Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Tema 16
Cálculo en varias variables
Integración múltiple de Riemann

1. Calcula las siguientes integrales dobles sobre los dominios indicados

   Usamos el teorema de Fubini en todas los apartados

   a)
$$\iint_{\mathcal{R}} xydxdy = \int_0^1 xdx \left(\int_0^3 ydy\right)$$
   Integramos primero respecto de y
$$\int_0^3 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=3} = \left[\frac{9}{2}\right] - [0] = \frac{9}{2}$$
   y el resultado lo integramos respecto de x
$$\int_0^1 x\left(\frac{9}{2}\right)dx = \left[\frac{9}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=2} = \left[\frac{9}{4}\right] - [0] = \frac{9}{4}$$

   b)
$$\iint_{\mathcal{R}} ye^x dxdy = \int_{-1}^1 e^x dx \left(\int_0^2 ydy\right)$$
   Integramos primero respecto de y
$$\int_0^2 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2} = \left[\frac{4}{2}\right] - [0] = 2$$
   y el resultado lo integramos respecto de x
$$\int_{-1}^1 e^x (2)\, dx = [2e^x]_{x=-1}^{x=1} = [2e] - \left[2e^{-1}\right] = 4\,\mathrm{Sh}\,1.$$

   c)
$$\iint_{\mathcal{R}} y\cos(x)\, dxdy = \int_0^\pi e^x dx \left(\int_1^2 ydy\right)$$
   Integramos primero respecto de y
$$\int_1^2 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2} = \left[\frac{4}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}$$
   y el resultado lo integramos respecto de x
$$\int_0^\pi \cos(x)\left(\frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}\operatorname{sen} x\right]_{x=0}^{x=\pi} = [0] - [0] = 0.$$

d)

$$\iint_{\mathcal{R}} y \arctan x dx dy = \int_0^1 \arctan x dx \left(\int_0^1 y dy \right)$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \left[\frac{1}{2} \right] - [0] = \frac{1}{2}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_0^1 \arctan x dx \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x dx,$$

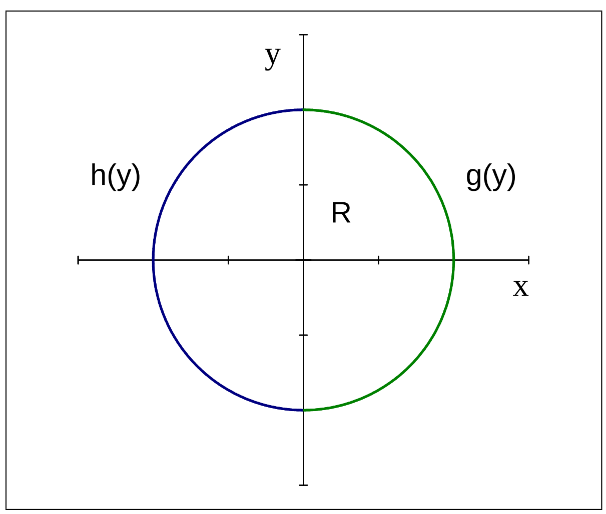
esta integral la hacemos por partes tomando $u = \arctan x$ y $dv = dx$, por tanto $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ y $v = x$

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x dx = \frac{1}{2} \left[\left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2\right) \right) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - (0) \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \ln(2) \right)$$

e) El dominio representado en la siguiente gráfica



puede definirse como

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1; -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}$$

Se ha elegido expresar x en función de y, por la forma de la función del integrando $2x$ cuya primitiva es x^2 y permitirá eliminar la raíz cuadrada. Así, usando el teorema de Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} 2x dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2x dx$$

Integramos primero respecto de x

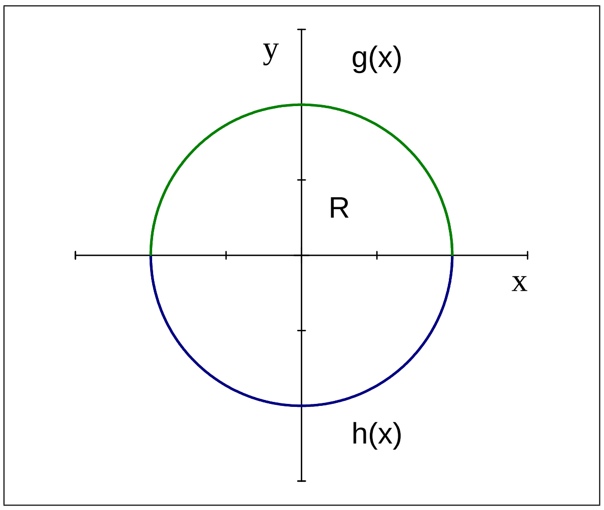
$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2x dx = \left[x^2\right]_{y=-\sqrt{1-y^2}}^{y=\sqrt{1-y^2}} = \left[\left(1-y^2\right)\right] - \left[1-y^2\right] = 0$$

