

1. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a)  $y' = \frac{3x^2}{y}$

(b)  $y' = 4xy^2$

(c)  $y' = 3x^2y$

(d)  $y^2y' = e^x$

(e)  $y' = y(y - 1)$

(f)  $y' = \frac{y}{x}$

(g)  $y' + 2y = 4$

(h)  $y' + 3y = e^{-3x}$

(i)  $y' + (2 \tan x)y = \sin x$

(j)  $y' + \frac{2y}{x} = 2 \cos x$

(k)  $y' + ax^2y = bx^2$

(l)  $y' + a\frac{y}{x} = x^2$

(m)  $y' - \frac{1}{x}y = x^2$

(n)  $y' \cos x + y \sin x = 1$

(o)  $y' - \frac{2ax}{1+x^2}y = 2x; \quad a \neq 0, 1$

(p)  $(\sin^2 x - y) dx = \tan x dy$

(q)  $y' = y - \ln x + \frac{1}{x}$

**Solución:** Se indica el tipo en cada caso. Notar que se expresa  $y' = \frac{dy}{dx}$

a) Variables separadas

$$y' = \frac{3x^2}{y} \Leftrightarrow y dy = 3x^2 dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = x^3 + C \Leftrightarrow y^2 = x^3 + 2C$$

La solución en forma implícita es

$$2x^3 - y^2 + K = 0$$

tomando  $K = 2C$ .

b) Variables separadas

$$y' = 4xy^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = 4x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2x^2 + C}$$

c) Variables separadas

$$y' = 3x^2y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = 3x^2 dx \Leftrightarrow \ln |y| = x^3 + C \Leftrightarrow y = e^{x^3+C} = Be^{x^3}$$

d) Variables separadas

$$y^2y' = e^x \Leftrightarrow y^2 dy = e^x dx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = e^x + C \Leftrightarrow y^3 = 3e^x + 3C = 3e^x + K$$

y la solución es

$$y = \sqrt[3]{3e^x + K} = (3e^x + K)^{1/3}$$

e) Variables separadas

$$y' = y(y-1) \Leftrightarrow \frac{1}{y(y-1)} dy = dx$$

La integral de la izquierda la realizamos mediante descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \left( \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} \right) dy = A \ln |y| + B \ln |y-1|$$

Calculamos los valores  $A$  y  $B$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1) + By}{y(y-1)} \Leftrightarrow A(y-1) + By = 1 \Leftrightarrow (A+B)y - A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

por tanto

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = -\ln |y| + \ln |y-1| = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|$$

por tanto

$$\frac{1}{y(y-1)} dy = dx \Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + C$$

y tomando logaritmos

$$\frac{y-1}{y} = e^{x+C} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{y} = Be^x \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - Be^x \Leftrightarrow y = \frac{1}{1 - Be^x}$$

f) Variables separadas

$$y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln |y| = \ln |x| + C \Leftrightarrow y = Bx$$

g) Lineal no homogénea

$$y' + 2y = 4$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + 2y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -2dx \Leftrightarrow \ln(y) = -2x + C \Leftrightarrow y = Be^{-2x}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x) e^{-2x} \Rightarrow y'(x) = B'(x) e^{-2x} - 2B(x) e^{-2x}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$y' + 2y = 4 \Rightarrow (B'(x) e^{-2x} - 2B(x) e^{-2x}) + 2B(x) e^{-2x} = 4 \Rightarrow B'(x) e^{-2x} = 4$$

de donde

$$B'(x) = 4e^{2x}$$

e integrando

$$B(x) = \int 4e^{2x} dx = 2e^{2x} + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x) e^{-2x} = (2e^{2x} + C) e^{-2x} = 2 + Ce^{-2x}$$

h) Lineal no homogénea

$$y' + 3y = e^{-3x}$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + 3y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -3dx \Leftrightarrow \ln(y) = -3x + C \Leftrightarrow y = Be^{-3x}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)e^{-3x} \Rightarrow y'(x) = B'(x)e^{-3x} - 3B(x)e^{-3x}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$y' + 3y = e^{-3x} \Rightarrow (B'(x)e^{-3x} - 3B(x)e^{-3x}) + 3B(x)e^{-3x} = e^{-3x} \Rightarrow B'(x)e^{-3x} = e^{-3x}$$

de donde

$$B'(x) = 1$$

e integrando

$$B(x) = \int dx = x + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x)e^{-3x} = (x + C)e^{-3x}$$

