Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1. El conjunto de los complejos

Cuando intentamos resolver ecuaciones del tipo

$$x^2 + c^2 = 0,$$

con $c \neq 0$, nos encontramos con que es imposible encontrar una solución en $\mathbb{R}$, ya que independientemente del valor que le demos a x en $\mathbb{R}$, se cumple $x^2 \geq 0$ y por tanto está claro que

$$x^2 + c^2 > 0,$$

de este modo cualquier posible solución habrá que buscarla fuera del conjunto de los números reales y de ahí que sea necesario construir una nueva familia de números capaces de resolver este problema.

La unidad imaginaria

Definición 1.1 (Unidad Imaginaria) *Definimos la* ***unidad imaginaria*** i *(Euler, 1707-1783) como una de las soluciones de la ecuación*

$$x^2 + 1 = 0.$$

La unidad imaginaria i *cumple por tanto*

$$i^2 = -1,$$

o bien

$$i = \sqrt{-1}.$$

Suponiendo que son válidas las operaciones con los números reales, otra de las soluciones será $-i$

$$(-i)^2 = (-1)^2 (i)^2 = -1,$$

y por tanto podemos descomponer el polinomio como

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Está claro que $i \notin \mathbb{R}$.

A partir de esta definición podemos obtener las soluciones de las ecuaciones

$$x^2 + c^2 = 0,$$

puesto que
$$x^2 = -c^2 = (-1) \cdot c^2 = i^2 c^2,$$
de donde
$$x = \pm ci.$$

Ejemplo 1.1 *Por ejemplo*
$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3i$$
De esta forma tendremos definida la raíz cuadrada $\sqrt{}$, *de cualquier número real*
$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = c^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm c, \\ \\ \lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -c^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm ci, \end{cases}$$

Los números complejos en forma binómica: parte real e imaginaria

Consideremos ahora la ecuación general de segundo grado
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabemos que las soluciones de esta ecuación se obtienen mediante la conocida expresión
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
y ahora podemos calcular la raíz cuadrada independientemente de si el discriminante $b^2 - 4ac$, es o no positivo, así que tendremos dos opciones
$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \\ b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} i \end{cases},$$
obteniendo una razón para la definición de número compeljo.

Definición 1.2 *Definimos un número complejo z en* ***forma binómica o cartesiana*** *a una combinación de la forma*
$$z = x + iy,$$
donde $x, y \in \mathbb{R}$, que son, respectivamente, la parte real e imaginaria de z.

	Definición	*Representación*
$x \in \mathbb{R}$	***Parte Real*** *del Número Complejo z*	$\mathrm{Re}\,(z) = x$
$y \in \mathbb{R}$	***Parte Imaginaria*** *del Número Complejo z*	$\mathrm{Im}\,(z) = y$

Ejemplo 1.2 *Ejemplos de números complejos en forma binómica serían*
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i, \\ z_2 &= 2 - 3i. \end{aligned}$$
En este caso tendremos
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z_1) &= 1, \qquad \mathrm{Im}\,(z_1) = 1, \\ \mathrm{Re}\,(z_2) &= 2, \qquad \mathrm{Im}\,(z_2) = -3. \end{aligned}$$

Definición 1.3 *Dos números complejos z_1 y z_2 son iguales si y sólo si lo son su partes reales e imaginarias, es decir*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2) \\ \\ \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2) \end{cases}.$$

Ya estamos en condiciones de definir el conjunto de los números complejos.

Definición 1.4 *El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ está definido como*

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1.2. Relación entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Está claro por su definición que $i \notin \mathbb{R}$, sin embargo $i \in \mathbb{C}$, ya que

$$i = 0 + 1 \cdot i,$$

por tanto $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Dado un número real $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$z = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C},$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z) &= x \\ \\ \mathrm{Im}\,(z) &= 0 \end{aligned}$$

y podremos decir que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Definición 1.5 *Los números complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ e $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$ se denominan* imaginarios puros *y el conjunto de estos números se suele representar por $i\mathbb{R}$*

$$z \text{ es imaginario puro } \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ y } z \neq 0 \Leftrightarrow z = iy \text{ con } y \neq 0.$$

El orden en $\mathbb{C}$

En $\mathbb{C}$ no se puede establecer una relación de orden compatible con el orden natural en $\mathbb{R}$, es decir, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ no podemos establecer entre ellos relaciones del tipo "$z_1 \geq z_2$" o "$z_1 \leq z_2$" que sean compatibles con el orden que conocemos en $\mathbb{R}$.

Supongamos, por el contrario, que podemos establecer un orden en el conjunto de los números complejos compatible con el orden de $\mathbb{R}$, es decir, dados cualquier par de elementos z_1 y z_2 podremos decir si uno es mayor o igual que el otro. Tomaremos los números complejos i y 0, como obviamente no son iguales, podremos decir o bien que $i > 0$ o bien que $i < 0$.

1. Supongamos que $i > 0$. Si el orden establecido fuera compatible con el orden natural de $\mathbb{R}$, la desigualdad anterior no cambiaría de sentido si multiplicáramos cada uno de sus miembros por cualquier número positivo, en este caso multiplicamos por i, que estamos suponiendo es > 0, entonces debería cumplirse

   $$i \cdot i > 0 \cdot i,$$

   pero esta operación conduce a

   $$i^2 > 0,$$

   que es falsa puesto que $i^2 = -1$ que es < 0 para el orden en $\mathbb{R}$.

2. Llegamos a la misma contradicción si suponemos que $i < 0$. Ya que al multiplicar la desigualdad por cualquier número negativo se invierte el sentido de la misma, y eligiendo ese número como i, entonces
$$i \cdot i > 0 \cdot i,$$
que de nuevo nos conduce a que $-1 < 0$, que es incompatible con el orden establecido en $\mathbb{R}$.

1.3. Operaciones aritméticas en forma binómica

En $\mathbb{C}$ podemos definir dos operaciones internas: la suma y el producto de números complejos. Para definir estas operaciones sólo hay que considerar que i es un parámetro con la propiedad de que $i^2 = -1$ y utilizar las propiedades asociativa y conmutativa de los números reales, por tanto, si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos números complejos en forma binómica, definiremos suma y producto como:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Ejemplo 1.3 *Dados $z = 1 + i$ y $w = -3 + 4i$ entonces*

$$z + w = (1 - 3) + i\,(1 + 4) = -2 + 5i.$$

$$z \cdot w = (1 + i)\,(-3 + 4i) = \{1 \cdot (-3) - 1 \cdot 4\} + i\,\{1 \cdot 4 + 1 \cdot (-3)\} = -7 + i.$$

Definición 1.6 *El* ***elemento neutro*** *para la suma es el elemento cero $0 \in \mathbb{R}$ (que como complejo sería $0 + i \cdot 0$):*
$$z + 0 = z.$$

Ejemplo 1.4 *Dados $z = 1 + i$ entonces*

$$z + 0 = (1 + i) + (0 + 0 \cdot i) = (1 + 0) + (1 + 0)\,i = 1 + i.$$

Definición 1.7 *Para cada complejo $z \in \mathbb{C}$, definimos el complejo* ***opuesto*** *de z, como aquel complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que*
$$z + w = 0.$$

Está claro que si $z = x + iy$ entonces

$$w = -x - iy.$$

y por tanto el complejo opuesto de z también se representa como $-z$.