y el resultado lo integramos respecto de y

$$\int_{-1}^{1} 0 dy = 0$$

f) El conjunto es el mismo que el del apartado anterior. En este caso consideramos el conjunto definido como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$



de modo que

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2+y\right) dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y\right) dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y\right) &= \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left[x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\right] - \left[-x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\right] \\
&= 2x^2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{1-x^2}$$

haciendo el cambio

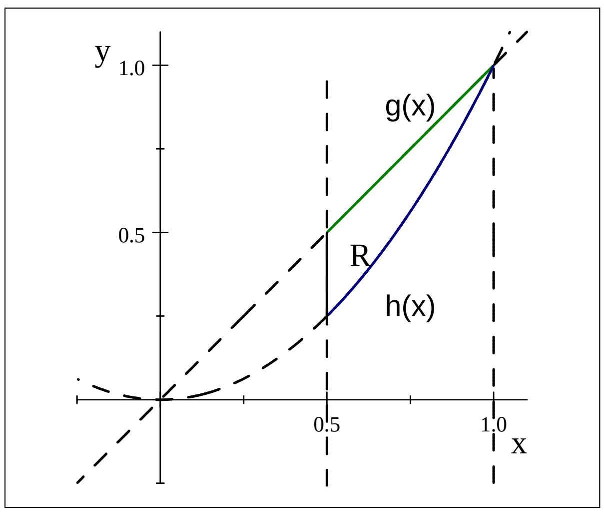
$$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

tendremos

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}^2 t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{4} dt \\
&= \left[\frac{1}{4}t - \frac{\operatorname{sen} 4t}{16}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} \\
&= \left[\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}\right] - \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\operatorname{sen} 4\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{16}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

g) Representamos el conjunto $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1; x \leq y \leq x^2\right\}$$



$$\iint_{\mathcal{R}} (y + \ln x)\, dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} (y + \ln x)\, dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\begin{aligned}
\int_{x^2}^{x} (y + \ln x)\, dy &= \left[\frac{1}{2}y^2 + y\ln x\right]_{y=x^2}^{y=x} = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\ln x\right] - \left[\frac{1}{2}x^4 + x^2\ln x\right] \\
&= \left(x - x^2\right)\ln x + \frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right)
\end{aligned}$$

y el resultado lo integramos respecto de x

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right) + \left(x - x^2\right)\ln x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2 - x^4\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - x^2\right)\ln x dx$$

la segunda integral se hará por partes, con $u = \ln x$, y $dv = \left(x - x^2\right) dx$ y por tanto

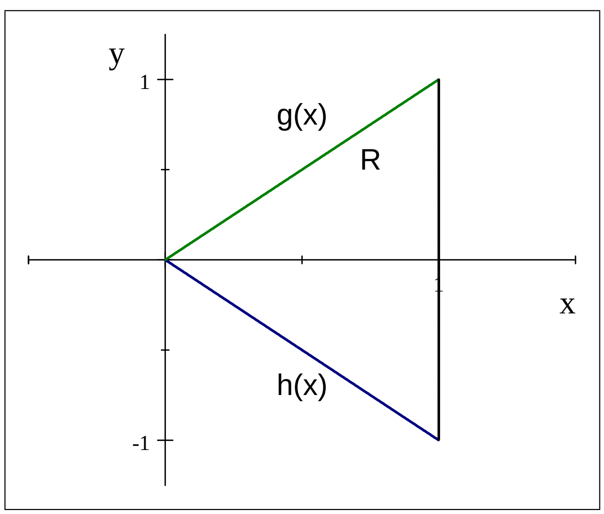
$du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ de forma que

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - x^2\right) \ln x dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \int \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9}\right)\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right) + \left(x - x^2\right) \ln x\right) dx &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9}\right)\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\ &= \left[-\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{18}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \ln x\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \\ &= \left[-\frac{13}{180}\right] - \left[-\frac{89}{2880} - \frac{1}{12} \ln 2\right] \\ &= \frac{1}{12} \ln 2 - \frac{119}{2880}\end{aligned}$$

h) Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{R}$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1; -x \le y \le x\right\}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy$$

haciendo el cambio

$$y = x \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = x \cos t dt$$

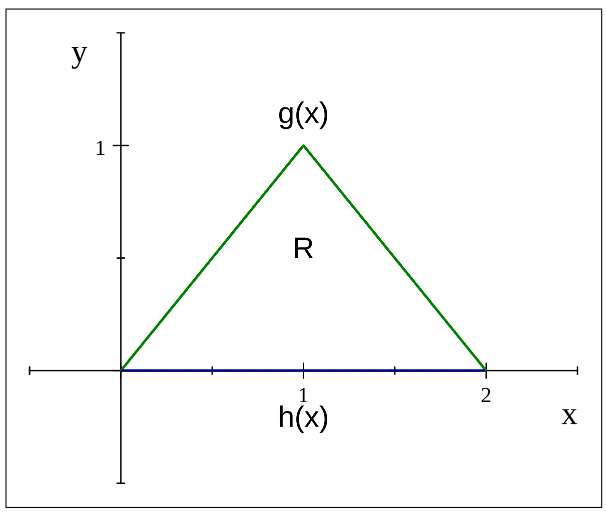
con extremos de integración $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2 - x^2 \operatorname{sen}^2 t} x \cos t \ dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 t \ dt = x^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \ dt \\ &= x^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{t=-/2}^{t=\pi/2} = x^2 \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

