1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ c) $h(x) = \sqrt{x^3+3x^2-4x-12}$ d) $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

e) $l(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ f) $m(x) = \ln(x^2)$ g) $n(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$ h) $o(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

**Solución:**

*a*) Cociente de dos polinomios, su dominio es $\mathbb{R}$ menos el conjunto de puntos que anulan el denominador que, para este caso, es $x+1=0 \Rightarrow x_1 = -1$. Luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

*b*) Cociente de dos polinomios, su dominio es $\mathbb{R}$ menos el conjunto de puntos que anulan el denominador que, para este caso, es $x^2-4=0 \Rightarrow x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Luego $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$.

*c*) Es una raíz cuadrada, por tanto el argumento debe ser $\geq 0$. Para encontrar los valores de $x$ donde ocurre esto, hay que factorizar el polinomio, para ello buscamos sus raíces, que podemos obtener por Ruffini y son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ y $x_3 = -3$, por tanto

$$x^3+3x^2-4x-12 = (x-2)(x+2)(x+3)$$

El signo de cada monomio está dado por

$$\begin{aligned} (x-2) &\geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2 \\ (x+2) &\geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -2 \\ (x+3) &\geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -3 \end{aligned}$$

usando los dos primeros monomios tendremos

$$(x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ o } x \leq -2$$

y combinado con el último tendremos

$$(x-2)(x+2)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ o } x \in [-3, -2]$$

luego el dominio de la función es

$$\text{Dom}(g) = [-3, -2] \cup [2, \infty[$$

*d*) Es una raíz cuadrada, por tanto el argumento debe ser $\geq 0$. En este caso

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \geq 0$$

luego el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

*e*) Es la raíz cuadrada de una función racional. En primer lugar el argumento debe ser positivo, como es un cociente de dos funciones, esto ocurrirá bien cuando las dos funciones sean positivas o bien cuando las dos funciones sean negativas, además el denominador no se puede anular, es decir

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \geq 0 \text{ y } (x+2) > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ y } x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ (x-1) < 0 \text{ y } (x+2) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ y } x < -2 \Leftrightarrow x < -2 \end{cases}$$

luego el dominio de la función es

$$\text{Dom}(l) = ]-\infty, -2[ \cup [1, \infty[$$

*f*) Es un logaritmo luego el argumento debe ser estrictamente positivo

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

el dominio de la función será

$$\mathrm{Dom}\,(m) = \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$$

*g*) Es una raíz cúbica, luego el dominio puede ser cualquier número real.

*h*) Es un cociente de funciones que no puede calcularse cuando se anule el denominador, es decir

$$\mathrm{sen}\,(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Demuestra por la definición de límite que:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0 \quad \text{b) } \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6} = -1 \quad \text{c) } \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \frac{2}{3}$$

**Solución:** Este tipo de ejercicios no entrará en el examen.

3. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \qquad \text{c) } \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

$$\text{d) } \lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1} \qquad \text{e) } \lim_{x\to \infty} \frac{5x-4x^2-1}{2x^3-x-1} \qquad \text{f) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\text{g) } \lim_{x\to 0} x\cot 3x \qquad \text{h) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x(x-2)\tan 2x} \qquad \text{i) } \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-\sqrt{x}}$$

$$\text{j) } \lim_{x\to \pi} (3\cos 2x)^{\frac{2}{(x-\pi)^2}} \qquad \text{k) } \lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad \text{l) } \lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

*a*) Sustituyendo directamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0^2-1}{2\cdot 0^2-0-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \in \mathbb{R}.$$

*b*) Sustituyendo directamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1^2-1}{2\cdot 1^2-1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para deshacer la indeterminación, podemos bien factorizar numerador y denominador

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

o bien usando la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{4x-1} = \frac{2\cdot 1}{4\cdot 1-1} = \frac{2}{3}.$$

*c*) Directamente

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Para deshacer la indeterminación, podemos bien dividir numerador y denominador por $x^2$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to \infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0+1}{2-0-0} = \frac{1}{2}$$

bien usando la Regla de L'Hôpital dos veces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

o bien mediante infinitos equivalentes, ya que un polinomio en el infinito es equivalente a su término de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