Ejemplo 1.5 *Dados $z = 1 + i$ entonces*

$$-z = -\,(1 + i) = -1 - i.$$

Definición 1.8 *El elemento neutro del producto es el elemento unidad $1 \in \mathbb{R}$ (que como complejo sería $1 + i \cdot 0$):*
$$z \cdot 1 = z.$$

Ejemplo 1.6 *Dados $z = 3 + i$ entonces*

$$z \cdot 1 = (3 + i)\,(1 + 0 \cdot i) = (3 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + i\,(3 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 3 + i.$$

Definición 1.9 *Para cada complejo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ definimos su **inverso**, como aquel complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que*

$$z \cdot w = 1.$$

El elemento 0 no tiene elemento inverso ya que

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot 0 = 0.$$

y por tanto no existe ningún número que al multiplicar por 0 se obtenga el complejo 1.

Para obtener la expresión binómica del elemento inverso utilizamos su definición y la del producto de dos complejos. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1x_2 - y_1y_2 = 1 \\ \\ x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Suponiendo z_1 es conocido, nos queda un sistema lineal en las variables x_2 e y_2, que tendrá solución siempre que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0, es decir, siempre que

$$\left| \begin{array}{cc} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{array} \right| = x_1^2 + y_1^2 \neq 0.$$

Este determinante es nulo sólo cuando $x_1 = y_1 = 0$, por tanto si $z \neq 0$ el sistema tiene solución, que se obtiene mediante la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & -y_1 \\ 0 & x_1 \end{array} \right|}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \\ d &= \frac{\left| \begin{array}{cc} x_1 & 1 \\ y_1 & 0 \end{array} \right|}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

y el inverso de $z = x_1 + iy_1 \neq 0$ en forma binómica será

$$z_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Es usual representar al elemento inverso de z como z^{-1} o como $\frac{1}{z}$

$$z_2 = z_1^{-1}$$

Ejemplo 1.7 *Vamos a calcular el inverso de $z = 1 + i$ mediante la expresión anterior*

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \\ y_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Una vez que se ha definido el inverso de un número complejo podemos definir el cociente entre dos números complejos.

Definición 1.10 *Dados* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *con* $z_2 \neq 0$*, definimos su* ***cociente*** $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1/z_2$ *como*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

que está bien definido puesto que como $z_2 \neq 0$ *y entonces existirá su inverso* z_2^{-1}*.*

Ejemplo 1.8 *Vamos a calcular el cociente entre* $z_1 = 1 + i$ *y* $z_2 = 2 + 3i$*. Necesitamos en primer lugar calcular* z_2^{-1}

$$z_2^{-1} = (2+3i)^{-1} = \frac{2}{2^2+3^2} - \frac{3}{2^2+3^2}i = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

y con este valor podemos realizar el cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2+3i} = (1+i)\cdot(2+3i)^{-1} = (1+i)\cdot\left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) = \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}\right) + \left(-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}\right)i = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

Proposición 1.1 *Con las operaciones de suma y producto, el conjunto* $\mathbb{C}$ *de los números complejos tiene estructura de* ***cuerpo****.*

Que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sea un cuerpo quiere decir que se cumplen una serie de propiedades que indicamos a continuación:

1. $(\mathbb{C}, +)$ El conjunto de los números complejos junto con la operación suma es un grupo abeliano.

   a) *Conmutativa:* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
   b) *Asociativa:* $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
   $$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$
   c) *Elemento neutro:* El elemento neutro para la suma es el 0.

   d) *Elemento opuesto*: Para cada número complejo $z = x + iy$ hemos definido su opuesto $-z = -x - iy$

2. $(\mathbb{C}, \cdot)$ El conjunto de los números complejos junto con la operación producto es un grupo abeliano:

   a) *Conmutativa:*$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   $$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
   b) *Asociativa:*$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
   $$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$
   c) *Elemento neutro:* El elemento neutro para el producto es el elemento unidad 1.

   d) *Elemento inverso*: Para cualquier número complejo $z \neq 0$ hemos definido su inverso z^{-1} como
   $$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cumple la propiedad distributiva:

   a) *Distributiva del producto respecto a la suma*: Dados tres números complejos z_1, z_2 y z_3 se cumple
   $$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

1.4. Conjugado

Definición 1.11 *Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, se define su complejo* ***conjugado***, $\overline{z}$, *(o también z^*) al número complejo definido como*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

O en forma binómica

$$z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy$$

Ejemplo 1.9 *Dado $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 - i$, entonces*

$$\begin{aligned} \overline{z}_1 &= 1 - i \\ \overline{z}_2 &= -3 + i \end{aligned}$$

Proposición 1.2 *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades*

1. Números reales:
$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

2. Números imaginarios puros:
$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$$

3. Partes real e imaginaria:
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \overline{z}}{2} \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

4. Doble conjugación:
$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\overline{z}} = z$$

5. Suma:
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

6. Producto:
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

7. Cociente:
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

8. Módulo:
$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$$

9. Inverso:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+x^2} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$$

10. Cociente de complejos mediante el conjugado:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

La propiedad que se ha definido como *Módulo* es muy interesante ya que permite reescribir el inverso y el cociente de dos números complejos en términos del conjugado.

Ejemplo 1.10 *Vamos a calcular el cociente entre* $z = 1+i$ *y* $w = 2+3i$ *utilizando la propiedad* 10 :

$$\frac{z}{w} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(2+3)+i(-3+2)}{(4+9)+i(-6+6)} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

1.5. El plano complejo

Representación cartesiana. Relaciones entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

En el apartado anterior se ha comprobado que $\mathbb{R}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$. En esta sección veremos que existe una relación directa entre el conjunto $\mathbb{C}$ y el plano real $\mathbb{R}^2$. Con el fin de encontrar esa relación tomaremos un número complejo cualquiera $z = x + iy$, entonces podemos definimos la siguiente aplicación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = x+iy & \rightsquigarrow & (x,y) \end{array}$$

que es una biyección: a cada complejo le hace corresponder un y sólo un punto en el plano y viceversa. Esta biyección permite definir un número complejo como un punto del plano, obteniéndose así una representación gráfica del complejo z (ver figura 1.1). El par (a,b) es el *afijo* del complejo z. En esta representación al eje de abcisa (eje x) se le llama *eje real*, mientras que el eje de ordenadas (eje y) es el *eje imaginario*.

A partir de esta representación de tipo puntual podemos construir otra de tipo vectorial, asignando a cada complejo $x + iy$ un vector con origen el origen de coordenadas y como extremo su afijo correspondiente. Con esta representación es normal referirse al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ como **plano complejo o plano** z.