y luego respecto de y

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

i) Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{R}$ =Interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; h(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ g(x) &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La integral sería

$$\iint_{\mathcal{R}} xy dx dy = \int_0^2 dx \int_{h(x)}^{g(x)} xy \ dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \ dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} xy \ dy$$

Integramos primero respecto de y cada una de las integrales

$$\begin{aligned}\int_0^x xy\ dy &= \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2}\\ \int_0^{2-x} xy\ dy &= \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-x} = \frac{x\,(2-x)^2}{2} = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x\end{aligned}$$

y después integramos respecto de x

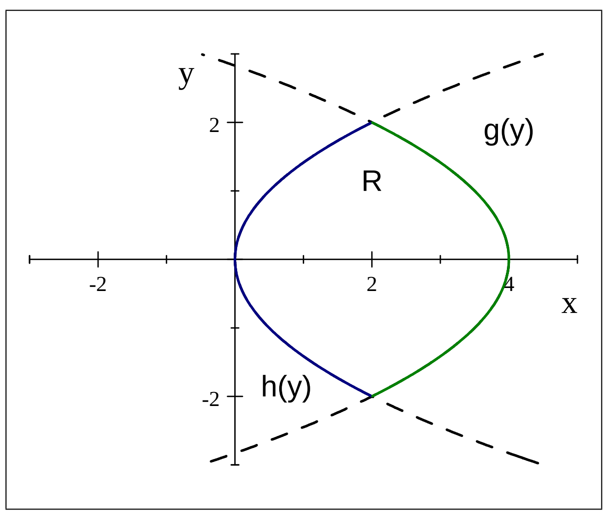
$$\int_0^1 dx \int_0^x xy\ dy = \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 dx \int_0^{2-x} xy\ dy &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right]_{x=1}^{x=2} =\\ &= \left[\frac{2^4}{8} - \frac{2^4}{3} + 2^2\right] - \left[\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 1\right] = \frac{2}{3} - \frac{11}{24} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

La integral total será

$$\iint_{\mathcal{R}} xydxdy = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$$

$j)$ Representamos la región $\mathcal{R}$ gráficamente



El punto de corte de las dos curvas y que determinará el rango de la y está determinado por las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2x \\ y^2 &= 8-2x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2x = 8 - 2x \Rightarrow 4x = 8 \Longrightarrow x = 2$$

siendo los valores para la y

$$y^2 = 2x \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estará definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le y\le 2; h(y)\le x\le g(y)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le y\le 2; \frac{y^2}{2}\le x\le \frac{8-y^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{4-y^2}dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx$$

Integraremos respecto de x

$$\int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx = \sqrt{4-y^2}\left[\frac{8-y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right] = \sqrt{4-y^2}\left(4-y^2\right) = \left(4-y^2\right)^{3/2}$$

y después integraremos respecto de y

$$\int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \sqrt{4-y^2}dx = \int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2}dy$$

Hacemos el cambio

$$y = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2 = 4\operatorname{sen}^2 t \\ 4-y^2 = 4-4\operatorname{sen}^2 t = 4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right) = 4\cos^2 t \\ dy = 2\cos t dt \end{array}\right.$$

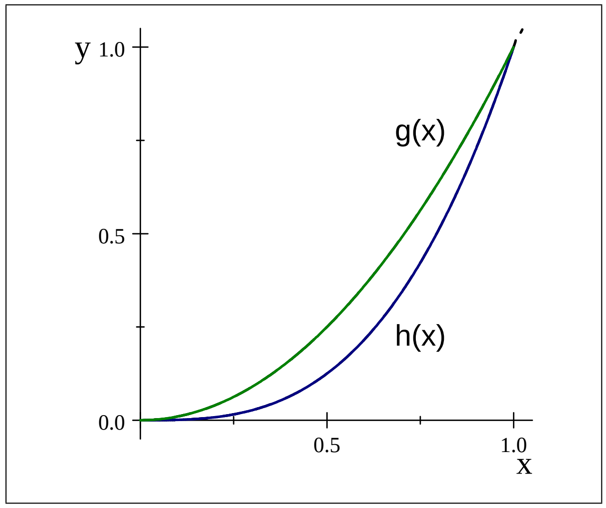
y los extremos de integración son

$$\left\{\begin{array}{c} y=-2 \Rightarrow -2 = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ \\ y = 2 \Rightarrow 2 = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2}dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\cos^2 t\right)^{3/2} 2\cos t dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^2 t\right)^2 dt\\ &= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt\\ &= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1+\cos 4t}{2}}{4}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 4t}{8}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt\\ &= 16\left[\frac{3}{8}t+\frac{\operatorname{sen} 4t}{16}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = 6\pi.\end{aligned}$$