i) Lineal no homogénea

$$y' + (2 \tan x)y = \sin x$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + (2 \tan x)y = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + (2 \tan x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -(2 \tan x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -2 \frac{\sin x}{\cos x} dx \Leftrightarrow \ln(y) = 2 \ln(\cos x) + C \Leftrightarrow y = B \cos^2 x$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x) \cos^2 x \Rightarrow y'(x) = B'(x) \cos^2 x - 2B(x) \sin x \cos x$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$y' + (2 \tan x)y = \sin x \Rightarrow$$

$$(B'(x) \cos^2 x - 2B(x) \sin x \cos x) + 2 \frac{\sin x}{\cos x} B \cos^2 x = \sin x \Rightarrow$$

$$B'(x) \cos^2 x = \sin x$$

de donde

$$B'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

e integrando

$$B(x) = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x) \cos^2 x = \left( \frac{1}{\cos x} + C \right) \cos^2 x \Rightarrow y(x) = C \cos^2 x + \cos x$$

j) Lineal no homogénea

$$y' + \frac{2y}{x} = 2 \cos x$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + \frac{2y}{x} = 0$$

que es de variables separadas con solución

$$y' + \frac{2y}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \ln(y) = -2 \ln x + C \Leftrightarrow y = B \frac{1}{x^2}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x) \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'(x) = B'(x) \frac{1}{x^2} - 2B(x) \frac{1}{x^3}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\left( B'(x) \frac{1}{x^2} - 2B(x) \frac{1}{x^3} \right) + \frac{2}{x} \left( B(x) \frac{1}{x^2} \right) = 2 \cos x \Rightarrow$$

$$B'(x) \frac{1}{x^2} = 2 \cos x \Rightarrow B'(x) = 2x^2 \cos x$$

e integrando por partes  $u = 2x^2$  y  $dv = \cos x dx$ , de donde  $du = 4x$  y  $v = \operatorname{sen} x$

$$B(x) = \int 2x^2 \cos x dx = 2x^2 \operatorname{sen} x - \int 4x \operatorname{sen} x dx$$

y volvemos a integrar por partes  $u = 4x$  y  $dv = \operatorname{sen} x dx$ , de donde  $du = 4 dx$  y  $v = -\cos x$

$$B(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x - \left( -4x \cos x + 4 \int \cos x dx \right)$$

$$= 2x^2 \operatorname{sen} x + 4x \cos x - 4 \operatorname{sen} x + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x) \frac{1}{x^2} = (2x^2 \operatorname{sen} x + 4x \cos x - 4 \operatorname{sen} x + C) \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{2x^2 \operatorname{sen} x + 4x \cos x - 4 \operatorname{sen} x + C}{x^2}$$

k) Ecuación lineal de primer orden no homogénea con coeficientes variables

$$y' + ax^2y = bx^2$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + ax^2y = 0$$

que es de variables separadas. Si  $a \neq 0$

$$y' + ax^2y = 0 \Leftrightarrow y' = -ax^2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -ax^2 \Leftrightarrow \ln(y) = -\frac{ax^3}{3} + C \Leftrightarrow y = Be^{-ax^3/3}$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x)e^{-ax^3/3} \Rightarrow y'(x) = B'(x)e^{-ax^3/3} - B(x)ax^2e^{-ax^3/3}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\left(B'(x)e^{-ax^3/3} - B(x)ax^2e^{-ax^3/3}\right) + ax^2\left(B(x)e^{-ax^3/3}\right) = bx^2 \Rightarrow$$

$$B'(x)e^{-ax^3/3} = bx^2 \Rightarrow$$

$$B'(x) = bx^2e^{ax^3/3}$$

e integrando

$$B(x) = \int bx^2e^{ax^3/3}dx = \frac{b}{a}e^{ax^3/3} + C$$

luego la solución buscada es

$$y(x) = B(x)e^{-ax^3/3} = \left(\frac{b}{a}e^{ax^3/3} + C\right)e^{-ax^3/3} \Rightarrow y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax^3/3}$$

Si  $a = 0$

$$y' + ax^2y = bx^2 \Rightarrow y' = bx^2 \Rightarrow y = \frac{bx^3}{3} + C$$

l)

$$y' + a\frac{y}{x} = x^2$$

Ecuación lineal de primer orden no homogénea con coeficientes variables

$$y' + a\frac{y}{x} = x^2$$

Primero resolvemos la homogénea

$$y' + a\frac{y}{x} = 0$$

que es de variables separadas. Si  $a \neq 0$

$$y' + a\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -a\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{a}{x} \Leftrightarrow \ln(y) = -a \ln x + C \Leftrightarrow y = B\frac{1}{x^a},$$