Módulo de un número complejo

Definición 1.12 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C}$*, definimos el* ***módulo*** *de* z *que representamos como* $|z|$ *al número real positivo definido como*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Notar que $|z|$ *es precisamente la longitud del vector que hemos asociado a* z *en el apartado anterior (ver figura 1.2).*

Podemos comprobar que en el caso de que z sea un número real entonces el módulo coincide con su valor absoluto

$$z = x + i \cdot 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

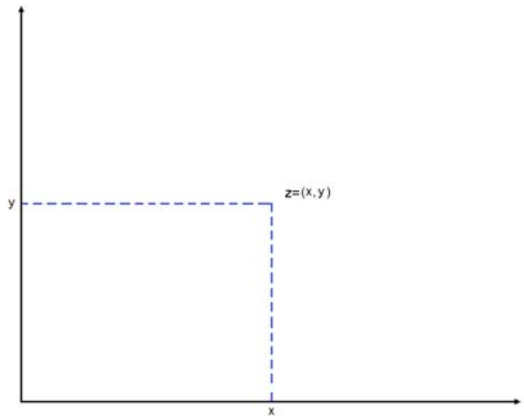


Figura 1.1: Representación espacial de un número complejo.

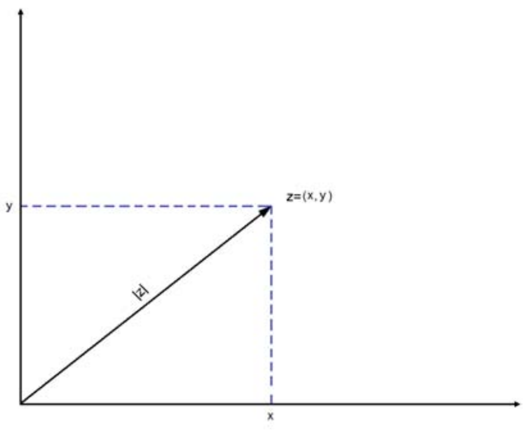


Figura 1.2: Módulo de un número complejo.

Proposición 1.3 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, el módulo tiene las siguientes propiedades:*

1. Positividad del módulo
$$|z| \geq 0$$
además
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2. Equivalencia de módulos
$$|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$$

3. Producto
$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

4. Producto de un número real por un complejo
$$\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \Rightarrow |\alpha z| = |\alpha| \, |z|$$

5. Inverso
$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

6. Cociente
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

7. Desigualdad 1
$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,(z)| &\leq |z| \\ |\mathrm{Im}\,(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

8. Desigualdad 2 (Triangular)
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

9. Desigualdad 3 (Triangular Inversa)
$$|z - w| \geq ||z| - |w||$$

Las relaciones geométricas entre z, $-z$, $\overline{z}$ y $\overline{-z} = -\overline{z}$ son muy sencillas de visualizar gráficamente (ver figura 1.3). Dado $z = x + iy$, entonces los afijos de los complejos indicados anteriormente son

$$\begin{aligned} z &= x + yi \Leftrightarrow (x, y) \\ -z &= -x - yi \Leftrightarrow (-x, -y) \\ \overline{z} &= x - yi \Leftrightarrow (x, -y) \\ \overline{-z} &= -x + yi \Leftrightarrow (-x, y) \end{aligned}$$

y gráficamente

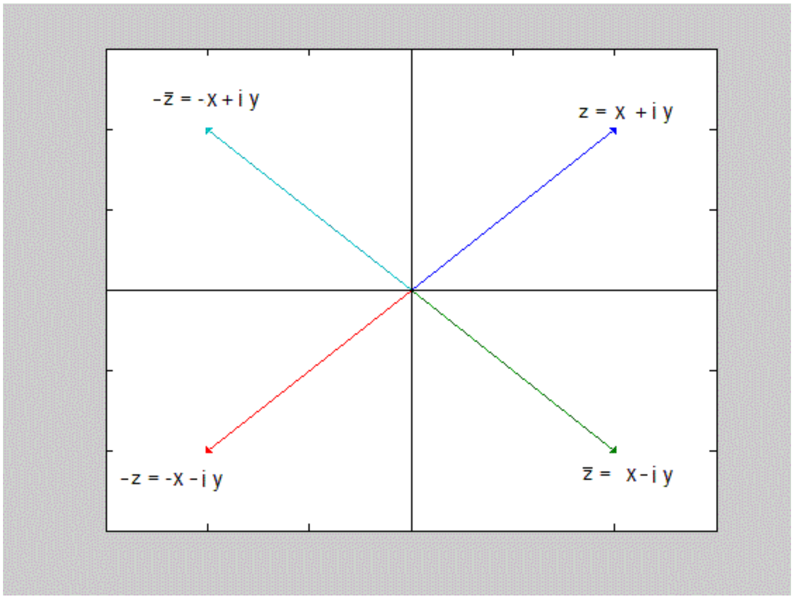


Figura 1.3: Relaciones geométricas entre z, $-z$, $\overline{z}$ y $-\overline{z}$.

Representación polar y exponencial

En el apartado anterior se ha representado un número complejo $z = x + iy$ mediante un vector que va desde el origen de coordenadas hasta el par (x, y). Por otra parte, cada vector no nulo del plano de centro el origen de coordenadas se puede representar en coordenadas polares mediante su longitud y el ángulo que forma con el semieje OX positivo; es posible extender esta representación a los complejos (ver figura 1.4). Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$ el ángulo que forma el vector asociado a z con el semieje OX positivo. Teniendo en cuenta que $|z|$ es la longitud de ese vector entonces por trigonometría se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} x = |z| \cos\theta \\ \\ y = |z| \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |z|^2 = x^2 + y^2 \\ \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{array}\right.$$

Definición 1.13 *Se define la* ***forma polar o módulo-argumental*** *del complejo z como*

$$z = |z|_\theta \;\; o \;\; z = |z|_{<\theta}$$

Como $z = x + iy$, se obtiene también la llamada ***forma trigonométrica***

$$z = |z| \cos\theta + i\,|z| \operatorname{sen}\theta = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Y si se utiliza la fórmula de Euler (que se demostrará posteriormente)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

se obtiene la representación ***exponencial*** *del número complejo z*

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

Debido a la periodicidad de la función tan (θ) la representación polar no es única, ya que el ángulo $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, también es válido para representar a z, como consecuencia el ángulo θ no está unívocamente determinado.

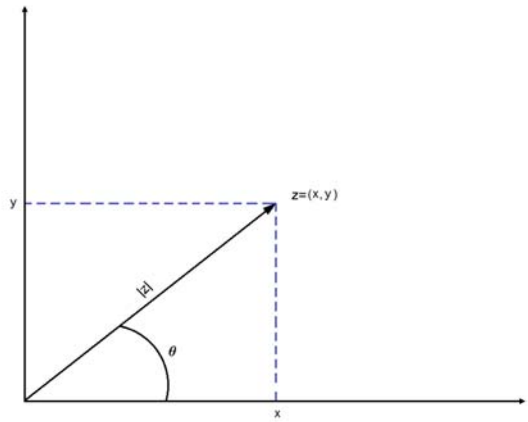


Figura 1.4: Representación polar de un número complejo.

Definición 1.14 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *definimos su* ***argumento,*** $\arg(z)$, *como el conjunto*

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R}| \quad z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\}$$

que por la periodicidad es equivalente a

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi| \text{ siendo } \theta,\ z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\}$$

Los argumentos se consideran positivos cuando se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativos en el otro caso.

Proposición 1.4 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\} \Rightarrow$ *Existe un único argumento en cada intervalo de longitud* 2π*, es decir el conjunto*

$$\arg(z) \cap (\alpha, \alpha + 2\pi] = \{\theta\}$$

tiene un único elemento.