k) Representamos la región $\mathcal{R}$ gráficamente



El punto de corte de las dos curvas y que determinará el rango de la x está determinado por las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ \\ y = x^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^2\,(x-1) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ \\ x_1 = 0 \end{array}\right.$$

siendo los valores para la y

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ \\ y_1 = 0 \end{array}\right.$$

de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estará definido por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1; x^3 \le y \le x^2\right\}$$

y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy$$

Integraremos respecto de y

$$\int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^3}^{y=x^2} = \left[x^4 + \frac{x^6}{3}\right] - \left[x^5 + \frac{x^9}{3}\right]$$

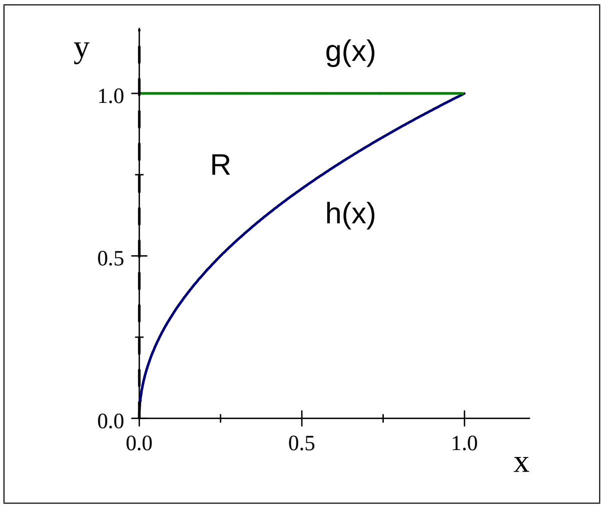
y después integraremos respecto de x

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - x^5 - \frac{x^9}{3}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{30}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

$l)$

$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy$ $\quad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$

Podemos representar a la región $\mathcal{R}$ gráficamente como



El punto de corte de las dos curvas es el $(1,1)$ de modo que el conjunto $\mathcal{R}$ estaría definido por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\right\}$$

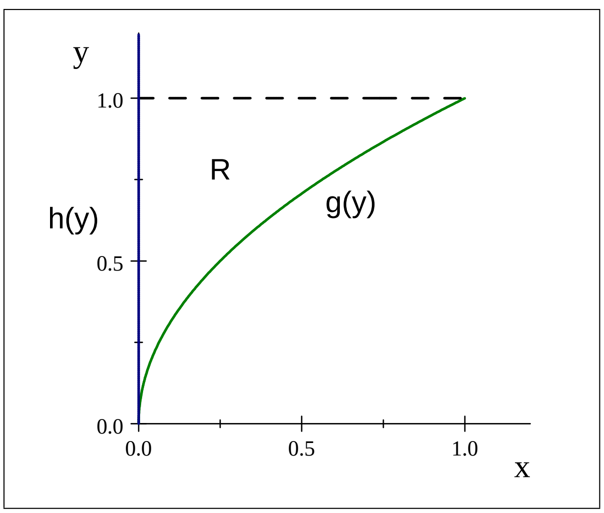
y usando Fubini

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy$$

Integraremos respecto de y

$$\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy$$

La función no tiene primitiva conocida respecto de y, así que vamos a intentar cambiar el orden de integración



y el conjunto podría definirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq y^2\right\}$$

de este modo

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x/y} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y} dx$$

Y podemos integrar respecto de x

$$\int_0^{y^2} e^{x/y} dx = y \int_0^{y^2} \frac{1}{y} e^{x/y} dx = \left[y e^{x/y} \right]_{x=0}^{x=y^2} = \left[y e^{y^2/y} \right] - \left[y e^{0/y} \right] = [y e^y] - [y] = y e^y - y$$

y ahora integrar respecto de y por partes

$$\int_0^1 y e^y - y dy = \left[(y-1) e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \left[(1-1) e^1 - \frac{1}{2} \right] - \left[(0-1) e^0 - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

   Recordemos que el cambio a polares implica

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

   con

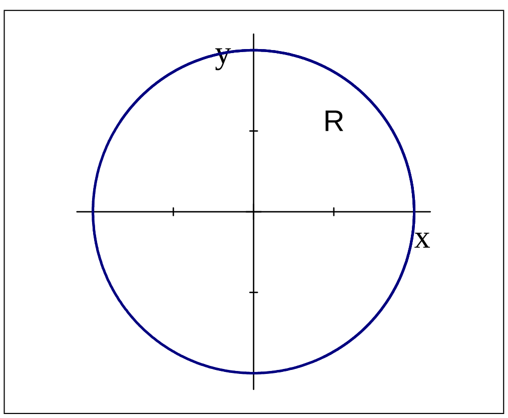
$$\left| \det \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} \right| = r$$

