Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas tema 7
Diagonalización de Matrices
Autovalores y autovectores

1. Sean $u,\ v \in \mathbb{R}^n$, vectores propios de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ asociados a valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Cada vector propio de A tiene asociado un único valor propio.

   b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, αu es un vector propio asociado al mismo valor propio λ.

   c) u y v son vectores linealmente independientes.

   d) Una matriz tiene el valor propio 0 si y sólo si su determinante es 0.

   e) $u + v$ es un vector propio de A.

   f) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces λ^n es un valor propio de A^n y si A es regular, $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

   g) Si A,C son semejantes entonces tienen el mismo determinante, el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

   h) Dos matrices diagonalizables son semejantes si y sólo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

2. Estudiar los valores propios de las siguientes matrices, decir si son diagonalizables y en caso afirmativo obtener la matriz de paso y la potencia n–ésima, siendo $n \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Estudiar según los valores de los parámetros, si son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ y $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

5. Sea f un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, y subespacios propios $N_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0; x - z = 0\}$, $N_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, y + z = 0\}$ y $N_{\lambda_3} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y = 0, 2x + y = 0\}$. Calcula la expresión analítica de f.

6. Hallar el polinomio característico, los valores propios y los subespacios propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Consideremos el tensor $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $T(x,y) = (2x-y, x+4y)$. Si consideramos el sistema de referencia[1] habitual en Física $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, es decir la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces T está representado por la matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es decir, $T_1 = M_B(T)$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de referencia dado por los vectores $B' = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (3,2)\}$, entonces el tensor T viene representado por la matriz

$$T_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de las matrices T_1 y T_2 son iguales y que los autovectores también son los mismos, sin embargo, las coordenadas de éstos últimos dependen del sistema de referencia que estemos usando. No podía ser de otra forma: los autovalores son independientes del sistema de referencia. Y los autovectores también, pero en el sentido de que dependen solamente del tensor aunque sus coordenadas cambien según la matriz que usemos para representar el tensor.

8. **Tensor de inercia de un sólido rígido**. En Mecánica del Sólido Rígido, el llamado *tensor de inercia* en un punto es una aplicación lineal que, como todas, se representa por medio de una matriz (en este caso simétrica) que denotaremos por T_i. Las llamadas *direcciones principales de inercia* se corresponden con los autovectores de T_i mientras que los *momentos principales de inercia* son los autovalores. Supongamos que el tensor de inercia en coordenadas cartesianas de un sólido bidimensional viene dado por

$$T_i = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula los momentos principales y las direcciones principales de inercia de I.

Interpretación geométrica: Consideremos la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Dibuja, con MAXIMA, dicha elipse. Comprueba que, con la ayuda de la matriz T_i anterior, la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma

$$(x,y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Comprueba que los autovalores de T_i son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$ y que sus autovectores asociados (normalizados) son $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. La matriz de cambio de base P que contiene los autovectores es ortogonal con lo que $P^{-1} = P^T$. Por tanto, se tiene la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si multiplicamos por la izquierda por (x,y) y por la derecha por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se tiene la identidad

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

[1] En este contexto un sistema de referencia es una base del espacio vectorial correspondiente.

lo que indica que con el cambio de variables $u = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ e $v = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, la ecuación de la elipse es $9u^2 + v^2 = 1$. Dibuja con MAXIMA esta nueva elipse.

9. **Elasticidad Lineal**. Se supone que el tensor de pequeñas deformaciones ε en un entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana viene dado por la matriz

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Calcula las deformaciones principales (autovalores) y direcciones principales de deformación (autovectores normalizados[2]).

Interpretación geométrica: la misma que en el ejercicio anterior pero cambiando la palabra inercia por deformación.

10. La **teoría de Hückel en Química Orgánica** analiza la posibilidad para algunos tipos de moléculas de tener propiedades aromáticas. Aplicada al ciclobutadieno C_4H_4, aparece asociado el problema de autovalores definido por la ecuación

$$\mathbf{HC} = E\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{H}$ representa el Hamiltoniano efectivo de un π electrón del sistema, los autovalores E de $\mathbf{H}$ son la energías orbitales de los π electrones, y los autovectores $\mathbf{C}$ representan las correspondientes orbitales moleculares. En concreto,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde α, β son números reales negativos.

Comprueba que los autovalores de $\mathbf{H}$ son $E_1 = \alpha + 2\beta$, $E_2 = E_3 = \alpha$, $E_4 = \alpha - 2\beta$, y que $C_1 = (1,1,1,1)$, $C_2 = (0,1,0,-1)$, $C_3 = (1,0,-1,0)$, $C_4 = (1,-1,1,-1)$ son autovectores asociados.

11. Responde a las siguientes cuestiones:

   a) Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y supongamos que $\lambda = 0$ es un autovalor de f. ¿Es f inyectiva ? ¿Por qué ?

   b) Sea A una matriz invertible y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A. ¿Cuáles son los autovalores de A^{-1} ? ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y los de A^{-1} ?

12. **Algunos tipos destacados de matrices**. Recogemos en la siguienta tabla algunos tipos de matrices importantes

[2] De módulo 1.

en las aplicaciones junto con las propiedades de sus autovalores y autovectores

Matriz	Definición	Autovalores	Autovectores
Simétrica	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (si son ortogonales)
Definida Positiva	$x^T \mathbf{A} x > 0$	$\lambda > 0$	
de Markov	$m_{ij} > 0, \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$	$\lambda_{\text{máx}} = 1$	$v_j\left(\lambda_{\text{máx}}\right) > 0$
Tridiagonal Tipo 1	$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$	$\lambda_k = a + 2b\cos\frac{k\pi}{n+1}$	
Ejemplo $a = 2$, $b = -1$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$v_k = \left(\text{sen}\,\frac{k\pi}{n+1}, \text{sen}\,\frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \right)$

Determina de qué tipo son cada una de las siguientes matrices y calcula sus autovalores y autovectores:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Calcula la potencia $n-$ésima de las matrices M_1 y M_4 del ejercicio anterior.

14. Estudia para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable la matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

15. **Teorema de Perron-Frobenius**. El teorema que sigue es una pieza clave en el algoritmo *PageRank* que usa Google para ordenar las búsquedas de las páginas de Internet. En su versión más sencilla el Teorema de Perron-Frobenius se enuncia así: "Sea A una matrix cuadrada con entradas positivas, es decir, $a_{ij} > 0$. Entonces existe un autovalor simple (es decir, de multiplicidad 1) cuyo autovector asociado tiene todas sus componentes estrictamente positivas". Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y comprueba que se satisface el Teorema de Perron-Frobenius.

El secreto de Google y el Álgebra Lineal. Se recomienda la lectura de este artículo profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, Pablo Fernández Gallardo, a aquellos alumnos que tengan curiosidad por saber las Matemáticas usadas en el algoritmo PageRank de Google. En particular, se podrá apreciar el papel destacado del Teorema de Perron-Frobenius.