*d*) Directamente usando infinitos equivalentes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}x = \infty.$$

*e*) Directamente usando infinitos equivalentes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-4x^2-1}{2x^3-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^2}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} -2\frac{1}{x} = 0.$$

*f*) Sustituyendo directamente podemos comprobar que el valor es $\frac{0}{0}$, así que podemos o bien utilizar 3 veces la regla de L'Hôpital, donde se ha factorizado en cada paso

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x(1+x)}{x^3} &= \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - (1+2x)}{3x^2} \\
&= \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x - 2}{6x} \\
&= \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

También podemos utilizar infinitésimos equivalentes, teniendo la precaución de tomar suficientes términos en cada desarrollo, como abajo está la potencia al cubo, el desarrollo debe ser al menos del mismo orden, en cada paso se eliminan las potencias mayores que 3 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) - x - x^2}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) + x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) - x - x^2}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3!}+x^2+\frac{x^3}{2!}-x-x^2}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

*g*) Usando la definición de $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0} x \cot 3x = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{0\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Usando, por ejemplo, infinitésimos equivalentes (se puede hacer por L'Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{3} = \frac{1}{3}$$

*h*) Usamos infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x(x-2)\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(3x)^2}{2}}{x(x-2)2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4(x-2)}=-\frac{3}{8}$$

*i*) Usamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}}{x\left(2\sqrt{x}-1\right)}=2$$

*j*) Directamente

$$\lim_{x\to\pi}(3\cos 2x)^{\frac{2}{(x-\pi)^2}}=3^{\infty}=\infty$$

*k*) Directamente

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}=0^{-\infty}\Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Usando la función exponencial

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\log x}\log(\arctan x)}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\log x}\log(\arctan x)}$$

y para el exponente, usamos infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\log x}\log(\arctan x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\log x}\log(x)=1$$

luego

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}=e$$

*l*) Directamente

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}\Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Usando la función exponencial e infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\log\cos(3x)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\cos(3x)}$$

y para el exponente usamos L'Hôpital dos veces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(3x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\tan(3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-9\left(1+\tan^2(3x)\right)}{2}=-\frac{9}{2}$$

por tanto

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-9/2}.$$

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x)=x^2-1$

b) $g(x)=\sqrt{x^2-4}$

c) $h(x)=\left|x^2-6x+8\right|$

d) $k(x)=\left|\dfrac{x}{1+x}\right|$

e) $l(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

f) $m(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

g) $n(x)=\dfrac{1}{|x|}$

h) $o(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<-2\\ x+1 & -2\le x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases}$

i) $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0\\ x+1 & 0\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x^2-9} & x>3\end{cases}$

j) $q(x)=\begin{cases} -2x+1 & x\le 0\\ 2x+3 & 0<x\le 2\\ \dfrac{1}{x-2} & x\ge 2\end{cases}$

*a*) Es un polinomio por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

*b*) Es una raíz cuadrada, por tanto es continua en todos los puntos donde el argumento es positivo: $x^2-4\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,\infty\right[$.

*c*) Es el valor absoluto de un polinomio, es decir, es la composición de la función valor absoluto, que es continua en todos los reales con un polinomio que también es una función continua en todos los reales, por tanto la función $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

*d*) Es el valor absoluto de una función racional, por tanto será continua en todos los puntos salvo aquellos que anulan el denominador, es decir, $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$, la función será continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$. Tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito en $-1$.

*e*) Cociente de polinomios, es continua, salvo los puntos que anulan el denominador $x^2-4=0\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}-\{2,-2\}$. La función tiene dos discontinuidades de salto infinito en 2 y $-2$.

*f*) Cociente de polinomios, es continua salvo los puntos que anulan el denominador, pero

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

es decir, el denominador no se anula nunca y por tanto la función es continua en todos los reales.

*g*) Discontinua en $x=0$, con discontinuidad de primera especie de salto infinito.