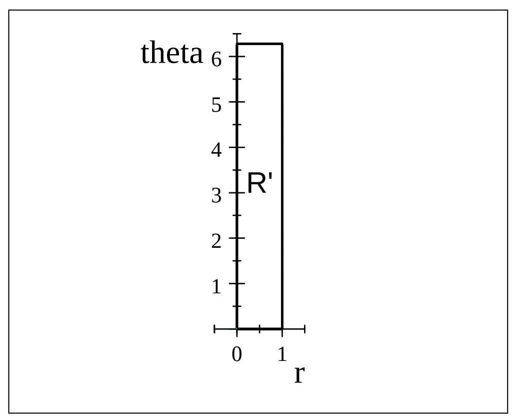
   a) El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

   se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$





   La función

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2} \Rightarrow f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = e^{r^2}$$

   Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\mathcal{R}'} e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r e^{r^2} dr$$

   Integramos primero respecto de r

$$\int_0^1 r e^{r^2} dr = \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$$

   y ahora respecto de θ

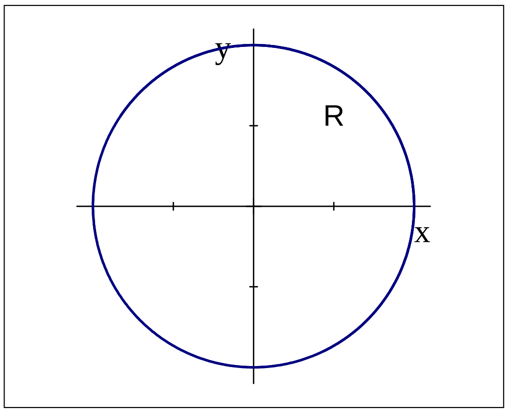
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r e^{r^2} dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) d\theta = \pi (e - 1)$$

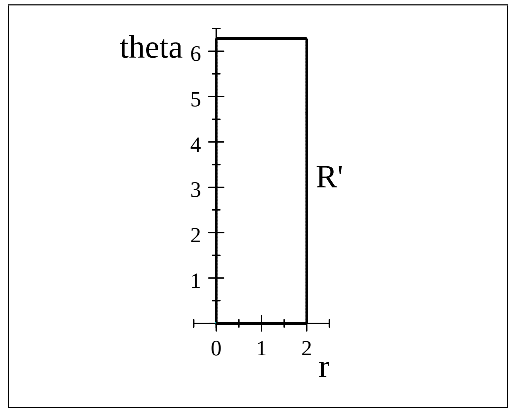
$b)$ El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$





La función

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r^3$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} r^3 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^4 dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^2 r^4 dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{2^5}{5}$$

y ahora respecto de θ

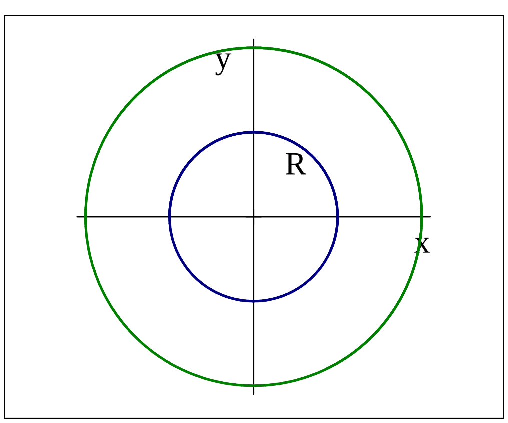
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^4 dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5}\right) d\theta = \frac{64\pi}{5}$$

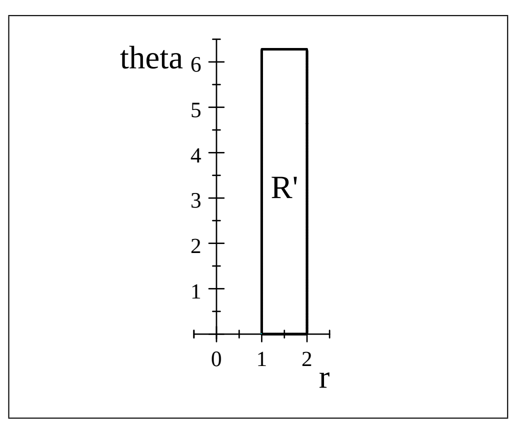
$c)$ El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$





