Curso 2019/2020
Grado en Ingeniería Química Industrial
Matemáticas I - Soluciones comentadas problemas Temas 14
Cálculo en varias variables
Cálculo diferencialde funciones en varias variables

1. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f) $f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

g) $f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

h) $f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) $f_9(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluciones:

a)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos el cambio a coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = 0,$$

que no depende de θ. Veamos si es posible encontrar una función de r que cumpla las hipótesis del teorema

$$\left|r^2\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)-0\right|=\left|r^2\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)\right|=r^2\left|\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right|,$$

y usando ahora la desigualdad triangular y que las funciones $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ están acotadas por 1

$$r^2\left|\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right|\leq\left|r^2\right|\cdot\left(\left|\cos^4\theta\right|+\left|\operatorname{sen}^4\theta\right|\right)\leq r^2(1+1)=2r^2$$

donde además

$$\lim_{r\to 0}2r^2=0,$$

y deducimos que el límite existe y es 0, como coincide con el valor de la función en $(0,0)$, la función f_1 es continua en el origen.

<u>Derivadas direccionales:</u> Usando la definición por límites de la derivada direccional en un vector cualquiera $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2)\neq 0$, tendremos

$$\begin{aligned}D_{\overrightarrow{v}}f_1(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f_1((0,0)+t(v_1,v_2))}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(tv_1,tv_2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^4v_1^4+t^4v_2^4}{(tv_1)^2+(tv_2)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4\left(v_1^4+v_2^4\right)}{t^3\left(v_1^2+v_2^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)}\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}\neq(0,0)$ y por tanto $v_1^2+v_2^2\neq 0$, entonces se cumple

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)}=0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_1}}f_1(0,0)=0\\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_2}}f_1(0,0)=0\end{aligned}$$

<u>Diferenciabilidad:</u> Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces el valor de esa diferencial sería

$$df_1(0,0)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)\,dy,$$

con los valores que hemos obtenido en el apartado anterior, las dos derivadas parciales son nulas y por tanto

$$df_1(0,0)=0,$$

y tendremos que probar si es 0, el valor del siguiente límite

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\|\to 0}\frac{f_1\left((0,0)+\overrightarrow{h}\right)-f_1(0,0)-df_1(0,0)\,\overrightarrow{h}}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|}=\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\|\to 0}\frac{f_1\left(\overrightarrow{h}\right)-f_1(0,0)-df_1(0,0)\,\overrightarrow{h}}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $df_1(0,0) = 0$, $f_1(0,0) = 0$, que si tomamos $\overrightarrow{h} = (h,k)$, entonces $\left\|\overrightarrow{h}\right\| = \sqrt{h^2+k^2}$, y que $\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0$, es equivalente a $(h,k) \to (0,0)$, tendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\|\to 0} \frac{f_1\left(\overrightarrow{h}\right) - f_1(0,0) - df_1(0,0)\overrightarrow{h}}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4+k^4}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4+k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Usaremos coordenadas polares $h = r\cos\theta$, $k = r\operatorname{sen}\theta$ para calcular este límite

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = 0,$$

que no depende de θ y además

$$\left|r\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\right| \le 2r$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

b) En este apartados y en los siguientes se obvian las operaciones y cálculos similiares a los que aparecen en el apartado *a*.

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Usamos cambio a polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{4r\cos\theta \cdot r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} 4r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta = 0,$$

que no depende de θ, además

$$\left|4r^2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\right| \le \left|4r^2\right| \cdot \left|\left(\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\right)\right| \le 4r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0} 4r^2 = 0,$$

luego f_2 es continua en $(0,0)$.

