^2 - y^2\right)e^x \operatorname{sen} y\right) \\
&= e^x\left(\left(x^2 - y^2\right)\cos y + 2xy \operatorname{sen} y\right) + ie^x\left(2xy \cos y - \left(x^2 - y^2\right)\operatorname{sen} y\right)
\end{aligned}$$