y hacemos variación de constantes

$$y(x) = B(x) \frac{1}{x^a} \Rightarrow y'(x) = B'(x) \frac{1}{x^a} - aB(x) \frac{1}{x^{a+1}},$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$\left( B'(x) \frac{1}{x^a} - aB(x) \frac{1}{x^{a+1}} \right) + \frac{a}{x} \left( B(x) \frac{1}{x^a} \right) = x^2 \Rightarrow B'(x) \frac{1}{x^a} = x^2 \Rightarrow B'(x) = x^{2+a}$$

e integrando

$$B(x) = \int x^{2+a} dx = \begin{cases} a \neq -3 \Rightarrow \frac{x^{3+a}}{3+a} + C \\ a = -3 \Rightarrow \ln(x) + C \end{cases}$$

luego la solución buscada es en función de  $a$

$$y(x) = B(x) \frac{1}{x^a} = \begin{cases} a \neq -3 \Rightarrow \left( \frac{x^{3+a}}{3+a} + C \right) \frac{1}{x^a} \\ a = -3 \Rightarrow (\ln(x) + C) \frac{1}{x^a} \end{cases}$$

Si  $a = 0$

$$y' + a \frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow y' = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + C$$

*Pendientes de resolver (m,n,o,p,q)*

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} y' = \frac{y+2}{x-3} \\ y(0) = 1 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} y' = \frac{x^2-1}{2y+1} \\ y(0) = -1 \end{cases} \\ \text{(d)} \begin{cases} y' = \frac{x+y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} 2xyy' = -(x^2+y^2) \\ y(1) = 0 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} xy^3y' = x^4+y^4 \\ y(2) = 0 \end{cases} \\ \text{(g)} \begin{cases} y' = 3x^2y+x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} & \text{(h)} \begin{cases} y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases} & \end{array}$$

**Solución:**

a) Variables separadas

$$y' = \frac{y+2}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{y+2} y' = \frac{1}{x-3}$$

integrando

$$\ln(y+2) = \ln(x-3) + C \Rightarrow (y+2) = A(x-3) \Rightarrow y(x) = Ax - (3A+2)$$

Aplicamos la condición inicial

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = -(3A + 2) = 1 \Leftrightarrow A = -1$$

y la solución es

$$y(x) = -x + 1.$$

b) Variables separadas

$$y' = e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow y' e^{-y} = e^x$$

integrando

$$-e^{-y} = e^x + C \Rightarrow e^{-y} = A - e^x$$

tomando logaritmos

$$-y = \ln(A - e^x) \Rightarrow y(x) = -\ln(A - e^x) = \ln \frac{1}{A - e^x}$$

Aplicamos condición inicial

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \ln \frac{1}{A - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{A - 1} = 1 \Leftrightarrow A = 2$$

La solución es

$$y(x) = \ln \frac{1}{2 - e^x}$$

c) Variables separadas

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2y + 1} \Leftrightarrow (2y + 1)y' = x^2 - 1$$

e integrando

$$y^2 + y = \frac{x^3}{3} - x + C$$

Aplicando la condición inicial  $y(0) = -1$

$$y(0)^2 + y(0) = \frac{0^3}{3} - 0 + C \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 = C \Leftrightarrow C = 0$$

y la solución buscada es

$$y^2 + y = \frac{x^3}{3} - x$$

d) Si expresamos la edo como

$$y' = \frac{x + y}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = 1$$

que es una edo lineal que resolvemos por el método de variación de las constantes. Primero la edo homogénea

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

e integrando

$$\ln(y) = \ln(x) + C \Leftrightarrow y_h(x) = Ax$$

Para encontrar la solución de la no homogénea, hacemos variar la constante  $A$

$$y(x) = A(x)x \Rightarrow y'(x) = A'(x)x + A(x)$$

y sustituyendo en la EDO

$$y' - \frac{1}{x}y = 1 \Leftrightarrow (A'(x)x + A(x)) - \frac{1}{x}(A(x)x) = 1 \Leftrightarrow A'(x)x = 1 \Leftrightarrow A'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \ln(x) + C$$

La solución buscada es

$$y(x) = A(x)x = (\ln(x) + C)x$$

Aplicando la condición inicial  $y(1) = 2$

$$y(1) = (\ln(1) + C) \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

y la solución buscada es

$$y(x) = x(\ln(x) + 2)$$

e) La EDO se puede poner como

$$2xydy = -(x^2 + y^2)dx \Leftrightarrow (x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

que es una EDO exacta, ya que si  $M(x, y) = x^2 + y^2$  y  $N(x, y) = 2xy$  entonces  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Luego existe  $f(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