Definición 1.15 *Dado un número complejo* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *definimos su* ***argumento principal*** $\operatorname{Arg}(z)$, *como el único número que cumple*

$$\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$$

Ejemplo 1.11 *Dado* $z = 1 + i$*, entonces*

$$\theta = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 \Rightarrow \arg(z) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

en este caso

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \arg(1+i) \cap (-\pi, \pi] = \frac{\pi}{4}$$

Observación 1.1 *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\begin{aligned}
Si\ z &\in R^{+} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = 0 \\
Si\ z &\in R^{-} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \pi \\
Si\ z &\in iR^{+} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \\
Si\ z &\in iR^{-} \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.12 *Algunos complejos en forma polar o exponencial son*

$$\begin{aligned}
1 &= 1_0 = e^{i0} \\
-1 &= 1_\pi = e^{i\pi} \\
i &= 1_{\pi/2} = e^{i\pi/2}
\end{aligned}$$

1.6. Operaciones con números complejos en forma polar

Conjugado en forma polar

Dado el complejo no nulo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, que por tanto tendrá representación exponencial $z = |z|\, e^{i\theta}$ con $\theta \in \arg(z)$, buscamos la forma exponencial de su conjugado $\overline{z}$. En primer lugar es posible asegurar que dicho conjugado tendrá expresión en forma exponencial, puesto que si $z \neq 0$ entonces también $\overline{z} \neq 0$. Supongamos por tanto que su forma exponencial es

$$\overline{z} = |\overline{z}|\, e^{i\varphi},$$

donde $\varphi \in \arg(\overline{z})$. Por las propiedades del módulo tendremos

$$|\overline{z}| = |z|\,,$$

por tanto

$$\overline{z} = |z|\, e^{i\varphi} = |z| \cos\varphi + i\, |z| \operatorname{sen}\varphi,$$

si expresamos z en forma trigonométrica

$$z = |z| \cos\theta + i\, |z| \operatorname{sen}\theta.$$

Por la definición de conjugado se debe cumplir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\overline{z}) &= \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow |z| \cos\varphi = |z| \cos\theta, \\
\operatorname{Im}(\overline{z}) &= -\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow |z| \operatorname{sen}\varphi = -\,|z| \operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}$$

y simplificando

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos\theta, \\
\operatorname{sen}\varphi &= -\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la paridad de las funciones cos y sen

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos(-\theta),\\ \operatorname{sen}\varphi &= \operatorname{sen}(-\theta),\end{aligned}$$

y para que las dos ecuaciones se cumplan de forma simultánea trigonométricas debe ocurrir

$$\varphi = -\theta + 2\pi k,$$

de forma que $-\theta$ es uno de los argumentos de $\overline{z}$ y la forma exponencial del conjugado será

$$\overline{z} = |z|\, e^{-i\theta}.$$

Producto y cociente en forma polar

Sea $z, w \in \mathbb{C}-\{0\}$ y sean $z = |z|\, e^{i\theta}$ y $w = |w|\, e^{i\varphi}$ sus respectivas expresiones en forma exponencial. Si se efectúa el producto de ambos

$$z \cdot w = \left(|z|\, e^{i\theta}\right)\left(|w|\, e^{i\varphi}\right) = |z|\,|w|\, e^{i\theta}e^{i\varphi} = |z \cdot w|\, e^{i(\theta+\varphi)}$$

y por tanto

$$\theta + \varphi \in \arg(z \cdot w)$$

En definitiva el producto de dos complejos en forma polar es otro complejo cuyo módulo es el producto de módulos y cuyo argumento es la suma de argumentos.

Ejemplo 1.13 *¿Qué significa multiplicar por i?*

Solución: Sea $z \neq 0$ y sea $z = |z|\, e^{i\theta}$. Si queremos saber el significado de la multiplicación por i pondremos también este número en forma exponencial

$$i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$$

por tanto:

$$iz = |iz|_{\theta+\pi/2} = |z|_{\theta+\pi/2}$$

y la operación consistirá en girar $\frac{\pi}{2}$ radianes (90^o grados) el vector que representa al número complejo z.

Inverso y cociente en forma polar

Sea $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ y sea $|z|\, e^{i\theta}$ su forma exponencial, se quiere encontrar la forma exponencial para z^{-1}, el inverso de z.

Como $z \neq 0$, entonces su inverso existe y es distinto de 0. Por definición de inverso

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|\, e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$$

de donde se deduce que

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

Y con esta información, es fácil calcular el cociente de números complejos en forma exponencial

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \left(|z|\, e^{i\theta}\right) \cdot \left(\frac{1}{|w|} e^{-i\varphi}\right) = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\varphi)}$$

de forma que el cociente de dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo se obtiene como el cociente de los módulos y cuyo argumento se obtiene como diferencia entre argumentos del numerador y denominador.

Potencias enteras: Teorema de Moivre

Definición 1.16 *Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos la **potencia** n–**ésima** de z, tal y como se define para el caso real como*

$$z^n = z \cdot \cdots \cdot z$$

Expresando z en forma polar y empleando el producto de complejo en forma exponencial se obtiene

$$z^n = \left(|z|\, e^{i\theta}\right) \cdot \cdots \cdot \left(|z|\, e^{i\theta}\right) = |z|^n\, e^{in\theta}$$

luego la potencia n–ésima de un complejo es otro complejo cuyo módulo es la potencia n–ésima del módulo de la base y cuyo argumento es n veces el argumento de la base.

Ejemplo 1.14 *Calcula $(1+i)^4$ en forma polar:*

Solución: Ponemos $(1+i)$ en forma polar

$$(1+i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

y después amplicamos la definición de potencia n–ésima para $n = 4$

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i4\cdot\pi/4} = 2^{4/2} e^{i\pi} = 2^2 e^{i\pi} = -4$$

Teorema 1.5 (Teorema de Moivre) *Sea $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple*

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \qquad \textit{(Fórmula de Moivre)}$$

Este teorema se puede utilizar, entre otras cosas, para establecer relaciones entre $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$. Por ejemplo si $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 = \cos^2\theta + 2(\cos\theta)(i \operatorname{sen}\theta) + (i \operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + i\,(2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \end{aligned}$$

e igualando entre partes reales e imaginarias se obtienen las conocidas ecuaciones de las razones trigonométricas de los ángulos dobles en términos de los ángulos sencillos.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \end{aligned}$$

Ejemplo 1.15 *Expresa $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$ en términos del ángulo sencillo θ.*

Solución: Tomando $n = 3$ en la fórmula de Moivre, entonces

$$\begin{aligned}(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\left(\cos^2\theta\right)(i\operatorname{sen}\theta) + 3(\cos\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^2 + (i\operatorname{sen}\theta)^3 \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right)\end{aligned}$$

de donde por la igualdad entre números complejos

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

Definición 1.17 *Del mismo modo teniendo en cuenta la definición de inverso, definimos para* $n \in \mathbb{N}$

$$z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Raíces n-ésimas de un número complejo

Definición 1.18 *Sea* $z \in \mathbb{C}- \{0\}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *definimos la raíz n–ésima de z a cualquier complejo* $w \in \mathbb{C}- \{0\}$ *que cumpla*

$$w^n = z$$

Si expresamos w y z en forma polar obtenemos

$$w = |w|\, e^{i\varphi}$$

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

La potencia n–ésima de w sería

$$w^n = |w|^n\, e^{in\varphi}$$

y como w^n es la raíz n–ésima del complejo z, por definición

$$w^n = z \Rightarrow |w|^n\, e^{in\varphi} = |z|\, e^{i\theta}$$

Por una parte los módulos deben ser iguales

$$|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

y por último el argumento del primero $n\varphi$ y del segundo θ, deben estar en el mismo conjunto, es decir,

$$n\varphi \in \arg(z) = \{\theta + 2k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n\varphi = \theta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

de donde

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Habrá n raíces distintas, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, puesto que para $k = n$

$$\frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

que proporciona el mismo complejo que para $k = 0$.

