Capítulo 2

Funciones holomorfas

2.1. Función compleja de variable compleja

Sea Ω un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Una **función compleja** f definida sobre Ω es una correspondencia que asigna a cada $z \in \Omega$ un número complejo $f(z) = w$, es decir,

$$\begin{array}{rccl} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) = w. \end{array}$$

Al conjunto Ω lo llamaremos **dominio de definición** de f.

Supongamos que $w = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$ y $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir,

$$f(x + iy) = u + iv.$$

De esta forma cada uno de los números reales u y v dependen de las variables reales x e y, consecuentemente, $f(z)$ puede expresarse en términos de un par de funciones con valores reales, en las variables x e y:

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1}$$

De esta forma una función compleja $f(z)$ es equivalente a un par de funciones reales $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ y $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ cada una de las cuales depende de las variables x e y.

Si en la ecuación (2.1) la función v es siempre cero, entonces el número $f(z)$ es siempre real. Por ejemplo la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ es real.

Ejemplo 1 *Determinar la parte real y la parte imaginaria de* $f(z) = z^2$.

2.2. Funciones continuas

Sea f una función compleja de variable compleja definida al menos en un disco reducido de centro $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Consideremos $z = x + iy$, $w_0 \in \mathbb{C}$.

Diremos que w_0 es el **límite** de la función f cuando z tiende a $z_0 \in \Omega'$, y escribiremos

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = w_0,$$

si los valores de f permanecen cerca de w_0 cuando z está próximo a z_0.

Diremos que f es **continua** en z_0 si $f(z_0)$ está definida y

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = f(z_0).$$

Diremos que f es **continua en un conjunto** si es continua en cada uno de los puntos de dicho conjunto.

Propiedades algebraicas y topológicas de las funciones continuas

- Es evidente que una función compleja f es continua en $z_0 = (x_0, y_0)$ si y sólo si $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en (x_0, y_0). Además

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Re} f(x,y) = \operatorname{Re} f(z_0), \\ \text{y} \\ \lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Im} f(x,y) = \operatorname{Im} f(z_0). \end{cases}$$

- Todas las propiedades algebraicas (continuidad de la función suma, de la función producto, de la función polinómica, de la composición de funciones, unicidad del límite,..) y topológicas (la imagen, por una función continua, de un compacto es un compacto, de un conexo es un conexo,...) estudiadas para funciones de dos variables se cumplen para funciones complejas de variable compleja.

Ejemplo 2 *Determinar la continuidad de la función*

$$f(z) = e^{xy} + i \operatorname{sen}\left(x^2 - 2xy^3\right).$$

2.3. Diferenciabilidad

Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ y sea $z_0\in\operatorname{Int}(\Omega)$. Diremos que f es **derivable** en z_0 si existe el límite

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow z_0\\ z\neq z_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

En tal caso al límite anterior se le llama **derivada de** f en z_0, y lo denotaremos por $f'(z_0)$ o $\frac{d}{dz}f(z_0)$. Si denotamos $\triangle z=z-z_0$ entonces

$$f'(z_0)=\lim_{\triangle z\longrightarrow 0}\frac{f(z_0+\triangle z)-f(z_0)}{\triangle z}$$

Diremos que una función es **derivable en un conjunto** abierto Ω si lo es en todos los puntos de dicho conjunto.

Ejemplo 3 *Verificar que la función $f(z)=z^2$ es derivable en $\mathbb{C}$.*

2.3.1. Propiedades

Sean f y g dos funciones derivables en un punto z_0. Se verifica

1. Si f es derivables en z_0 entonces es continua en z_0.
2. La derivada de una función constante es cero, y para cada número $n\in\mathbb{Z}$ y $z_0\in\mathbb{C}$
$$\frac{d}{dz}(z_0^n)=nz_0^{n-1},$$
3. La adición, la multiplicación y la división de funciones derivables es derivable y
$$(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0).$$
$$(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}\text{ si } g(z_0)\neq 0.$$
4. <u>Regla de la cadena</u>
Si denotamos $w=f(z)$ y $W=g(w)$ de modo que $F(z)=W$, la regla de la cadena se convierte en
$$\frac{dW}{dz}=\frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}.$$

5. Regla de l'Hopital

   Supongamos que g es no nula en un disco reducido de centro z_0. Si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Ejemplo 4 *Hallar la derivada de la función* $\left(2z^2 + i\right)^5$.