<u>Derivadas direccionales:</u> Usando la definición de derivada direccional a lo largo de un vector cualquiera $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \neq 0$

$$D_{\overrightarrow{v}} f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{4(tv_1)(tv_2)^3}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^4 v_1 v_2^3}{t^3\left(v_1^2+v_2^2\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{4tv_1v_2^3}{\left(v_1^2+v_2^2\right)},$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v} \neq (0,0)$ y por tanto $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{4tv_1v_2^3}{\left(v_1^2+v_2^2\right)} = 0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_1}} f_2(0,0) = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_2}} f_2(0,0) = 0. \end{aligned}$$

<u>Diferenciabilidad:</u> Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_2(0,0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)\,dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0, el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_2(h,k) - f_2(0,0) - df_2(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

pero como $df_2(0,0) = 0$ y $f_2(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{4hk^3}{(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{4hk^3}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}},$$

límite que calculamos usando cambio a coordenadas polares $h = r\cos\theta$, $k = r\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{4r\cos\theta \cdot r^3 \operatorname{sen}^3\theta}{r^{3/2}} = \lim_{r\to 0} r^{1/2}\left(4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\right) = 0,$$

que no depende de θ y además

$$\left| r^{1/2}\left(4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\right)\right| \leq r^{1/2}$$

con

$$\lim_{r\to 0} r^{1/2} = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

c)

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Límite en polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r^3\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) = 0$$

no depende de θ, además

$$\left|r^3\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)\right|\leq\left|r^3\right|\cdot\left|\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)\right|\leq r^3\left(\left|\cos^4\theta\right|+\left|\operatorname{sen}^4\theta\right|\right)\leq 2r^3$$

con

$$\lim_{r\to 0}2r^3=0$$

luego f_3 es continua en $(0,0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional y un vector cualquiera $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2)\neq 0$

$$D_{\overrightarrow{v}}f_3(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_3(tv_1,tv_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4v_1^4+t^4v_2^4}{t\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4\left(v_1^4+v_2^4\right)}{t^2\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}\neq(0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2+v_2^2}\neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0,$$

por lo que cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales también lo serán:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)&=D_{\overrightarrow{e_1}}f_1(0,0)=0,\\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)&=D_{\overrightarrow{e_2}}f_1(0,0)=0.\end{aligned}$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_3(0,0)=\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)\,dy=0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_3(h,k)-f_3(0,0)-df_3(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

teniendo en cuenta que $df_3(0,0)=0$ y $f_3(0,0)=0$, tendremos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_3(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^4+k^4}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^4+k^4}{h^2+k^2}$$

y usando coordenadas polares $h=r\cos\theta$, $k=r\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r^2\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)=0,$$

que no depende de θ y además

$$\left|r^2\left(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta\right)\right|\leq 2r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0}2r^2=0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

d)
$$f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta}{r}=\lim_{r\to 0}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)=0$$

que depende de θ, no existe el límite y la función no es continua en $(0,0)$.

<u>Derivadas direccionales:</u> Usando la definición de derivada direccional y dado un punto vector cualquiera $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2)\neq 0$

$$D_{\overrightarrow{v}}f_4(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_4(tv_1,tv_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tv_1+tv_2}{t\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t(v_1+v_2)}{t^2\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}\neq(0,0)$, entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\left(v_1^4+v_2^4\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\pm\infty,$$

por lo que no existe ninguna derivada direccional en el $(0,0)$ y por tanto tampoco las derivadas parciales

<u>Diferenciabilidad:</u> Como la función no es continua, no puede ser diferenciable.

e)
$$f_5(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2(r\operatorname{sen}\theta)}{r}=\lim_{r\to 0}r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta=0,$$

además

$$\left|r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\right|\leq r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0}r^2=0$$

luego f_5 es continua en $(0,0)$, ya que existe una función $g(r)=r^2$ que no depende de θ y que tiene por límite 0, cuando r tiende a 0 que acota a la función menos su límite.

<u>Derivadas direccionales:</u> Usamos la definición de derivada direccional

$$D_vf_5(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f_5(a+tv)-f_5(a)}{t}$$

en este caso $a = (0,0)$ y por tanto $a + tv = tv$, además $f(a) = f(0,0) = 0$, tomando $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, en este caso

$$D_{\overrightarrow{v}} f_5(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^2 (tv_2)}{t\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t v_1^2 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v} \neq 0$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$D_v f_5(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t v_1^2 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional en $(0,0)$ es nula en general y en particular las derivadas parciales también serán nulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_1}} f_1(0,0) = 0, \\ \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_2}} f_1(0,0) = 0. \end{aligned}$$

