Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Problemas Temas 16
Cálculo en varias variables
Integración múltiple de Riemann

1. Calcula las siguientes integrales dobles sobre los dominios indicados

   (a) $\int\int_{\mathcal{R}} xydxdy \qquad \mathcal{R} = [0,1]\times[0,3]$

   (b) $\int\int_{\mathcal{R}} ye^{x}dxdy \qquad \mathcal{R} = [-1,1]\times[0,2]$

   (c) $\int\int_{\mathcal{R}} y\cos(x)\,dxdy \qquad \mathcal{R} = [0,\pi]\times[1,2]$

   (d) $\int\int_{\mathcal{R}} y\arctan x dxdy \qquad \mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$

   (e) $\int\int_{\mathcal{R}} 2xdxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

   (f) $\int\int_{\mathcal{R}} \left(x^2+y\right)dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

   (g) $\int\int_{\mathcal{R}} (y+\ln x)\,dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq x\right\}$

   (h) $\int\int_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2-y^2}dy \qquad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,-1)$ y $(1,1)$

   (i) $\int\int_{\mathcal{R}} xydxdy \qquad \mathcal{R} =$ Interior del triángulo de vértices $(0,0)\,,\ (1,1)$ y $(2,0)$

   (j) $\int\int_{\mathcal{R}} \sqrt{4-y^2}dxdy \qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2=2x$ e $y^2=8-2x$

   (k) $\int\int_{\mathcal{R}} \left(x^2+y^2\right)dxdy \qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y=x^3$ e $y=x^2$

   (l) $\int\int_{\mathcal{R}} e^{x/y}dxdy \qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las curvas $y^2=x$ y las rectas $x=0$ e $y=1$

2. Calcula, efectuando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales dobles:

   (a) $\int\int_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2}dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

   (b) $\int\int_{\mathcal{R}} \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2\leq 4\right\}$

   (c) $\int\int_{\mathcal{R}} \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy \qquad \mathcal{R} =$ Recinto limitado por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$

   (d) $\int\int_{\mathcal{R}} \sqrt{(x^2+y^2)}dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$

   (e) $\int\int_{\mathcal{R}} e^{\left(x^2+y^2\right)}dxdy \qquad \mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1, y\leq 0\right\}$

3. Calcula utilizando integrales dobles, el área de los siguientes conjuntos:

    $a)$ El interior de la circunferencia de radio r.

    $b)$ El interior de la elipse de semiejes a y b.

    $c)$ El interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

    $d)$ La región delimitada por la recta $x+y=5$ y la curva $xy=6$.

4. Calcula $\int\int_{\mathcal{R}} xydxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x-2y-1=0$, $2x-y-5=0$, $x-2y-4=0$ y $2x-y-2=0$, efectuando el cambio de coordenadas $x=\dfrac{-u+2v}{3}$ y $y=\dfrac{v-2u}{3}$

5. Calcula $\int\int_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$ siendo $\mathcal{R}$ el paralelogramo delimitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ y $x-y=1$, efectuando el cambio de coordenadas adecuado.

6. Calcula las siguientes integrales triples sobre los dominios indicados

    (a) $\int\int\int_{\mathcal{V}} ye^{x+z}\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=[0,2]\times[-1,1]\times[1,2]$

    (b) $\int\int\int_{\mathcal{V}} xyz\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=[1,2]\times[0,1]\times[0,1]$

    (c) $\int\int\int_{\mathcal{V}} xy\cos(z)\ \ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=[0,1]\times[1,2]\times[0,\pi]$

    (d) $\int\int\int_{\mathcal{V}} z\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1; 0\leq z\leq 1\right\}$

    (e) $\int\int\int_{\mathcal{V}} y^2\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2\leq 1; -1\leq y\leq 1\right\}$

    (f) $\int\int\int_{\mathcal{R}} \left(x+y+z^3\right)\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

7. Calcula utilizando integrales triples, el volumen de los siguientes conjuntos:

    $a)$ El interior de la esfera de radio r.

    $b)$ El interior del cilindro de radio r y altura h.

    $c)$ El interior del cono de radio de la base r y altura h.

8. Calcula, efectuando el cambio de coordenadas adecuado, las siguientes integrales triples:

    (a) $\int\int\int_{\mathcal{V}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1, y\leq 0\right\}$

    (b) $\int\int\int_{\mathcal{V}} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4, z\geq 0\right\}$

    (c) $\int\int\int_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq 1\right\}$

    (d) $\int\int\int_{\mathcal{V}} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1; z\geq 0\right\}$

    (e) $\int\int\int_{\mathcal{V}} y\ dxdydz$ $\qquad \mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4; x\leq 0, -1\leq z\leq 1\right\}$