*h*) Como en cada tramo la función es un polinomio, sólo tenemos que comprobar cuánto vale la función a izquierda y derecha en los puntos donde la función cambia de expresión

$$o(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<-2 \\ x+1 & -2\leq x<2 \\ 2x-1 & x\geq 2 \end{cases}$$

estos valores deben ser iguales para que la función sea continua.

$$x = -2\Rightarrow\begin{cases} o(-2^-)=(-2)^2-4=0 \\ \\ o(-2^+)=(-2)+1=-1 \end{cases}\Rightarrow o\left(-2^-\right)\neq o\left(-2^+\right)\Rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito} -1 \text{ en } -2.$$

$$x = 2\Rightarrow\begin{cases} o(2^-)=3 \\ \\ o(2^+)=3 \end{cases}\Rightarrow o\left(2^-\right)=o\left(2^+\right)=o(2)\Rightarrow \text{Continua en 2.}$$

*i*) Como en cada tramo la función es una función racional, sólo tenemos que comprobar cuánto vale la función a izquierda y derecha en los puntos donde la función cambia de expresión

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x+1 & 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & x>3 \end{cases}$$

estos valores deben ser iguales para que la función sea continua.

$$x = 0\Rightarrow\begin{cases} p(0^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} p(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty \\ \\ p(0^+)=0+1=1 \end{cases}\Rightarrow p\left(0^-\right)\neq p\left(0^+\right)\Rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en 0.}$$

$$x = 3\Rightarrow\begin{cases} p(3^-)=3+1=3 \\ \\ p(3^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>3}} p(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>3}}\frac{1}{x^2-9}=\infty \end{cases}\Rightarrow p\left(3^-\right)\neq p\left(3^+\right)\Rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en 3.}$$

Por otra parte aunque la expresión

$$\frac{1}{x^2-9}$$

también sea discontinua en $x=-3$, puesto que anula el denominador, por la definición de $p$ y se $-x<0$, tendremos que usar la expresión $\frac{1}{x}$ que sí es continua en este punto.

*j*) Como en cada tramo la función es un polinomio, sólo tenemos que comprobar cuánto vale la función a izquierda y derecha en los puntos donde la función cambia de expresión

$$q(x)=\begin{cases} -2x+1 & x\leq 0 \\ 2x+3 & 0<x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x\geq 2 \end{cases}$$

estos valores deben ser iguales para que la función sea continua.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} q(0^-)=-2\cdot 0+1=1 \\ \\ q(0^+)=2\cdot 0+3=3 \end{cases} \Rightarrow q\left(0^-\right)\neq q\left(0^+\right) \Rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito 2 en 0.}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} q(2^-)=2\cdot 2+3=7 \\ \\ q(2^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>2}} q(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>2}} \frac{1}{x-2}=\infty \end{cases} \Rightarrow q\left(2^-\right)\neq q\left(2^+\right) \Rightarrow \text{Discontinuidad de salto infinito en 2.}$$

5. Determina $a,b\in\mathbb{R}$ para los cuales las siguientes funciones son continuas:

$$\text{a) } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ tal que } f(x)=\begin{cases} ax-5 & x\leq -1 \\ -ax+b & -1<x<2 \\ -2ax+3b & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } g:[-2,5)\to\mathbb{R} \text{ tal que } g(x)=\begin{cases} 3x+a & -2\leq x<-1 \\ bx+a & -1\leq x<3 \\ 2x-b & 3\leq x<5 \end{cases}$$

*a*) La función $f$ es una función que en cada tramo tiene una expresión lineal (polinomio de primer grado) y por tanto es continua en cada tramo (continua a trozos) y sólo puede presentar problemas en los puntos donde la función cambia su expresión. Para que sea continua, es necesario que la función en estos puntos tenga el mismo valor a izquierda y derecha:

$$f(x)=\begin{cases} ax-5 & x\leq -1 \\ -ax+b & -1<x<2 \\ -2ax+3b & x\geq 2 \end{cases}$$

$$x=-1\Rightarrow \begin{cases} f(-1^-)=a\cdot(-1)-5=-a-5 \\ \\ f(-1^+)=-a\cdot(-1)+b=a-b \end{cases}$$