Integrando respecto de  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx = \int (x^2 + y^2) dx$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + g(y)$$

y usando la otra ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow 2xy + g'(y) = 2xy \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

y la función  $f(x, y)$  es

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + C$$

La solución  $y(x)$  debe cumplir

$$f(x, y) = K \Rightarrow \frac{x^3}{3} + y^2x + C = K \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + y^2x = (K - C)$$

y usando la condición inicial  $y(1) = 0$

$$\frac{1^3}{3} + y(1) \cdot 1 = (K - C) \Leftrightarrow (K - C) = -\frac{1}{3}$$

luego la solución buscada cumple

$$\frac{x^3}{3} + y^2x + \frac{1}{3} = 0$$



f) Si expresamos la EDO como

$$xy^3y' = x^4 + y^4 \Leftrightarrow xy^3 \frac{dy}{dx} = x^4 + y^4 \Leftrightarrow (x^4 + y^4) dx - xy^3 dy = 0$$

comprobamos que es homogénea

$$M(x, y) = x^4 + y^4 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 + (\lambda y)^4 = \lambda^4 (x^4 + y^4) = \lambda^4 M(x, y)$$

$$N(x, y) = -xy^3 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x (\lambda y)^3 = \lambda^4 (-xy^3) = \lambda^4 N(x, y)$$

por tanto son homogéneas del mismo grado y hacemos el cambio

$$y = xv \Rightarrow dy = v dx + x dv$$

sustituyendo en la ecuación

$$(x^4 + (xv)^4) dx - x(xv)^3 (v dx + x dv) = 0$$

$$x^4 (1 + v^4) dx - x^4 (v^4 dx + xv^3 dv) = 0$$

$$x^4 dx - x^5 v^3 dv = 0$$

dividiendo por  $x^4$

$$dx - xv^3 dv = 0$$

que es una ecuación en variables separables

$$dx - xv^3 dv = 0 \Leftrightarrow dx = xv^3 dv \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = v^3 dv \Leftrightarrow \ln x + C = \frac{v^4}{4}$$

y deshaciendo el cambio con  $v = y/x$

$$\ln x + C = \frac{v^4}{4} \Rightarrow \ln x + C = \frac{y^4}{4x^4} \Rightarrow y^4 - 4x^4 (\ln x + C) = 0$$

y usando la condición inicial  $y(2) = 0$

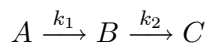
$$y(2)^4 - 4 \cdot 2^4 (\ln 2 + C) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$$

y la solución buscada es

$$y^4 - x^4 (\ln x - \ln 2) = 0 \Leftrightarrow y^4 - 4x^4 \ln \frac{x}{2} = 0.$$

*Pendientes de resolver: g y h.*

3. El proceso químico formado por dos pasos consecutivos de primer orden



se modela matemáticamente por medio de las dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k_1 [A] \\ \frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B] \end{cases}$$

Supongamos que las concentraciones iniciales son  $[A]_0 = a$ ,  $[B]_0 = [C]_0 = 0$ , y que las concentraciones en el tiempo  $t$  son  $[A] = a - x(t)$ ,  $[B] = y(t)$  y  $[C] = x(t) - y(t)$ . Calcula las concentraciones en el tiempo  $t$  para los casos: (i)  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 10$ , (ii)  $k_1 = k_2 = 1$ , y (iii)  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0,1$ . Representa gráficamente las soluciones obtenidas en los tres casos para  $0 \leq t \leq 10$ .

**Solución:** El sistema se transforma en

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(a-x(t))}{dt} &= -k_1(a-x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= k_1(a-x(t)) - k_2y(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x' &= k_1(a-x) \\ y' &= k_1a - k_1x - k_2y \end{aligned} \right\}$$

La primera ecuación del sistema es una ecuación de variables separadas

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x) \Rightarrow \frac{1}{a-x} dx = k_1 dt$$

e integrando

$$-\ln(a-x) = k_1t + c_1 \Leftrightarrow \ln(a-x) = -(k_1t + c_1) \Leftrightarrow (a-x) = e^{-(k_1t+c_1)}$$

luego la solución general es

$$x(t) = a - e^{-(k_1t+c_1)} = a - c_2 e^{-k_1t}$$

donde hemos tomado  $c_2 = e^{-c_1}$ . Se debe cumplir la condición inicial

$$[A](0) = a \Rightarrow a - x(0) = a \Rightarrow x(0) = 0$$

y por tanto

$$x(0) = a - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = a$$

y la solución es

$$x(t) = a \left(1 - e^{-k_1t}\right) \Rightarrow [A] = a - x(t) = ae^{-k_1t} = [A]_0 e^{-k_1t}.$$