<u>Diferenciabilidad:</u> Si la función fuera diferenciable en el punto $(0,0)$, entonces la diferencial en ese punto tendría que ser

$$df(0,0) = \frac{\partial f_5}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f_5}{\partial y}(0,0)\,dy = 0,$$

y tenemos que probar si sería 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_5((0,0) + (h,k)) - f_5(0,0) - df_5(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

como $df_5(0,0) = 0$ y $f_5(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_5(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{h^2 + k^2},$$

cambiando a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left(r^2 \cos^2\theta\right)(r \operatorname{sen}\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta = 0,$$

que no depende de θ, además

$$\left| r \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \right| \leq r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r = 0$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

f)

$$f_6(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)}{r}=\lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta=0$$

además

$$|r\cos\theta\operatorname{sen}\theta|\leq r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r=0$$

luego f_2 es continua en $(0,0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición

$$D_{\overrightarrow{v}}f_6(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_6(tv_1,tv_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(tv_1)(tv_2)}{t\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2v_1v_2}{t^2\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}\neq(0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2+v_2^2}\neq 0$, entonces las derivadas direccionales en la dirección $\overrightarrow{v}$ son

$$D_v f_6(0,0)=\frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Para las derivadas parciales hay que tomar $v=e_1=(1,0)$ y $v=e_2=(0,1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_6}{\partial x}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_1}}f_2(0,0)=0\\ \frac{\partial f_6}{\partial y}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_2}}f_2(0,0)=0\end{aligned}$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces sería

$$df(0,0)=\frac{\partial f_6}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f_6}{\partial y}(0,0)\,dy=0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_6(h,k)-f_6(0,0)-df_6(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

como $df_6(0,0)=0$ y $f_6(0,0)=0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0}\cos\theta\operatorname{sen}\theta,$$

que depende de θ y por tanto no existe, la función no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

g)

$$f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Para calcular el límite usamos aproximaciones a $(0,0)$ por curvas de la forma $x = \lambda y^3$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=\lambda y^3}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\lambda y^3\right) y^3}{\left(\lambda y^3\right)^2 + y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\lambda y^6}{\lambda^2 y^6 + y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

que depende de λ y por tanto no existe. La función $f_7(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.
<u>Derivadas direccionales:</u> Usando la definición

$$D_{\overrightarrow{v}} f_7(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_7(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_1)(tv_2)^3}{(tv_1)^2 + (tv_2)^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4 v_1 v_2^3}{t^3\left(v_1^2 + t^4 v_2^6\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t v_1 v_2^3}{\left(v_1^2 + t^4 v_2^6\right)}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v} \neq (0,0)$ y por tanto $\left(v_1^2 + t^4 v_2^6\right) \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{t v_1 v_2^3}{\left(v_1^2 + t^4 v_2^6\right)} = 0$$

Cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_7}{\partial x}(0,0) = D_{\overrightarrow{e_1}} f_7(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial y}(0,0) = D_{\overrightarrow{e_2}} f_7(0,0) = 0$$

<u>Diferenciabilidad:</u> Como la función no es continua en $(0,0)$, entonces no puede ser diferenciable.

h)

$$f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Continuidad:</u> Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)}{r} = \lim_{r\to 0} r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

además

$$\left|r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right| \leq r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(|\cos\theta| + |-\operatorname{sen}\theta|) \leq 2r^2$$

con

$$\lim_{r\to 0} 2r^2 = 0$$

luego f_5 es continua en $(0,0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición

$$D_{\overrightarrow{v}} f_8(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_8(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_2^2 (tv_1 - tv_2)}{t\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_2^2 (v_1 - v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v} \neq (0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{tv_2^2 (v_1 - v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales serán nulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_8}{\partial x}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_1}} f_5(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f_8}{\partial y}(0,0) &= D_{\overrightarrow{e_2}} f_5(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_8(0,0) = \frac{\partial f_8}{\partial x}(0,0)\, dx + \frac{\partial f_8}{\partial y}(0,0)\, dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_8(h,k) - f_8(0,0) - df_8(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

pero como $df_8(0,0) = 0$ y $f_8(0,0) = 0$, el límite se transforma en:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_8(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{k^2(h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2(h-k)}{h^2 + k^2}$$

y tomando coordenadas polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0,$$

que no depende de θ, con

$$\left| r\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right| \leq 2r$$

y

$$\lim_{r\to 0} 2r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

i)

$$f_9(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidad: Para calcular el límite usamos cambio a polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r}=\lim_{r\to 0}r^2\operatorname{sen}^3\theta=0$$

además

$$\left|r^2\operatorname{sen}^3\theta\right|\leq r^3,$$

con

$$\lim_{r\to 0}r^3=0,$$

luego f_9 es continua en $(0,0)$.