Gráficamente las raíces n–ésimas de z están situadas en los vértices de un polígono regular de n lados incrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$

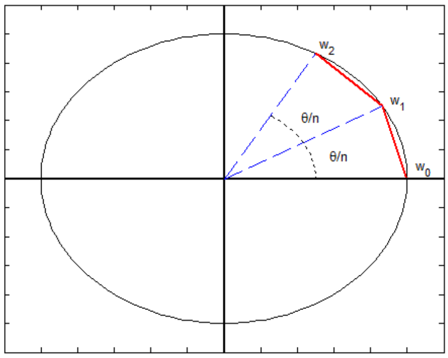


Figura 1.5: Representación gráfica de las raíces n–ésimas de un número complejo.

Ejemplo 1.16 *Resuelve la ecuación*

$$z^5 + 1 = 0$$

Solución: Buscamos las raíces quintas de -1

$$z^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^5 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{-1}$$

Poniendo -1 en forma polar

$$-1 = 1_\pi$$

de donde

$$|z| = \sqrt[5]{|-1|} = \sqrt[5]{1} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{5} \quad k = 0, \ldots, 4$$

y las raíces son

$$w_k = 1_{\frac{\pi+2k\pi}{5}} \quad k = 0, \ldots, 4$$

Ejemplo 1.17 *Resuelve la ecuación*

$$z^3 + 8 = 0$$

Solución: Buscamos las raíces cúbicas de -8

$$z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-8}$$

Poniendo -8 en forma polar

$$-8 = 8_\pi$$

de donde

$$|z| = \sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

y las raíces son

$$w_k = 2_{\frac{\pi+2k\pi}{3}} \quad k = 0, 1, 2$$

que podemos poner en forma binómica

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 2_{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \\
w_1 &= 2_{\pi} = -2 \\
w_0 &= 2_{\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.18 *Calcula*

$$\sqrt{1+i}$$

Solución: Ponemos el complejo en forma polar

$$1 + i = |1+i|_{\pi/4}$$

y a continuación calculamos las dos raíces cuadradas

$$
\begin{aligned}
w_0 &= |1+i|_{\frac{\pi/4}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/8} \\
w_1 &= |1+i|_{\frac{\pi/4+2\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)_{9\pi/8}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.19 *Calcula*

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$$

Solución: Ponemos el complejo en forma polar

$$1 + i\sqrt{3} = 2_{\pi/3}$$

y a continuación calculamos las dos raíces cuadradas

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}_{\frac{\pi/3}{2}} = \sqrt{2}_{\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\
w_1 &= \sqrt{2}_{\frac{\pi/3+2\pi}{2}} = \sqrt{2}_{7\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}
$$

Observación 1.2 *Raíces n–ésimas para casos especiales*

- *Si* $z \in \mathbb{R}^+$ *y* n *es par, entonces hay* 2 *raíces* n*–ésimas reales*

  $$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_0 \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

  con

  $$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$$

  como n *es par, entonces* $n = 2m$

  $$\varphi_k = \frac{2k\pi}{2m} = \frac{k\pi}{m} \Rightarrow \begin{cases} \textit{Si } k = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 & \textit{Raíz real positiva} \\ \textit{Si } k = m \ (< n) \Rightarrow \varphi_m = \pi & \textit{Raíz real negativa} \end{cases}$$

- *Si* $z \in \mathbb{R}^+$ *y* n *es impar, entonces hay sólo* 1 *raíz* n*–ésima real*

$$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_0 \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$$

como n *es impar, entonces* $n = 2m + 1$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{2m+1} \Rightarrow \left\{ \quad Si\ k = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \qquad Raíz\ real\ positiva \right.$$

Como en la fracción $\frac{2k}{2m+1}$*, el numerador es par y el denominador es impar, el cociente (salvo el caso* $k = 0$*) no será un número entero y por tanto* φ_k *no será un múltiplo entero de* π *y el resto de raíces serán complejas.*

- *Si* $z \in \mathbb{R}^-$ *y* n *es par entonces no hay raíces reales*

$$z \in \mathbb{R}^- \Rightarrow z = |z|_\pi \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

como n *es par, entonces* $n = 2m$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)}{2m}\pi$$

como el numerador de la fracción es impar y el denominador es par, el cociente no será nunca un número entero y φ_k *no será nunca un múltiplo entero de* π*, y por tanto el complejo* w_k *no será nunca un número real.*

- *Si* $z \in \mathbb{R}^-$ *y* n *es impar, entonces hay* 1 *raíz* n*–ésima real negativa*

$$z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = |z|_\pi \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow w_k = |w|_{\varphi_k}$$

con

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

como n *es impar, entonces* $n = 2m + 1$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \Rightarrow \left\{ \ Si\ k = m\ \ (< n) \Rightarrow \varphi_k = \pi \qquad Raíz\ real\ negativa \right.$$

Potencias racionales

Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, definimos la potencia fraccionaria $z^{m/n}$ como

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m}$$

es decir $z^{m/n}$ son las raíces n–ésimas de z^m.

Ejemplo 1.20 *Calcula*

$$(1+i)^{4/3}$$

Solución: Empleando la definición

$$(1+i)^{4/3} = \sqrt[3]{(1+i)^4}$$

Utilizamos la forma exponencial del complejo

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

que elevamos a 4

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4$$

y ahora calculamos las raíces cúbicas de este complejo

$$\sqrt[3]{(1+i)^4} = \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4e^{i\pi}} = w_k \quad k = 0,1,2$$

que son para $\varphi_k = \frac{\pi+2k\pi}{3}$ con $k = 0,1,2$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{4}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{4}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{4} \\ w_2 &= \sqrt[3]{4}e^{i5\pi/3} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

1.7. Topología del cuerpo de los números complejos

Definiremos de forma sucinta una serie de conceptos relacionados con la topología del cuerpo de los números complejos que básicamente coincide con la del plano real: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\ \mathbb{R}$.

Discos y anillos

Como $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, la norma y distancias eculideas de $\mathbb{R}^2$ proporcionarán la topología usual de $\mathbb{C}$. La norma de $\mathbb{C}$ está dada por el módulo, mientras que la distancia entre dos números complejos z_1 y z_2 es

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$$

o en términos de sus partes reales e imaginarias

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + y_1 \\ \\ z_2 = x_2 + y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que es la distancia euclídea en el plano.

A continuación se definen los conjuntos topológicos básicos generados mediante esta definición de distancia.