2.3.2. Condiciones de Cauchy-Riemann

En esta sección vamos a caracterizar la derivabilidad de una función compleja de variable compleja en términos de su parte real e imaginaria.

Teorema 2.3.1 ***Caracterización de la derivabilidad***
Sea $f = u + iv$ una función definida en el abierto Ω y sea $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es derivable en z_0.

(ii) u, v son diferenciables en (x_0, y_0) y $df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$

Vamos ahora a escribir la expresión $df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ de una forma más sencilla. Sabemos por Cálculo I que

$$df(z_0) = \mathcal{J}_f(z_0) = \begin{pmatrix} u'_x(z_0) & u'_y(z_0) \\ v'_x(z_0) & v'_y(z_0) \end{pmatrix}$$

y si denotamos por $z - z_0 = x + iy$, entonces

$$df(z_0)(z - z_0) = \mathcal{J}_f(z_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x u'_x(z_0) + y u'_y(z_0) \\ x v'_x(z_0) + y v'_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (\operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0))(x + iy) \\ &= x \operatorname{Re} f'(z_0) - y \operatorname{Im} f'(z_0) + i\left[x \operatorname{Im} f'(z_0) + y \operatorname{Re} f'(z_0)\right] \end{aligned}$$

De esta forma de la igualdad $Df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x u'_x(z_0) + y u'_y(z_0) &= x \operatorname{Re} f'(z_0) - y \operatorname{Im} f'(z_0) \\ x v'_x(z_0) + y v'_y(z_0) &= x \operatorname{Im} f'(z_0) + y \operatorname{Re} f'(z_0) \end{aligned}$$

Tomando ahora $x = 1$ y $y = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} u'_x(z_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0) \\ v'_x(z_0) &= \operatorname{Im} f'(z_0) \end{aligned}$$

y tomando ahora $x = 0$ y $y = 1$

$$\begin{aligned} u'_y(z_0) &= -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ v'_y(z_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0) \end{aligned}$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$u'_x(z_0) = v'_y(z_0) \qquad \text{y} \qquad u'_y(z_0) = -v'_x(z_0)$$

conocidas con el nombre de ecuaciones de Cauchy Rieman. Además, en tal caso

$$f'(z_0) = \frac{d}{dz} f(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

Ejemplo 5 *Estudiar la derivabilidad de la función* $f(z) = x^2 + y^2$.

2.3.3. Funciones holomorfas

Diremos que f es **holomorfa (o analítica)** en z_0 si existe $r > 0$ tal que $f|_{D_r(z_0)}$ es derivable. Diremos que f es **holomorfa (o analítica) en un subconjunto** Ω de $\mathbb{C}$, y lo denotaremos por $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si f es holomorfa en todo punto de Ω. Al subconjunto abierto maximal donde f es holomorfa lo llamaremos **dominio de holomorfía** de f.

Ejemplo 6 *Determinar el dominio de holomorfía de las funciones* $f(z) = z^2$ *y* $f(z) = |z|^2$.

Cada punto del complementario (en $\mathbb{C}$) del dominio de holomorfía de una función recibe el nombre de **singularidad**. Cuando una función no admite singularidades, es decir, el dominio de holomorfía es $\mathbb{C}$, diremos que la función es **entera**.

Ejemplo 7 *La función* $f(z) = z^2$ *es entera y cualquier punto de* $\mathbb{C}$ *es una singularidad de la función* $f(z) = |z|^2$.

2.3.4. Funciones armónicas

Supongamos que f es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces,

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

son dos funciones diferenciables en Ω que verifican

$$u'_x = v'_y \qquad v'_x = -u'_y \tag{2.2}$$

en Ω.