Derivadas direccionales: Usando la definición de derivada direccional

$$D_{\overrightarrow{v}}f_9(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_9(tv_1,tv_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3v_2^3}{t\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{tv_2^3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v}\neq(0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2+v_2^2}\neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{tv_2^3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales serán nulas:

$$\frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0)=D_{\overrightarrow{e_1}}f_6(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0)=D_{\overrightarrow{e_2}}f_6(0,0)=0$$

Diferenciabilidad: Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces su diferencial valdría:

$$df_9(0,0)=\frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0)\,dy=0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_9(h,k)-f_9(0,0)-df_9(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

como $df_9(0,0)=0$ y $f_9(0,0)=0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f_9(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{k^3}{\sqrt{k^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^3}{h^2+k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\operatorname{sen}^3\theta=0,$$

que no depende de θ, además

$$\left|r\operatorname{sen}^3\theta\right|\leq r$$

con

$$\lim_{r\to 0}r=0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

2. Calcula las derivadas parciales de las funciones del problema anterior para puntos distintos del origen.

a)

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=\dfrac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

b)

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}=\dfrac{4y^5-4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial y}=\dfrac{12x^3y^2+4xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

c)

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_3}{\partial x}=-\dfrac{x\left(y^4-4x^2y^2-3x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial y}=\dfrac{y\left(3y^4+4x^2y^2-x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\end{cases}$$

d)

$$f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_5}{\partial x}=\dfrac{y\,(y-x)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_5}{\partial y}=\dfrac{x\,(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\end{cases}$$

e)

$$f_5(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_5}{\partial x}=\dfrac{xy\left(2y^2+x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_5}{\partial y}=\dfrac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\end{cases}$$

f)

$$f_6(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_6}{\partial x}=\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_6}{\partial y}=\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\end{cases}$$

g)

$$f_7(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_7}{\partial x}=\dfrac{y^3\left(y^3-x\right)\left(y^3+x\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f_7}{\partial y}=\dfrac{3xy^2\left(x-y^3\right)\left(y^3+x\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\end{cases}$$

h)

$$f_8(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_8}{\partial x}=\dfrac{y^3(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_8}{\partial y}=\dfrac{y\left(2x^3-3x^2y+xy^2-2y^3\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{cases}$$

i)

$$f_9(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f_9}{\partial x}=-\dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\[2ex] \dfrac{\partial f_9}{\partial y}=\dfrac{y^2\left(2y^2+3x^2\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{cases}$$

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\[2ex] g(y) & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$, sea continua en todos los puntos para los que $x=0$? Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución: El estudio de la continuidad de esta función se realizó en la hoja del tema 13, ejercicio 6, donde se determinó que

$$g(y)=y.$$

Para las derivadas parciales, tendremos. Si $(x,y)\neq(0,y)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{xy\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy)}{x^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy)\end{cases}$$

Para los puntos de la forma $(0,y)$ tendremos que utilizar la definición por límites de la derivada parcial

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,y)+t(1,0))-f(0,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)-f(0,y)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(ty)}{t}-y}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ty)-ty}{t^2}=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

(Usando L'Hôpital 2 veces)

$$\lim_{t\to 0}\frac{y\cos(ty)-y}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{-y^2\operatorname{sen}(ty)}{2}=0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,y)+t(0,1))-f(0,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,y+t)-f(0,y)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(y+t)-y}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1
\end{aligned}$$

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. Estudiar para qué valores de α, existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Estudia para qué valores de α la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

Solución: El estudio de la continuidad de esta función se realizó en la hoja del tema 13, ejercicio 7, donde se determinó que

$$\alpha>2.$$

Para calcular las derivadas parciales en el $(0,0)$ hacemos uso de la definición por límites

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3+|0|^\alpha}{t^2+0^2}}{t}=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^3+|t|^\alpha}{0^2+t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|^\alpha}{t^3}
\end{aligned}$$

La primera derivada parcial existe para cualquier valor de α, para que exista la derivada parcial respecto de y el valor de α debe ser mayor que 3, ya que en caso contrario los límites laterales tienen valores distintos y en este caso el límite vale 0.