La función

$$f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)=\ln r^2=2\ln r$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}}\ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{\mathcal{R}'}2r\ln r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 2r\ln(r)\;dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_1^2 2r\ln(r)\;dr=\left[r^2\ln(r)-\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2}=(4\ln(2)-2)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=4\ln 2-\frac{3}{2}$$

y ahora respecto de θ

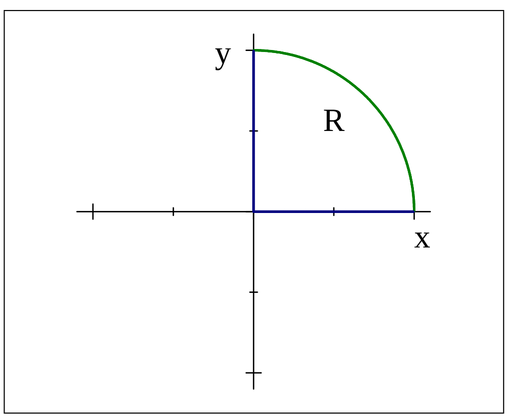
$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 2r\ln(r)\;dr=\int_0^{2\pi}\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)d\theta=\pi(8\ln 2-3)$$

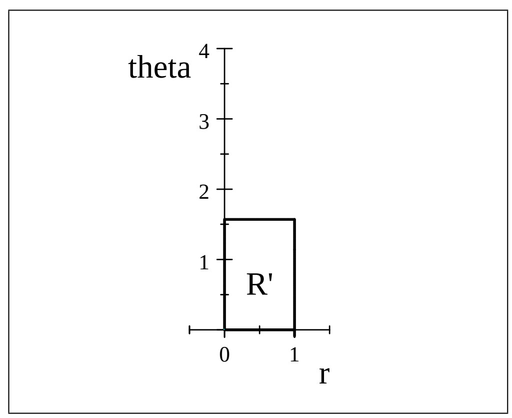
d) El conjunto

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}'=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}\mid 0\leq r\leq 1; 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$





La función se transforma en

$$f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)}\Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)=r$$

Y la integral

$$\iint_{\mathcal{R}}\sqrt{(x^2+y^2)}dxdy=\iint_{\mathcal{R}'}r^2\,drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\,dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^1 r^2\,dr=\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}=\frac{1}{3}$$

y ahora respecto de θ

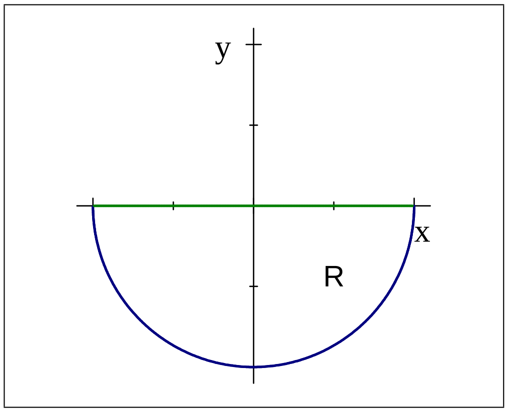
$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

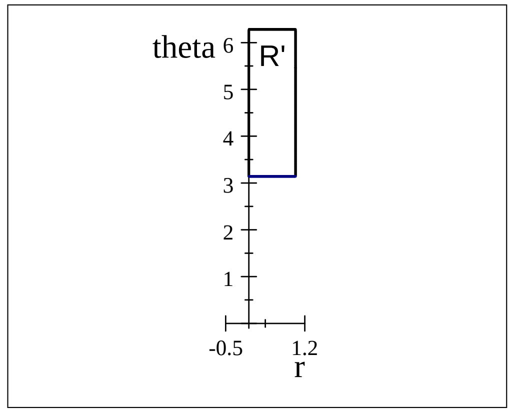
e) El conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

se transforma en

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1; \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$$





La función se transforma en

$$f(x,y) = e^{\left(x^2+y^2\right)} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = e^{r^2}$$

Y la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} re^{r^2}\, drd\theta = \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{r^2}\, dr$$

Integramos primero respecto de r

$$\int_0^1 re^{r^2} dr = \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

y ahora respecto de θ

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{r^2}\, dr = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1) =$$

3. Calcula utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

   Para calcular el área de un conjunto $\mathcal{R}$, se utiliza la integral doble de función $f(x,y) = 1$ sobre ese conjunto.

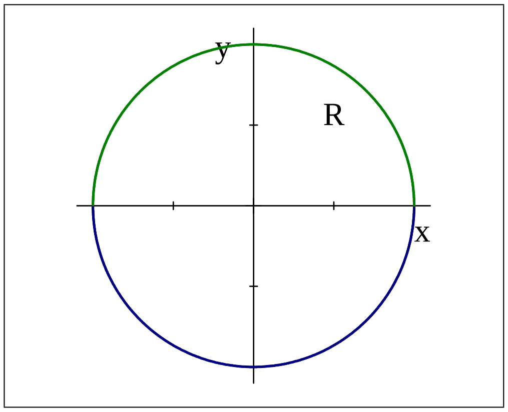
   a) El interior de la circunferencia de radio R.