Como $f(-1^-)$ debe ser igual a $f(-1^+)$ entonces

$$-a-5=a-b\Rightarrow 2a-b=-5$$

por otra parte

$$x=2\Rightarrow \begin{cases} f(2^-)=-a\cdot 2+b=b-2a \\ \\ f(2^+)=-2a\cdot(2)+3b=3b-4a \end{cases}$$

Como $f(2^-)$ debe ser igual a $f(2^+)$ entonces

$$b-2a=3b-4a\Rightarrow 2a-2b=0\Rightarrow a=b$$

Para que la función $f$ sea continua debe ocurrir

$$\begin{aligned} a &= b \\ 2a - b &= -5 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$a = b = -5.$$

*b*) La función $g$ es una función que en cada tramo tiene una expresión lineal (polinomio de primer grado) y por tanto es continua en cada tramo (continua a trozos) y sólo puede presentar problemas en los puntos donde la función cambia su expresión. Para que sea continua, es necesario que la función en estos puntos tenga el mismo valor a izquierda y derecha:

$$g(x) = \begin{cases} 3x + a & -2 \leq x < -1 \\ bx + a & -1 \leq x < 3 \\ 2x - b & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

Para $x = -1$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} g(-1^-) = 3 \cdot (-1) + a = a - 3 \\ \\ g(-1^+) = b \cdot (-1) + a = a - b \end{cases}$$

Comog$(-1^-)$ debe ser igual a $g(-1^+)$ entonces

$$a - 3 = a - b \Rightarrow b = 3$$

por otra parte

$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} g(3^-) = b \cdot 3 + a = 3b + a \\ \\ g(3^+) = 2 \cdot 3 - b = 6 - b \end{cases}$$

Como $g(3^-)$ debe ser igual a $g(3^+)$ entonces

$$3b + a = 6 - b \Rightarrow a + 4b = 6$$

Para que la función $f$ sea continua debe ocurrir

$$\begin{aligned} b &= 3 \\ a + 4b &= 6 \end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned} b &= 3 \\ a &= -6. \end{aligned}$$

6. Demuestra, aplicando el Teorema de Bolzano que las siguientes ecuaciones tienen solución en los intervalos indicados

a) $x^3 + 2x - 1 = 0 \qquad x \in \left]0, 2\right[$

b) $1 - x = \tan x \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

c) $x^n - 2 = 0 \qquad n \in \mathbb{N}, n > 1, x \in \left]0, 2\right[$

*a*) Tomamos $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y evaluamos la función en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(2) &= 11 \end{aligned}$$

como $f(x)$ es una función continua por ser un polinomio y $f(0) \cdot f(2) < 0$ el teorema de Bolzano garantiza la existencia de un valor $\xi \in \left]0, 2\right[$ tal que

$$f(\xi) = 0.$$

*b*) Tomamos $g(x) = 1 - x - \tan(x)$ y evaluamos la función en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 > 0 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\pi}{4} < 0 \end{aligned}$$

como $g(x)$ es una función continua en $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ ya que es la suma de un polinomio $(1-x)$ y la función $\tan(x)$ que es discontinua en todos los reales salvo en los puntos $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ y ninguno de ellos está en el intervalo y como $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ el teorema de Bolzano garantiza la existencia de un valor $\xi \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que

$$g(\xi) = 0$$

y por tanto

$$1 - \xi - \tan(\xi) = 0 \Rightarrow 1 - \xi = \tan\xi.$$

*c*) Tomamos $h(x) = x^n - 2$ y evaluamos la función en los extremos del intervalo

$$\begin{aligned} h(0) &= -2 < 0 \\ h(2) &= 2^n - 2 > 0 \end{aligned}$$

donde se ha usado que $n > 1$ entonces $2^n > 2^1$ es decir $2^n - 2 > 0$
$h(x)$ es una función continua en $]0, 2[$ ya que es un polinomio y como $h(0) \cdot h(2) < 0$ el teorema de Bolzano garantiza la existencia de un valor $\xi \in ]0, 2[$ tal que

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - 2 = 0.$$

7. Indica en cada apartado qué hipótesis del Teorema de Bolzano falla y analiza si se verifica o no la Tesis de dicho Teorema:

a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

b) $g : [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 + 1$

*a*) Veamos si la función es continua en el intervalo $[0,2]$, para ello sólo hay que probar si la función tiene el mismo valor a izquierda y derecha del punto donde cambia su expresión, ya que en el resto la función es un polinomio y por tanto continua.