Una vez conocida la función  $x(t)$ , sustituimos en la segunda ecuación

$$y' = k_1a - k_1a \left(1 - e^{-k_1t}\right) - k_2y = k_1ae^{-k_1t} - k_2y$$

que es una edo lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea. Resolvemos la ecuación homogénea

$$y' = -k_2y$$

que es de variables separables como antes

$$\frac{y'}{y} = -k_2 \Rightarrow \ln(y) = -k_2t + c_3 \Rightarrow y_h = c_4 e^{-k_2t}$$

donde  $c_4 = e^{c_3}$  con  $c_3$  constante. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea podemos utilizar variación de constantes

$$y(t) = c_4(t) e^{-k_2t}$$

de este modo

$$y'(t) = c_4'(t) e^{-k_2t} - k_2c_4(t) e^{-k_2t}$$

y sustituyendo en la EDO

$$y' = k_1 a e^{-k_1 t} - k_2 y \Rightarrow \left( c_4'(t) e^{-k_2 t} - k_2 c_4(t) e^{-k_2 t} \right) = k_1 a e^{-k_1 t} - k_2 c_4(t) e^{-k_2 t}$$

simplificando

$$c_4'(t) e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t} \Rightarrow c_4'(t) = k_1 a e^{(k_2 - k_1)t}$$

Para calcular  $c_4(t)$  tenemos que integrar la expresión anterior, pero esta integral depende de si  $k_2 = k_1$  o  $k_2 \neq k_1$

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow c_4'(t) = k_1 a \Rightarrow c_4(t) = k_1 a t + c_5 \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow c_4'(t) = k_1 a e^{(k_2 - k_1)t} \Rightarrow c_4(t) = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + c_5 \end{cases}$$

y el valor de  $y(t)$  dependerá de si  $k_1$  y  $k_2$  son iguales

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow y(t) = c_4(t) e^{-k_2 t} = (k_1 a t + c_5) e^{-k_2 t} \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow y(t) = c_4(t) e^{-k_2 t} = \left( \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + c_5 \right) e^{-k_2 t} \end{cases}$$

y aplicando la condición inicial  $y(0) = 0$  en cada caso

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \Rightarrow y(0) = b \Rightarrow y(t) = (k_1 a t) e^{-k_1 t} \\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow y(0) = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} + c_5 \Rightarrow y(t) = \left( \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} - \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_2 t} = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \end{cases}$$

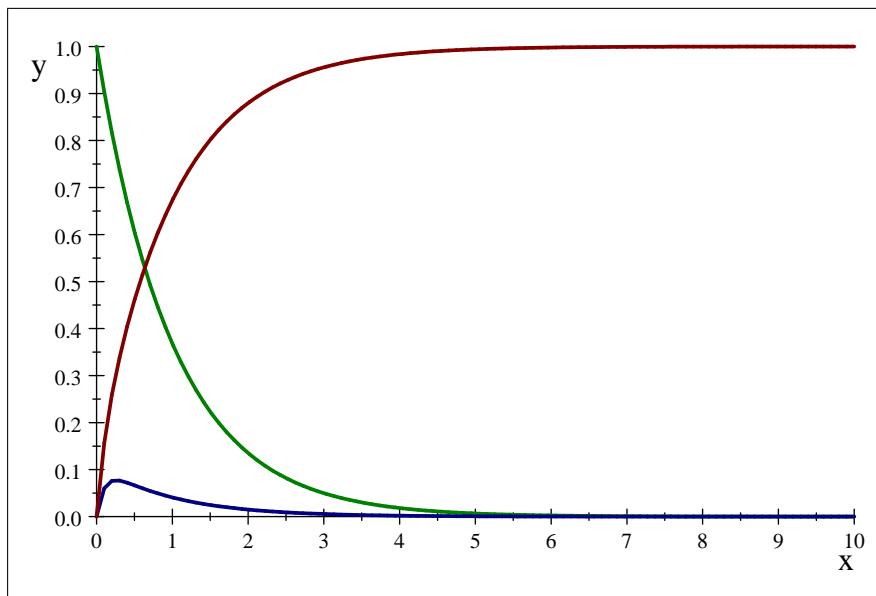
Las representaciones gráficas para cada caso son

a)  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 10$ . Como  $k_1 \neq k_2$

$$[A] = a e^{-k_1 t} \Rightarrow [A] = a e^{-t}$$

$$[B] = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \Rightarrow [B] = \frac{a}{9} (e^{-t} - e^{-10t})$$

$$[C] = a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a \left( 1 - \frac{10}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-10t} \right)$$