Definición 1.19 *Definimos* bola abierta *o* disco abierto *de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* $r > 0$ *al conjunto definido por*

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

Definición 1.20 *Definimos* bola cerrada *o* disco cerrado *de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* $r > 0$ *al conjunto definido por*

$$B[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Definición 1.21 *Definimos la* frontera *de la bola o* circunferencia *de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* $r > 0$ *al conjunto definido por*

$$\partial B_r(z_0) = \partial B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Definición 1.22 *Definimos el* Anillo *de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radios* $R > 0$ *y* $r > 0$ *al conjunto*

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

Notar que si $R < r$ *entonces el conjunto* $A(z_0, r, R)$ *es el conjunto vacío.*

Definición 1.23 *Definimos* bola reducida *o* disco reducido *de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* $r > 0$ *al conjunto*

$$B^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

Es decir es una bola abierta de centro z_0 *y radio* r*, pero que no contiene al centro*

$$B^*(z_0, r) = B(z_0, r) - \{z_0\}$$

Este conjunto también puede ser considerado como un anillo de radios 0 *y* r

$$B^*(z_0, r) = A(z_0, r, R)$$

La esfera de Riemann y el punto del infinito

Para describir completamente la topología del conjunto $\mathbb{C}$ es necesario incorporar el concepto del llamado punto del infinito y que se denota como ∞. Esta inclusión se hace mediante la llamada *proyección estereográfica* que describiremos brevemente a continuación.

Sea S^2 la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$, es decir

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

y sea H el conjunto definido por

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\right\}$$

El conjunto H es el plano tangente a S^2 por el punto $P_S = (0, 0, -1)$ (el llamado polo Sur de la esfera).

Consideremos ahora la proyección sobre H de los puntos de la esfera a través del punto $P_N = (0, 0, 1)$ (polo Norte), para ello unimos el punto P_N con cada punto de S^2 mediante un segmento, la prolongación de este segmento corta en un punto al conjunto H. Por tanto a cada punto de la esfera, salvo al propio P_N, se le asocia un punto en el plano H y viceversa. Tendremos así definida la proyección estereográfica π

$$\pi : S^2 - P_N \longrightarrow H$$

en particular si $P = (x, y, z) \in S^2 - \{P_N\}$ entonces

$$\pi(P) = \left(\frac{-2x}{z-1}, \frac{-2y}{z-1}, -1\right)$$

y de esta forma $\mathbb{C}$ es isomorfo a $S^2 - \{P_N\}$.

Aquí va un dibujo con la proyección

Por otra parte a los puntos de H que son de la forma $(\alpha, \beta, -1)$ les podemos asociar el número complejo $\alpha + i\beta$ y establecer un isomorfismo entre H y $\mathbb{C}$

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

de forma que

$$\varphi(\alpha, \beta, -1) = \alpha + i\beta$$

Como se ha comentado esta aplicación es un isomorfismo y su función inversa es muy fácil de determinar, ya que a cada complejo $\alpha + i\beta$ le podemos asociar un elemento en H

$$\varphi^{-1}(\alpha + i\beta) = (\alpha, \beta, -1)$$

Por tanto los conjuntos H y $\mathbb{C}$ son equivalentes.

Componiendo ambas funciones, π y φ, podemos establecer un isomorfismo entre $S^2 - \{P_N\}$ y $H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z = -1 \right\}$ definido como

$$\begin{array}{cccccc} \pi : & S^2 - \{P_N\} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y, z) & \hookrightarrow & \pi(x, y, z) = \left(\frac{-2x}{z-1}, \frac{-2y}{z-1}, -1 \right) & \hookrightarrow & \frac{-2x}{z-1} + i\frac{-2y}{z-1} \end{array}$$

Utilizando ahora la proyección estereográfica inversa, π^{-1}, que existe por ser un isomorfismo, tendremos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & H & \xrightarrow{\pi^{-1}} & S^2 - \{P_N\} \\ (a, b) & \rightsquigarrow & (a, b, -1) & \rightsquigarrow & (x, y, z) \end{array}$$

siendo

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(1-z)}{2} \\ y &= \frac{b(1-z)}{2} \\ z^2 &= 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

En la aplicación π, hemos visto que no es posible asignar una imagen al polo norte, $P_n = (0, 0, 1)$. La aplicación se completa asignando a P_N el llamado punto del infinito, es decir

$$\pi(P_N) = \infty$$

Definición 1.24 *Definimos el plano complejo ampliado* $\mathbb{C}^{\#}$ *o* esfera de Riemann *al conjunto*

$$\mathbb{C}^{\#} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$$

Los entornos y bolas de centro el punto del infinito se definen a través de la proyección π *y dan como resultado las siguientes definiciones.*

Definición 1.25 *Para el punto del infinito ∞ se define la bola abierta del infinito como*

$$B_r(\infty) = \{ z \in \mathbb{C} | \ \ |z| > r\}$$

y la bola cerrada

$$B_r[\infty] = \{ z \in \mathbb{C} | \ \ |z| \geq r\}$$

Este punto permite definir una topología en $\mathbb{C}$.

Proposición 1.6 *Siendo $z \in \mathbb{C}$, el punto del infinito cumple las siguientes reglas:*

1. $\frac{z}{\infty} = 0$
2. $z \pm \infty = \infty$
3. *Si* $z \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{0} = \infty$
4. *Si* $z \neq 0 \Rightarrow z \cdot \infty = \infty$
5. *Si* $z \neq \infty \Rightarrow \frac{\infty}{z} = \infty$

1.8. Sucesiones

Definición 1.26 *Una sucesión de números complejos, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$ y se representa mediante $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o $\{z_n\}$ o simplemente z_n :*

$$\begin{array}{cccc} \{z_n\} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & n & \hookrightarrow & z_n \end{array},$$

a cada número natural le hacemos corresponder un número complejo. Como cada número complejo representa realmente a dos números reales, una sucesión de números complejos es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^2$ y por tanto serían dos sucesiones de números reales

$$\begin{array}{cccccc} \{z_n\} : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & n & \hookrightarrow & z_n & \hookrightarrow & (x_n, y_n) \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname{Re}(z_n), \\ y_n &= \operatorname{Im}(z_n). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21 *Son sucesiones*

$$a)\ z_n = \tfrac{i}{n}, n \neq 0, \qquad b)\ z_n = i^n, \qquad c)\ z_n = \tfrac{1}{2^n} + i\tfrac{1}{3^n},$$

cuyas partes real e imaginaria son respectivamente

$$\begin{array}{lll} a)\ x_n = 0, & b)\ x_n = \{1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}, & c)\ x_n = \frac{1}{2^n}, \\ \ \ \ \ y_n = \frac{1}{n} & \ \ \ \ y_n = \{0, 1, 0, -1, 0, \ldots\} & \ \ \ \ y_n = \frac{1}{3^n} \end{array}$$

Definición 1.27 *Diremos que una sucesión de números complejos, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es convergente o converge a $z_0 \in \mathbb{C}$ o de forma equivalente que tiene límite a z_0, cuando n tiende a $\infty \Leftrightarrow$*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ tal que } |z_n - z_0| < \varepsilon, \text{cuando } n > n_\varepsilon.$$

Utilizando la notación usual

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad o \qquad z_n \to z_0$$

Esta definición tiene su equivalencia topológica mediante discos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } z_n \in B(z_0, \varepsilon) \;\; \forall n > n_\varepsilon$$

Teorema 1.7 *Dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z_0) \\ \\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z_0) \end{cases}$$

El teorema garantiza que el estudio de la convergencia de sucesiones de números complejos se reduce al estudio de la convergencia de las sucesiones de números reales formadas por la parte real e imaginaria de la sucesión de números complejos.