Supongamos ahora que tanto u como v son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (más tarde veremos como las condiciones anteriores implican que la función es de clase $\mathcal{C}^\infty$). Entonces, derivando la primera ecuación de (2.2) respecto de x

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = v''_{yx},$$

intercambiando el orden de derivación, derivando la segunda respecto de y

$$v''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -u''_{yy}$$

y, en función del Teorema de Schwarz se obtiene[1],

$$\nabla^2 u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

en Ω. Análogamente, pero esta vez derivando la primera ecuación de (2.2) respecto de y, y la segunda respecto de x, obtenemos que

$$\nabla^2 v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0,$$

en Ω.

Llamaremos **ecuación de Laplace** de una función w a la ecuación

$$\nabla^2 w = 0.$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace que tienen derivadas parciales de segundo orden continuas se denominan **funciones armónicas** y su teoría se denomina **teoría del potencial**.

La ecuación de Laplace, es una de las ecuaciones diferenciales fundamentales de la ciencia y la técnica; esencialmente por aparecer involucrada en la formulación matemática de todo tipo de sistemas reales, desde problemas

[1] ∇^2 se lee nabla al cuadrado o nabla cuadrada

de transporte de energía en medios continuos, hasta problemas de dinámica de poblaciones y de formación de turbulencias en dinámica de fluidos.

Utilizando esta terminología, acabamos de probar que las partes real e imaginaria de una función holomorfa deben ser funciones armónicas. Además es posible demostrar el recíproco de este hecho. A saber, que toda función armónica u es (localmente) la parte real de alguna función holomorfa, es decir, existe $v \in C^2(\Omega)$ tal que

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

es holomorfa. A la función v se le llama función **armónica conjugada** de u.

Teorema 2.3.2 *Armónica conjugada y funciones holomorfas*
Una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en un dominio Ω si y sólo si v es una armónica conjugada de u.

El siguiente ejemplo muestra que si v es armónica conjugada de u en algún dominio, no es cierto en general, que u sea armónica conjugada de v en él.

Ejemplo 8 *Verificar que la función $v(x,y) = 2xy$ es armónica conjugada de $u(x,y) = x^2 - y^2$ y u no es armónica conjugada de v.*

Ejemplo 9 ***Método para determinar una función armónica conjugada***
Verificar que la función $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ es armónica en todo el plano complejo y encontrar una función armónica conjugada v de u.

2.4. Funciones complejas elementales

En las secciones restantes de este capítulo se analizaran las funciones complejas elementales más importantes. Tales funciones se definirán de modo que para $z = x$ real se reduzcan a las funciones conocidas del cálculo.

2.4.1. Funciones polinómicas y racionales

Tanto lo polinomios como las funciones racionales desempeñan un papel central en la teoría de funciones de variable compleja, como tendremos ocasión de comprobar a lo largo del texto.

Para cada número no negativo n se llama **función polinómica** de grado n a toda función de la forma

$$P(z) := \sum_{j=0}^{n} c_j z^j = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n \text{ con } z \in \mathbb{C},$$

donde $c_j \in \mathbb{C}$, con $c_n \neq 0$ si $n \geq 1$. Los funciones polinómicas son funciones enteras.

Se llama **función racional** a cualquier cociente de dos polinomios cuyo denominador no es el polinomio cero. El dominio de holomorfía de una función racional es el complementario del conjunto de raíces del polinomio denominador, es decir, las singularidades de una función racional son las raíces del polinomio denominador. No obstante (algunas de) estas singularidades podrían evitarse considerando la extensión continua de la función de partida.

Ejemplo 10 *Extensión de una función*
Extender continuamente la función

$$f(z) = \frac{z^2 - z}{z} \text{ con } z \neq 0$$

Las **funciones simples**

$$\frac{c}{(z - z_0)^m}$$

donde $c, z_0 \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$, son funciones racionales especiales: son holomorfas en todo el plano complejo excepto en z_0. En álgebra se demuestra que toda función racional puede expresarse como una suma de un polinomio y un número finito de funciones simples.