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1^-) = 1 - 1 = 0 \\ f(1^+) = 1^2 - 2 = -1 \end{cases}$$

por tanto $f(1^-) \neq f(1^+)$ y la función $f$ tiene una discontinuidad de salto finito igual a $-1$ en el punto 1. Por eso, aunque $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 2 > 0$, la función toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo no podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,2]$. Sin embargo, podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $(1,2)$ puesto que en dicho intervalo ocurre

$$f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot (2) < 0$$

y por tanto debe existir $\xi \in (1,2)$ con $f(\xi) = 0$, de hecho ese valor es $\sqrt{2}$.

*b*) En este caso la función $g(x) = x^2 + 1$ es continua, por ser un polinomio. Pero en este caso

$$g(1) \cdot g(3) = 2 \cdot 10 = 20 > 0$$

luego la función no toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo y el teorema de Bolzano no garantiza la existencia de una raíz de $g(x)$ en ese intervalo, de hecho la función no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$.

8. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Si consideramos que el coeficiente principal del polinomio es 1, entonces si el grado es impar, tiene la forma

$$P(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1}$$

Si ahora tomamos límites si $x \to \pm\infty$ entonces, usando infinitos equivalentes

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} P(x) &= \lim_{x\to\infty} x^{2n+1} = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} P(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty\end{aligned}$$

Por definición del primer límite

$$\forall M > 0 \Rightarrow \exists N_1 > 0 : x > N_1 \Rightarrow P(x) > M > 0$$

mientras que para $-\infty$

$$\forall M > 0 \Rightarrow \exists N_2 > 0 : x < -N_2 \Rightarrow f(x) < -M < 0$$

de forma que si $x \in (-N_2 - 1, N_1 + 1)$ ocurrirá

$$\begin{aligned}-N_2 - 1 &< -N_2 \Rightarrow P(-N_2 - 1) < 0 \\ N_1 + 1 &> N_1 \Rightarrow P(N_1 + 1) > 0\end{aligned}$$

$$P(-N_2 - 1) P(N_1 + 1) < 0$$

como $P(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, luego debe existir $\xi \in (-N_2 - 1, N_1 + 1)$ tal que

$$P(\xi) = 0$$

como queríamos demostrar.

9. Justifica que un hilo de alambre con forma circular calentado tiene dos puntos diametralmente opuestos con la misma temperatura.

**Solución:** Usaremos el teorema de Bolzano para probar este resultado. Supongamos que la temperatura en un punto $P$ está definida por $T(\theta)$ donde $\theta$ es el ángulo que forma el vector que une el centro de la circunferencia con el punto $P$ y el eje $OX$. Definimos la función $f(\theta)$ como

$$f(\theta) = T(\theta + \pi) - T(\theta)$$

Si consideramos $\theta \in [0, \pi]$ y evaluamos en los extremos del intervalo, obtenemos

$$\begin{aligned}f(0) &= T(\theta) - T(0) \\ f(\pi) &= T(2\pi) - T(\pi)\end{aligned}$$

pero está claro que $T(0) = T(2\pi)$ puesto que representan el mismo punto, así que

$$f(\pi) = T(0) - T(\pi) = -f(0)$$

por tanto

$$f(0) f(\pi) = -f(0)^2 < 0$$

finalmente la función $T(\theta)$ claramente continua, luego el Teorema de Bolzano garantiza la existencia de un punto $\xi \in [0, \pi]$ tal que

$$f(\xi) = 0 \Rightarrow T(\xi + \pi) - T(\xi) = 0 \Leftrightarrow T(\xi + \pi) = T(\xi)$$

luego $\xi$ y su antípoda $\xi + \pi$, tienen la misma temperatura.