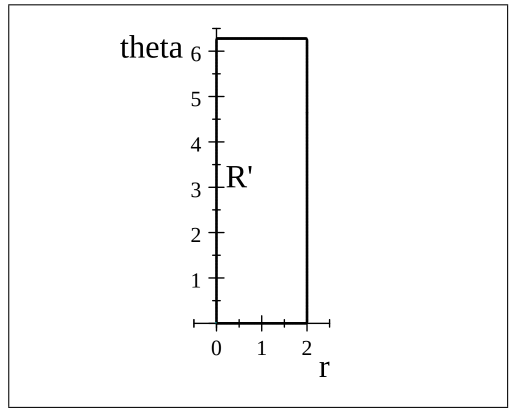
   Solución: El conjunto es

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R\right\}$$

o en polares

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq R; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$





Si lo hacemos en coordenadas cartesianas

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$$

de forma que integrando respecto de y

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 2\sqrt{R^2-x^2}$$

y ahora respecto de x

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx$$

que podemos resolver mediante el cambioHacemos el cambio

$$x = R \operatorname{sen} t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 t \\ R^2 - x^2 = R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t = R^2 \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right) = R^2 \cos^2 t \\ dx = R \cos t dt \end{array} \right.$$

y los extremos de integración son

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -R \Rightarrow -R = R \operatorname{sen} t \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ \\ x = R \Rightarrow R = R \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

lo que nos da

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ 2R^2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} &= 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

También podemos realizar la integral con cambio a polares. Mientras que la función es la misma

$$f(x,y) = 1 \Rightarrow f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 1$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr$$

Si integramos primero respecto de r

$$\int_0^R rdr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=-R}^{r=R} = \frac{R^2}{2}$$

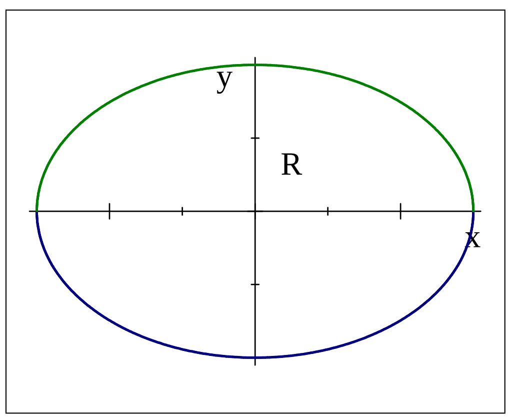
y ahora respecto de θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rdr = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

$b)$ El interior de la elipse de semiejes a y b.

Solución: El conjunto es

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$



Si lo hacemos en coordenadas cartesianas, entonces podemos despejar y en función de la x

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

y el dominio se puede expresar como

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a; \;\; -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

y la integral sobre R sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

de forma que integrando respecto de y

$$\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

y ahora respecto de x

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

la integral es idéntica a la realizada en el apartado anterior cambiando a por R, así que podemos poner

$$2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \pi a^2$$

y por tanto

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{b}{a}2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$$

Podemos hacer un cambio a coordenadas elípticas, que vendrían dadas por

$$\begin{aligned} x &= ra\cos\theta \\ y &= rb\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

donde en este caso

$$\mathcal{R}' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

y la función sería

$$f(x,y) = 1 \Rightarrow f(ar\cos\theta, ar\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1$$

mientras que el Jacobiano de este cambio sería

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\,\mathrm{sen}\,\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\,\mathrm{sen}\,\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

Al realizar el cambio de variable

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} abrdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abrdr$$

Si integramos primero respecto de r

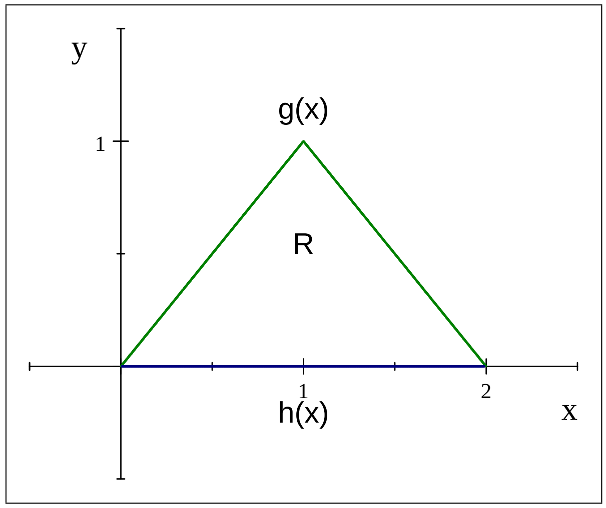
$$\int_0^1 abrdr = \left[ab\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{ab}{2}$$

y ahora respecto de θ

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abrdr = \int_0^{2\pi}\frac{ab}{2}d\theta = 2\pi\frac{ab}{2} = \pi ab.$$