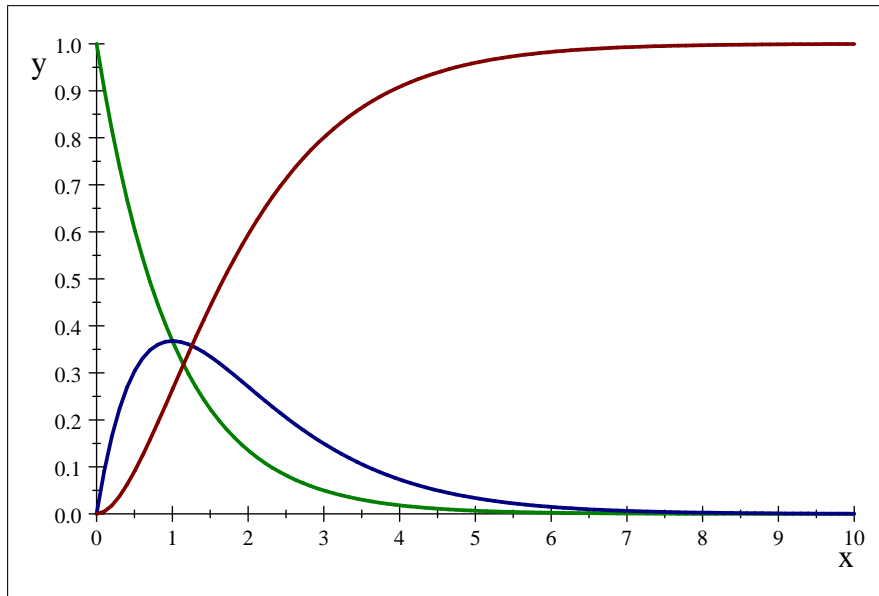
Comparar concentraciones  $[A]$  en azul,  $[B]$  en verde y  $[C]$  en rojo para el caso  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 10$ .

b)  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 1$ . Como  $k_1 = k_2$

$$[A] = ae^{-k_1 t} \Rightarrow [A] = ae^{-t}$$

$$[B] = (k_1 a t) e^{-k_1 t} \Rightarrow [B] = a t e^{-t}$$

$$[C] = a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a \left( 1 - \frac{10}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-10t} \right)$$



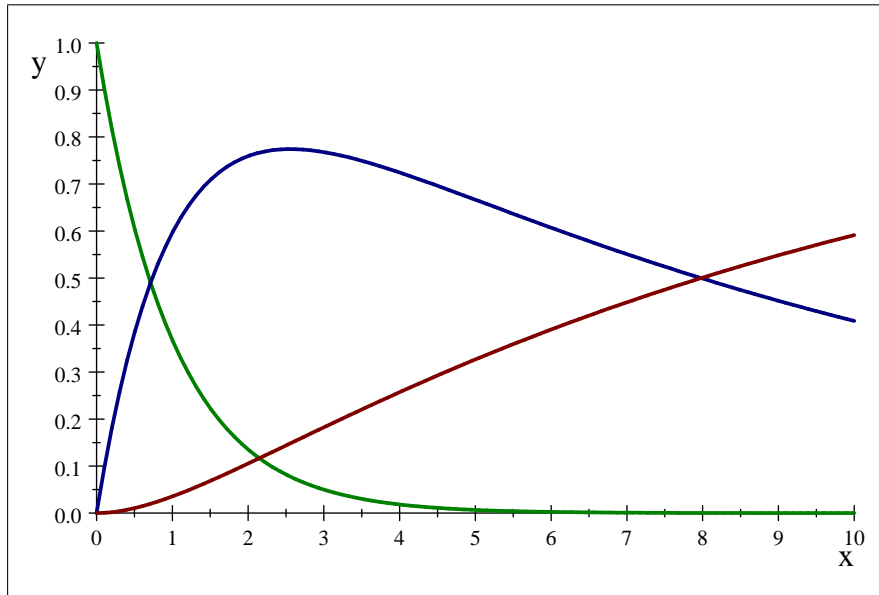
Comparar concentraciones  $[A]$  en azul,  $[B]$  en verde y  $[C]$  en rojo, para el caso  $k_1 = k_2 = 1$ .

c)  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0,1 = \frac{1}{10}$ . Como  $k_1 \neq k_2$

$$[A] = ae^{-k_1 t} \Rightarrow [A] = ae^{-t}$$

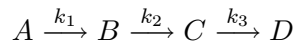
$$[B] = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \Rightarrow [B] = \frac{-10}{9} (e^{-t} - e^{-t/10})$$

$$[C] = a - [A] - [B] \Rightarrow [C] = a \left( 1 - \frac{10}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-10t} \right)$$



Comparar concentraciones  $[A]$  en azul,  $[B]$  en verde y  $[C]$  en rojo para el caso  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 10$ .

