Matemáticas II
Grado Ingeniería Eléctrica

Examen de problemas, 9 de febrero de 2015

1. **(0.5 puntos)** Justifique si existe una función
$$f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right),$$
que sea analítica en $\mathbb{C}$ con
$$u\left(x,y\right)=e^{y/x}.$$

2. **(1 punto)** Encuentre en $\mathbb{C}$ los complejos para los cuales sucede
$$\cos\left(2z\right)+2\sqrt{5}i=0$$

3. **(1.5 puntos)** Obtenga la serie de Laurent centradas en el punto y región que se indican:
$$f\left(z\right)=\tfrac{1}{z^3-2z^2+z}\quad \text{en} \qquad z_0=0 \text{ y } 0<|z|<1$$

4. **(1 punto)** Calcule la siguiente integral mediante la fórmula integral de Cauchy, razonando convenientemente que se puede aplicar dicho método:
$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{ze^z}{\left(z-\sqrt{2}\right)^3}dz; \qquad \gamma\left(t\right)=2e^{it}, t\in[0,2\pi]$$

5. Calcule las siguientes integrales mediante el teorema de los residuos:

   a) **(1 punto)**
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\left(z-\pi\right)}{\left(z-\pi\right)\left(z-\pi/4\right)}dz; \qquad \gamma\left(t\right)=\pi+\pi e^{it}, t\in[0,2\pi]$$

   b) **(1.5 punto)**
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos t}dt;\ a>1$$

6. **(1.75 puntos)** Resuelva mediante la transformada de Laplace el siguiente problema del valor inicial:
$$\begin{cases} y''\left(t\right)+2y'\left(t\right)+y\left(t\right)=2+\left(t-3\right)h_3\left(t\right) \qquad t\geq 0 \\ y\left(0\right)=2 \\ y'\left(0\right)=1 \end{cases}$$
donde $h_3\left(t\right)$ es la función de Heaviside de parámetro 3.

7. **(1.75 puntos)** Resuelva mediante la transformada de $\mathcal{Z}$ el siguiente problema del valor inicial:
$$\begin{cases} y_{n+2}-2y_n=2 \qquad n\geq 2 \\ y_0=0 \\ y_1=\sqrt{2} \end{cases}$$