$c)$ El interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

Solución: Representamos gráficamente el conjunto $\mathcal{R}$ =Interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$



que puede describirse como

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; h(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ g(x) &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La integral sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_0^2 dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy$$

Integramos primero respecto de y cada una de las integrales

$$\begin{aligned} \int_0^x dy &= [y]_{y=0}^{y=x} = x \\ \int_0^{2-x} dy &= [y]_{y=0}^{y=2-x} = 2 - x \end{aligned}$$

y después integramos respecto de x

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy &= \int_1^2 (2 - x) \, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \\ &= [4 - 2] - \left[2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La integral total será

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

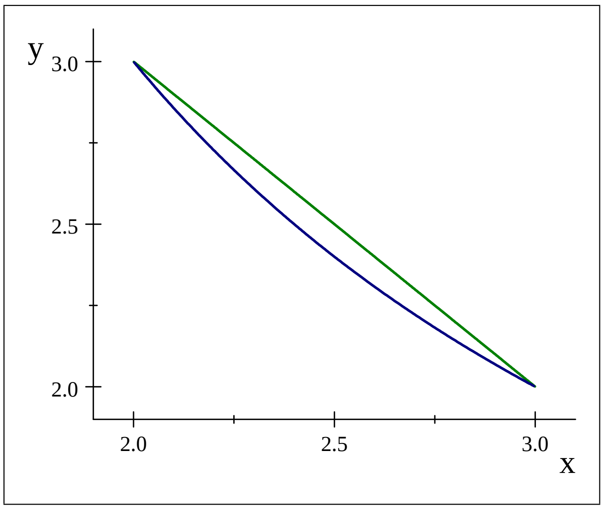
d) La región delimitada por la recta $x + y = 5$ y la curva $xy = 6$.

Solución: Vamos a determinar los puntos de corte de las dos curvas, resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x\,(5 - x) = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por tanto los puntos de corte son

$$(3, 2)$$
$$(2, 3)$$



Despejamos y en función de x de ambas curvas

$$xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x}$$

$$x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$$

y el dominio puede definirse como:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3; \frac{6}{x} \leq y \leq 5 - x\right\}$$

La integral buscada sería

$$\iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_2^3 dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy = \int_2^3 dx \int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy$$

Integramos primero respecto de y

$$\int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy = [y]_{y=6/x}^{y=5-x} = (5 - x) - \frac{6}{x}$$

y después integramos respecto de x

$$\begin{aligned}
\int_2^3 dx \int_{\frac{6}{x}}^{5-x} dy &= \int_2^3 (5-x) - \frac{6}{x} dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 6\ln x\right]_{x=2}^{x=3} = \\
&\left[15 - \frac{9}{2} - 6\ln 3\right] - \left[10 - \frac{4^2}{2} - 6\ln 2\right] \\
&= \left(15 - \frac{9}{2} - 6\ln 3\right) - \left(10 - \frac{4^2}{2} - 6\ln 2\right) \\
&= 6\ln 2 - 6\ln 3 + \frac{17}{2} = 6\ln\frac{2}{3} + \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

4. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} xydxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x-2y-1=0$, $2x-y-5=0$, $x-2y-4=0$ y $2x-y-2=0$, efectuando el cambio de coordenadas $x = \dfrac{-u+2v}{3}$ y $y = \dfrac{v-2u}{3}$

5. Calcula $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$, efectuando el cambio de coordenadas adecuado.

6. Calcula las siguientes integrales triples sobre los dominios indicados

   (a) $\iiint_{\mathcal{V}} ye^{x+z}\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = [0,2]\times[-1,1]\times[1,2]$

   (b) $\iiint_{\mathcal{V}} xyz\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = [1,2]\times[0,1]\times[0,1]$

   (c) $\iiint_{\mathcal{V}} xy\cos(z)\ \ dxdydz \qquad \mathcal{V} = [0,1]\times[1,2]\times[0,\pi]$

   (d) $\iiint_{\mathcal{V}} z\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1; 0\le z\le 1\right\}$

   (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y^2\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2\le 1; -1\le y\le 1\right\}$

   (f) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x+y+z^3\right)\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

7. Calcula utilizando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

   $a)$ El interior de la esfera de radio r.
   $b)$ El interior del cilindro de radio r y altura h.
   $c)$ El interior del cono de radio de la base r y altura h.

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales triples:

   (a) $\iiint_{\mathcal{V}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1, y\le 0\right\}$

   (b) $\iiint_{\mathcal{V}} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge 0\right\}$

   (c) $\iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1\right\}$

   (d) $\iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1; z\ge 0\right\}$

   (e) $\iiint_{\mathcal{V}} y\ dxdydz \qquad \mathcal{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 4; x\le 0, -1\le z\le 1\right\}$