4. El proceso químico formado por tres pasos consecutivos de primer orden



está modelado matemáticamente por medio del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x) \\ \frac{d(y)}{dt} = k_1(a-x) - k_2y \\ \frac{d(z)}{dt} = k_2y - k_3z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde  $(a-x)$ ,  $y$ ,  $z$  son las concentraciones de  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , respectivamente, en el tiempo  $t$ . Supongamos que  $k_1 \neq k_2$ ,  $k_1 \neq k_3$  y  $k_2 \neq k_3$ . Calcula  $C$  como función de  $t$ .

**Solución:** Podemos proceder como en el caso anterior con resolviendo la primera ecuación, después la segunda y finalmente la tercera de forma recursiva. Las dos primeras ecuaciones son las del problema anterior, luego como  $k_1 \neq k_2$  las soluciones son

$$x(t) = a(1 - e^{-k_1 t}) \Rightarrow [A] = ae^{-k_1 t}$$

$$y(t) = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \Rightarrow [B] = y(t)$$

Nos queda por resolver la última ecuación

$$\frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) - k_3 z$$

que es una ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes no homogénea. Resolvemos la ecuación homogénea

$$z' = -k_3 z$$

que es de variables separables como antes

$$\frac{z'}{z} = -k_3 \Rightarrow \ln(z) = -k_3 t + c_1 \Rightarrow z_h = c_2 e^{-k_3 t}$$

donde  $c_2 = e^{c_1}$  con  $c_1$  constante. Para hallar la solución de la ecuación no homogénea podemos utilizar variación de constantes

$$z(t) = c_2(t) e^{-k_3 t}$$

de este modo

$$z'(t) = c_2'(t) e^{-k_3 t} - k_3 c_2(t) e^{-k_3 t}$$

y sustituyendo en la EDO

$$z' = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) - k_3 z \Rightarrow$$

$$c_2'(t) e^{-k_3 t} - k_3 c_2(t) e^{-k_3 t} = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) - k_3 c_2(t) e^{-k_3 t}$$

simplificando

$$c_2'(t) e^{-k_3 t} = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

y multiplicando por  $e^{-k_3 t}$

$$c_2'(t) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) e^{k_3 t} = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} (e^{(k_3 - k_1)t} - e^{(k_3 - k_2)t})$$

y como  $k_1 \neq k_3$  y  $k_2 \neq k_3$  integramos directamente

$$c_2(t) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} \left( \frac{1}{k_3 - k_1} e^{(k_3 - k_1)t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{(k_3 - k_2)t} \right) + c_3$$

y  $z(t)$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_2(t) e^{-k_3 t} = \left( \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} \left( \frac{1}{k_3 - k_1} e^{(k_3 - k_1)t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{(k_3 - k_2)t} \right) + c_3 \right) e^{-k_3 t} \\ &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} \left( \frac{1}{k_3 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{-k_2 t} \right) + c_3 e^{-k_3 t} \end{aligned}$$

como  $z(0) = 0$

$$z(0) = \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} \left( \frac{1}{k_3 - k_1} - \frac{1}{k_3 - k_2} \right) + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{k_1 k_2 a}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{k_1 k_2 a}{(k_2 - k_1)} \left( \frac{1}{k_3 - k_1} e^{-k_1 t} - \frac{1}{k_3 - k_2} e^{-k_2 t} \right) + \frac{k_1 k_2 a}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} e^{-k_3 t} \\ &= a k_1 k_2 \left( \frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} - \frac{e^{-k_2 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} \right) \\ &= a k_1 k_2 \left( \frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{e^{-k_2 t}}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} + \frac{e^{-k_3 t}}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right) \end{aligned}$$

5. Consideremos un circuito eléctrico tipo RL formado por una resistencia y una bobina. Las leyes de Ohm y Kirchhoff establecen que la intensidad  $I$  de corriente eléctrica que circula por el circuito en el tiempo  $t$  obedece la ecuación

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

donde las constantes  $L$  y  $R$  representan la inductancia y la resistencia, y  $E$  es la fuerza electromotriz generada por el generador o la batería. En el caso de corriente continua  $E = E_0$ , constante. Resuelve el siguiente problema e interpreta físicamente la solución obtenida:

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + RI = E_0, & t > 0 \\ I(0) = 0. \end{cases}$$