2.4.2. La función exponencial

Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definimos e^z como

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde e^x es la exponencial real del número e al exponente x y

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

es la denominada **fórmula de Euler.**

La exponencial compleja es una extensión de la exponencial real

Por definición,

$$e^z = e^x$$

cuando $y = 0$ y, por consiguiente la función exponencial

$$z \longmapsto e^z$$

es una extensión al plano complejo de la exponencial real $x \longmapsto e^x$.

Propiedades de la función exponencial

Sean $z = x + iy$ y $w = u + iv$ dos números complejos arbitrarios. Se verifica:

(i) $e^{z+w} = e^z e^w$.

(ii) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

(iii) $(e^z)^k = e^{kz}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $|e^z| = e^x > 0$. En particular, $|e^{iy}| = 1$.

Por definición $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $|e^{iy}| = 1$. Consideremos ahora $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x.$$

(v) $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $e^z = 1$. Aplicando ahora *(iv)*, $e^x = 1$ y, consecuentemente, $x = 0$. Por lo tanto,

$$1 = e^{x+iy} = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

de donde se deduce que $y = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente,

$$z = iy = 2\pi ik \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Recíprocamente, por la propia definición, si $z = 2\pi ik$ con $k \in \mathbb{Z}$, $e^z = 1$.

Periodicidad de la función exponencial

En resumen muchas de las propiedades de e^z son semejantes a las de e^x. Claramente la última propiedad determina la periodicidad de la función e^z con periodo $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

Es decir, todos los valores que puede asumir la función exponencial ya han sido asumidos en la banda horizontal de ancho 2π,

$$-\pi < y \leq \pi.$$

Esta banda infinita se llama **región fundamental** de e^z.

La función exponencial es entera

La función exponencial $f(z) = e^z$ es entera. En efecto, si $z = x + iy$, entonces

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

y

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Es obvio que u y v tienen derivadas parciales de todos los órdenes. Además,

$$u'_x(x,y) = e^x \cos y = v'_y(x,y) \text{ y } v'_x(x,y) = e^x \operatorname{sen} y = -u'_y(x,y).$$

Por consiguiente las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todo el plano complejo y la exponencial es una función entera. Además,

$$\frac{d}{dz}e^z = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z.$$

2.4.3. El logaritmo complejo

Recordar que, para cada $x > 0$,

$$u = \ln x \Longleftrightarrow e^u = x.$$

Para definir correctamente el logaritmo complejo tomemos una situación similar, es decir, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ determinemos el conjunto de soluciones $w = u + iv$ de la ecuación $e^w = z$. Para ello observar que dicha ecuación $e^w = z$ puede escribirse

$$e^u e^{iv} = |z| e^{i \arg z}. \tag{2.3}$$

Por lo tanto tomando módulos en ambos miembros

$$e^u = |z| \tag{2.4}$$

de donde se concluye que

$$u = \ln(|z|).$$

A partir de (2.3), dividiendo por $|z|$ y teniendo en cuenta (2.4) obtenemos

$$e^{iv} = e^{i \arg z},$$

que se verifica si y sólo si

$$v = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \ln z &= \{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid e^{w} = z\} \\ &= \{w = \ln(|z|) + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\ln z = \ln(|z|) + i \arg z = w.$$

De esta forma podemos concluir que el logaritmo complejo no es una función propiamente dicha, sino una correspondencia multívoca, a menos que fijemos una determinación del argumento, en cuyo caso, efectivamente nos proporciona una función. Llamaremos **logaritmo principal** y lo denotaremos por Ln, a la determinación del logaritmo complejo que nos proporciona la determinación principal del argumento

$$\operatorname{Ln} z = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg} z, \; z \neq 0.$$

Ejemplo 11 *Determinar* $\ln i$, $\ln(-1)$, $\operatorname{Ln} i$ *y* $\operatorname{Ln}(-1)$