Ejemplo 1.22 *Estudia la convergencia de*

$$a)\; z_n = \tfrac{i}{n} \qquad b)\; z_n = i^n \qquad c)\; z_n = \tfrac{1}{2^n} + i\tfrac{1}{3^n}$$

Solución: Aplicando el teorema anterior

a) Dada la sucesión $z_n = \frac{i}{n}$ entonces está claro que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} = 0 + i \cdot 0 = 0$$

b) Los primeros términos de la sucesión son

$$\{1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots\}$$

de forma que

$$\operatorname{Re}(z_n) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$$

y al ser una sucesión oscilante no tiene límite, de ahí que z_n tampoco lo tenga.

Además también ocurre

$$\operatorname{Im}(z_n) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots\}$$

que también carece de límite.

c) Dada $z_n = \frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}\right) = 0 + i\cdot 0 = 0$$

Definición 1.28 *Con la definición del punto del infinito y sus entornos, tendremos la siguiente definición de límite infinito*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| \geq \varepsilon$$

Apéndice: El conjunto de Mandelbrot

El llamado conjunto de Mandelbrot M, se construye mediante el estudio del carácter de la sucesión

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

respecto del valor del parámetro $c \in \mathbb{C}$, siendo para todos esos valores el valor de z_0 fijo

$$z_0 = 0.$$

Se trata de una sucesión construida de forma iterativa, en la que cada punto se obtiene del anterior mediante la regla indicada. La pertenencia o no de un punto c al conjunto M, se determina mediante el comportamiento en el infinito de la sucesión que se ha construido para ese valor.

Por una parte, puede suceder que el módulo de los complejos obtenidos permanezca acotada, por ejemplo, si $c = -1$ la sucesión resultante es

$$0, -1, 0, -1, \cdots$$

que claramente es periódica y los valores de sus respectivos módulos están acotados

$$0, 1, 0, 1, \ldots$$

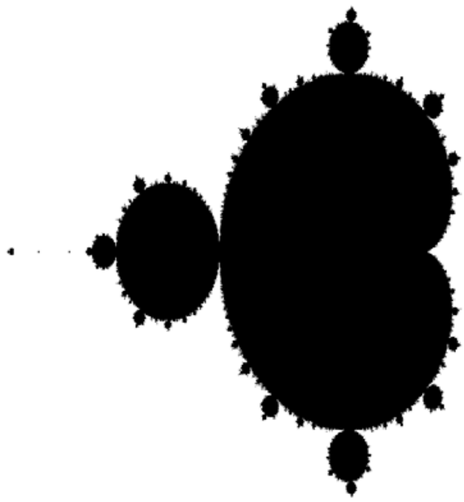
en este caso c es un punto que está en el conjunto M.

Si por el contrario, los módulos de los elementos de la sucesión crecen de forma indefinida, el punto c no estará en el conjunto de Mandelbrot, por ejemplo para $c = 1$ obtenemos

$$0, 1, 2, 5, 26, 677, 45833, \ldots$$

y se ve claramente que las magnitudes crecen muy rápidamente: $0, 1, 2, 5, 26, 677, 45833, \ldots$

Supongamos que asignamos un color para cada estado final (pintamos el punto del plano complejo, según la analogía anterior, de negro si la sucesión es acotada y de blanco si la sucesión diverge) y hacemos que c recorra todos los puntos del plano, la figura que surge es el conjunto de Mandelbrot de la imagen que mostramos en la página siguiente



Tal y como afirma John Brigs, desde 1980, “este conjunto ha proporcionado inspiración a los artistas, se ha convertido en una fuente de asombro para los escolares y un fértil campo de pruebas para los estudios de dinámica no lineal. Es el símbolo de la Revolución del Caos.”

Aunque la imagen en blanco y negro anterior es el verdadero conjunto, las imágenes más conocidas del conjunto de Mandelbrot suelen ser más espectaculares y estar repletas de vistosos colores. Estas imágenes se obtienen mediante distintos algoritmos de asignación de color, entre los que destacamos, por ser el más sencillo, al llamado *algoritmo de tiempo de escape*. En el algoritmo iterativo utilizado para obtener M no es necesario llegar a hacer infinitas iteraciones para saber si un punto está o no en el conjunto, de hecho se sabe que si para un valor del parámetro c, existe un valor de n_0 para el que ocurre $|z_{n_0}| > 2$, entonces la sucesión correspondiente es divergente y el punto c no estará en M. En el algoritmo de escape se asigna un color a cada pixel en función del valor de ese n_0 para el que se cumple esta condición.

En la imagen siguiente se ha utilizado este algoritmo y una determinada paleta de colores, en la que el propio conjunto aparece oscuro y en su frontera se distinguen diferentes regiones que lo envuelven el conjunto bandas de color más claro, correspondientes a las zonas del plano complejo donde el algoritmo de escape ha detectado divergencia.

La frontera del conjunto es infinitamente compleja, ya que haciendo sucesivas ampliaciones (zooms) encontramos siempre detalles más finos en todas las escalas.

Si ampliamos la zona que hay dentro del recuadro en verde de la figura 1.7 obtendremos la imagen de la figura 1.8.

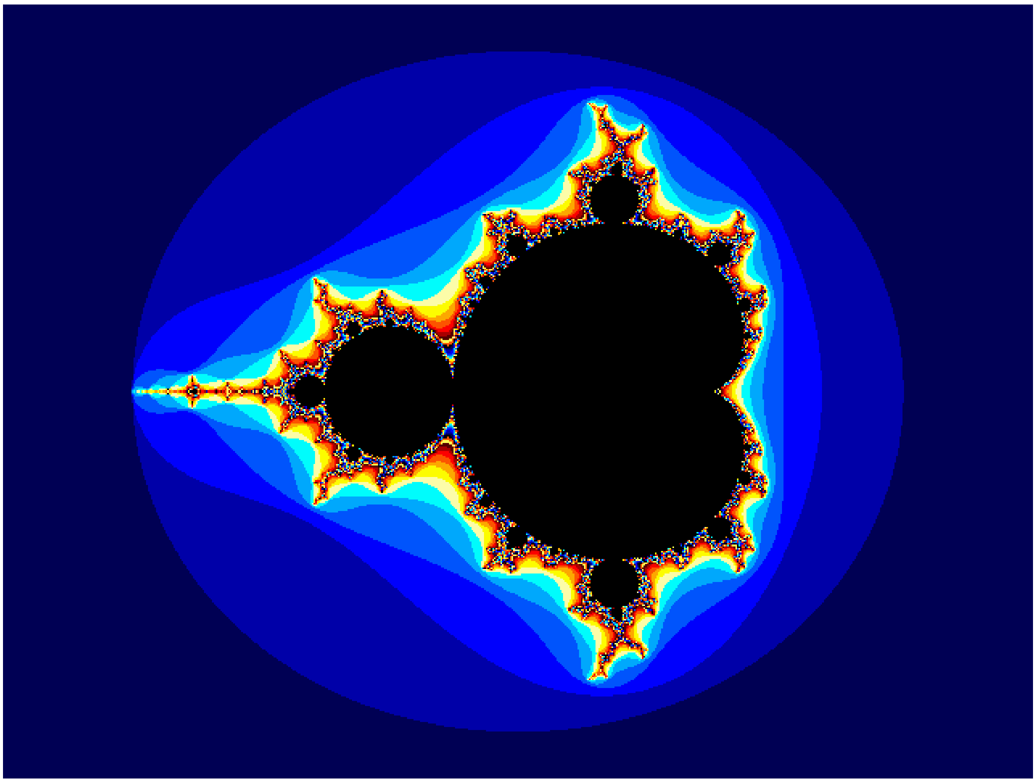


Figura 1.6:

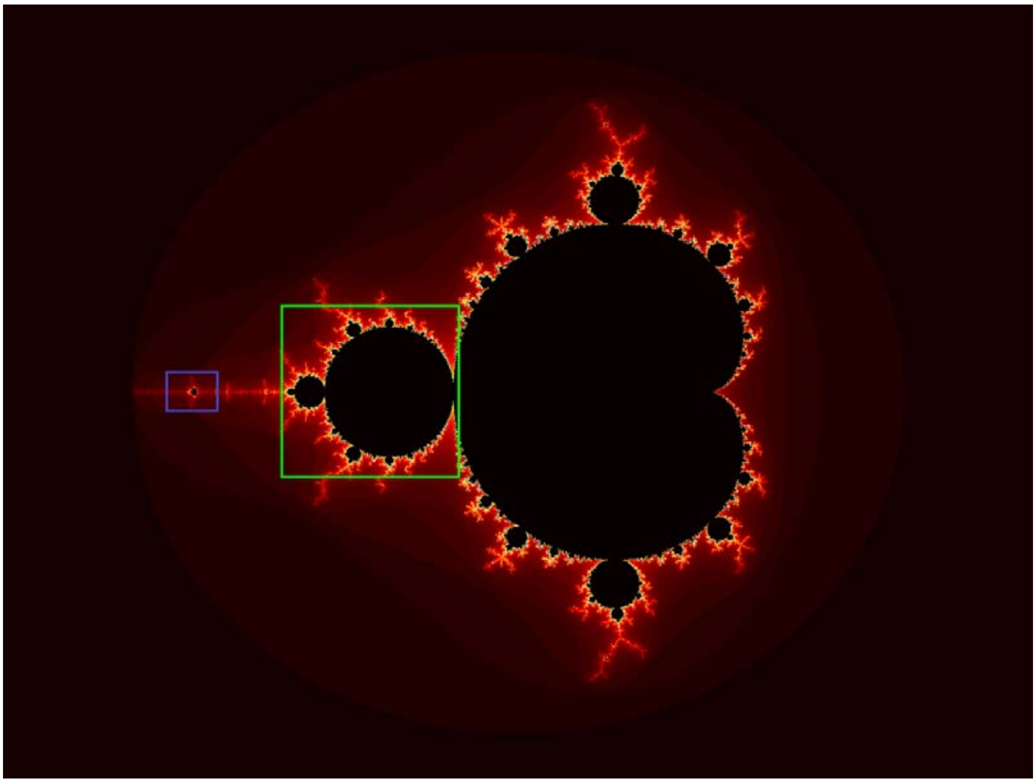


Figura 1.7: M es un fractal.

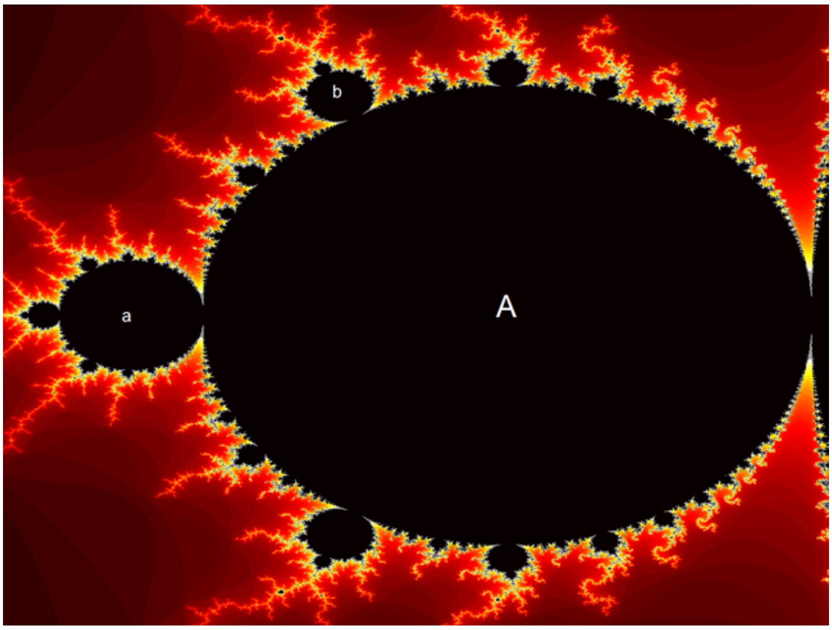


Figura 1.8: Ampliación de la región verde.

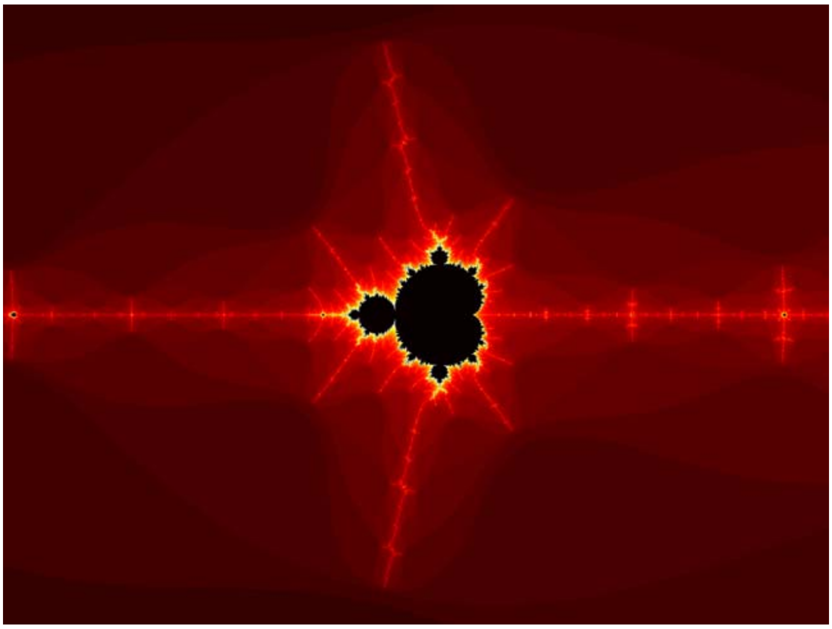


Figura 1.9: Ampliación de la región azul.

Si ampliamos la zona que hay dentro del recuadro en azul de la figura 1.7 obtendremos la imagen de la figura 1.9.