**Solución:** Es un PVI donde la ecuación diferencial ordinaria es lineal de orden 1

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \Leftrightarrow L \frac{dI}{dt} = -RI \Leftrightarrow \frac{1}{I} dI = -\frac{R}{L} dt \Leftrightarrow \ln I = -\frac{R}{L} t + C \Leftrightarrow I_h = B e^{-Rt/L}$$

donde se ha puesto  $B = e^C$ . La solución de la no homogénea se hará por variación de constantes

$$I(t) = B(t) e^{-Rt/L} \Rightarrow I'(t) = B'(t) e^{-Rt/L} - \frac{R}{L} B(t) e^{-Rt/L}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$L \left( B'(t) e^{-Rt/L} - \frac{R}{L} B(t) e^{-Rt/L} \right) + R \left( B(t) e^{-Rt/L} \right) = E_0 \Rightarrow L B'(t) e^{-Rt/L} = E_0 \Rightarrow B'(t) = \frac{E_0}{L} e^{Rt/L}$$

e integrando

$$B(t) = \int \frac{E_0}{L} e^{Rt/L} dt = \frac{E_0}{R} e^{Rt/L} + C$$

luego la solución buscada es

$$I(t) = B(t) e^{-Rt/L} = \left( \frac{E_0}{R} e^{Rt/L} + C \right) e^{-Rt/L} = \frac{E_0}{R} + C e^{-Rt/L}$$

Usando la condición inicial  $I(0) = 0$ , obtenemos

$$I(0) = \frac{E_0}{R} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{E_0}{R}$$

y la solución es

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + C e^{-Rt/L} = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right)$$

Tomando  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0.$$

6. Para un circuito tipo RC formado por una resistencia y un condensador, la intensidad de corriente  $I$  satisface la ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

donde la constante  $C$  representa la capacitancia del condensador. Resuelve la ecuación anterior para la condición inicial  $I(0) = 0$  en los casos: (i)  $E = E_0$ , constante, y (ii)  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ .

**Solución:**

i.) Si  $E = E_0$  es constante, entonces  $\frac{dE}{dt} = 0$  y la edo queda como

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

que es de variables separadas

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \Leftrightarrow L \frac{dI}{dt} = -\frac{I}{C} \Leftrightarrow \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{LC} \Leftrightarrow \ln I = -\frac{1}{LC}t + k$$

y por tanto

$$I(t) = Ke^{-t/LC}$$

Usando la condición inicial  $I(0) = 0$

$$I(0) = K \Rightarrow K = 0$$

y la solución es

$$I(t) = 0$$

ii.) Si  $E = E_0 \sin(\omega t)$ , entonces

$$\frac{dE}{dt} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

y la ecuación es no homogénea

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

La solución de la homogénea la hemos obtenido en el apartado anterior

$$I_h(t) = Ke^{-t/LC}$$

Si usamos el método de variación de las constantes obtendremos la solución de la no homogénea

$$I(t) = K(t) e^{-t/LC} \Rightarrow I'(t) = K'(t) e^{-t/LC} - \frac{1}{LC} K(t) e^{-t/LC}$$

y sustituyendo en la EDO homogénea

$$L \left( K'(t) e^{-t/LC} - \frac{1}{LC} K(t) e^{-t/LC} \right) + \frac{1}{C} K(t) e^{-t/LC} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

simplificando

$$LK'(t) e^{-t/LC} = E_0 \omega \cos(\omega t) \Rightarrow K'(t) = \frac{E_0 \omega}{L} e^{t/LC} \cos(\omega t)$$

e integrando

$$K(t) = \int \frac{E_0 \omega}{L} e^{t/LC} \cos(\omega t) dt = \frac{E_0 \omega}{L} \int e^{t/LC} \cos(\omega t) dt$$

Aplicando integración por partes (dos veces):

$$K(t) = E_0 C \omega \frac{e^{t/LC} (CL\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t))}{1 + (\omega LC)^2} + A$$



con  $A$  constante de integración. La función  $I(t)$  será

$$I(t) = K(t) e^{-t/LC} = \left( E_0 C \omega \frac{(CL\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t))}{1 + (\omega LC)^2} + A e^{-t/LC} \right)$$

Usando la condición inicial  $I(0) = 0$ , obtenemos

$$I(0) = \left( E_0 C \omega \frac{1}{1 + (\omega LC)^2} + A \right) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E_0 C \omega}{1 + (\omega LC)^2}$$

y la solución final será

$$\begin{aligned} I(t) &= \left( E_0 C \omega \frac{(CL\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t))}{1 + (\omega LC)^2} - \frac{E_0 C \omega}{1 + (\omega LC)^2} e^{-t/LC} \right) \\ &= \frac{E_0 C \omega}{1 + (\omega LC)^2} \left( CL\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - e^{-t/LC} \right) \\ &= \frac{E_0 C \omega}{1 + (\omega LC)^2} (CL\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)) - \frac{E_0 C \omega}{1 + (\omega LC)^2} e^{-t/LC} \end{aligned}$$

---