El logaritmo principal es una extensión del logaritmo real

Observar que para todo $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, $Arg x = 0$ y $\operatorname{Ln} x$ es el logaritmo conocido por cálculo real

$$\operatorname{Ln} x = \ln x,$$

por consiguiente, la función logaritmo principal, Ln, es una extensión a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ del logaritmo real ln. Gracias a esta igualdad, a partir de ahora escribiremos Ln en vez de ln. Es decir,

$$\ln z = \operatorname{Ln}|z| + i \arg z \text{ con } z \neq 0.$$

Si z es un número real negativo (de modo que no está definido el logaritmo natural real de cálculo), entonces $\operatorname{Arg} z = \pi$ y

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + \pi i$$

Propiedades de los logaritmos
Para todo $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se verifica

(i) $\ln(zw) = \ln z + \ln w$.

(ii) $\ln \frac{z}{w} = \ln z - \ln w$.

Ejemplo 12 *Verificar que*

$$\ln i^2 \neq 2 \ln i.$$

2.4.4. Funciones trigonométricas

Así como e^z extiende e^x a los complejos, se desea que las funciones trigonométricas complejas extiendan las funciones trigonométricas reales conocidas. La idea para establecer esta conexión es la fórmula de Euler. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

y consecuentemente

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \qquad \text{y} \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \operatorname{sen} x.$$

De esta manera es posible definir el coseno y seno reales

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

y es bastante natural definir el coseno y seno complejos como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

funciones que reciben el nombre de **coseno y seno complejos**, respectivamente.

De esta forma

$$2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} \qquad \text{y} \qquad 2i\,\mathrm{sen}\, z = e^{iz} - e^{-iz}$$

y sumando ambas expresiones

$$2\cos z + 2i\,\mathrm{sen}\, z = 2e^{iz},$$

es decir, la fórmula de Euler es válida para cualquier complejo z

$$e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z$$

Otras funciones trigonométricas

Al igual que en el caso real, a partir del seno y coseno complejos se pueden definir **la tangente, la secante, la cotangente y la cosecante,** que son extensiones a su dominio de definición en el plano complejo de sus versiones de variable real. En concreto,

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\mathrm{sen}\, z}. \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\mathrm{sen}\, z}. \end{aligned}$$

Ejemplo 13 *Determinar los ceros de* $\cos z$ *y* $\sin z$.

Estas funciones de variable compleja satisfacen algunas de las relaciones trigonométricas de sus restricciones al eje real. Entre ellas, las siguientes:

Propiedades del coseno y seno.

Sea $z, w \in \mathbb{C}$. Se verifica:

(i) $\cos(-z) = \cos z \quad$ y $\quad \mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}\, z$.

(ii) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$.

(iii) $\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\, z \cos w + \cos z\, \mathrm{sen}\, w$.

(iv) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w$.

Dominio de holomorfía de las funciones trigonométricas

Las funciones $\cos z$ y $\sin z$ son enteras y

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

Además $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in Z\right\}\right)$ y

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z.$$

También se pueden definir sus correspondencias inversas asociadas: **arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante y arcocosecante.**

Ejemplo 14 *Determinar el* $\arcsin 2$.

2.4.5. Funciones hiperbólicas

El coseno y el seno hiperbólicos, que denotaremos respectivamente por cosh y sinh, son las funciones definidas por

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Otras funciones hiperbólicas

A partir de estas dos funciones se definen las restantes funciones hiperbólicas: **tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica**

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\operatorname{senh} z}{\cos z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}. \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \end{aligned}$$

Propiedades de las funciones hiperbólicas

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se verifica:

(i) $\cosh(-z) = \cosh z \quad$ y $\quad \sinh(-z) = -\sinh z.$

$\cosh(iz) = \cos z \quad$ y $\quad \operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$

(ii) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(iii) $\operatorname{sen}(z+w) = \sinh z \cosh z + \cosh z \sinh w$.

(iv) $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$.

Dominio de holomorfía de las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas $\cosh z$ y $\sinh z$ son enteras y

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z.$$

Además $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i \mid k \in Z\right\}\right)$ y

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z.$$

También se pueden definir sus correspondencias inversas asociadas: **argumento seno hiperbólico, argumento coseno hiperbólico,...**