Para que la función sea diferenciable debe ser continua, así que $\alpha>2$ y deben existir las derivadas parciales, luego $\alpha>3$, y para este caso tendremos

$$df(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy=0dx+0dy$$

Luego si calculamos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3+|k|^\alpha}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3+|k|^\alpha}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}$$

Usando coordenads polares $h = r\cos\theta$ y $k = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + |r\,\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^\alpha\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^3}$$

Como estamos suponiendo $\alpha > 3$, sacamos factor común r^3

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta + r^\alpha\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha}{r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + r^{\alpha-3}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha\right)}{r^3} = \lim_{r\to 0} \cos^3\theta + r^{\alpha-3}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha$$

y puesto que $\alpha - 3 > 0$

$$\lim_{r\to 0} \cos^3\theta + r^{\alpha-3}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^\alpha = \cos^3\theta$$

límite que depende de θ y por tanto no es diferenciable para ningún valor de α.

5. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2 + x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Estudia su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.
   b) Calcula $D_{\overrightarrow{v}} f\,(0{,}0)$ siendo $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

Solución:

a) Continuidad: Para ver si tiene límites usamos cambio a polares

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta}{(r^2\cos^2\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + r^6\cos^6\theta} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta}{r^2\,(r\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta)^2 + r^6\cos^6\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^6\theta}{r^2\left((r\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta)^2 + r^4\cos^6\theta\right)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^6\theta}{(r\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta)^2 + r^4\cos^6\theta} = 0 \end{aligned}$$

además

$$\left(r\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta\right)^2 + r^4\cos^6\theta >$$

Derivadas parciales: Usando la definición por límites de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^6}{(t^2-0)^2 + t^6}}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{0^6}{(0^2-t)^2 + 0^6}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

teniendo en cuenta que $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ y por tanto $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{t v_2^3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0,$$

y cualquier derivada direccional es nula, en particular las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0) &= D_{e_1} f_6(0,0) = 0\\ \frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0) &= D_{e_2} f_6(0,0) = 0\end{aligned}$$

<u>Diferenciabilidad:</u> Si la función fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df_9(0,0) = \frac{\partial f_9}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f_9}{\partial y}(0,0)\,dy = 0$$

y tendremos que probar si es 0 el valor del siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_9(h,k) - f_9(0,0) - df_9(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

como $df_9(0,0) = 0$ y $f_9(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_9(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{k^3}{\sqrt{k^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^3}{h^2+k^2}$$

y tomando polares

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\operatorname{sen}^3\theta = 0,$$

que no depende de θ, además

$$\left|r\operatorname{sen}^3\theta\right| \le r$$

con

$$\lim_{r\to 0} r = 0,$$

luego el límite existe y es 0, así que la función es diferenciable en el origen y su diferencial es nula.

6. Calcula la matriz jacobiana y la diferencial de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y) = \left(x^2y - xy, x^3 - y^3\right)$ en $(1,1)$

   b) $g(x,y,z) = \left(x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3\right)$ en $(1,1,1)$

   c) $h(x,y) = (\cos x\cos y, \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x\cos y)$ en $(\pi/2, 0)$

   d) $l(x) = \left(e^x, 2x, 3x^2\right)$ en (0)

Solución:

a) $f(x,y) = \left(x^2y - xy, x^3 - y^3\right)$ en $(1,1)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - y & x^2 - x\\ 3x^2 & -3y^2\end{pmatrix} \Rightarrow Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$df(1,1)\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\\ 3(h-k)\end{pmatrix}$$

b) $g(x,y,z) = \left(x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3\right)$ en $(1,1,1)$

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - yz & x^2 - xz & -xy + 3z^2 \\ 3x^2 & -3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Jg(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$dg(1,1,1)\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h + 2l \\ 3(h - k + l) \end{pmatrix}$$

c) $h(x,y) = (\cos x \cos y, \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x \cos y)$ en $(\pi/2, 0)$

$$Jh(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x \cos y & -\cos x \operatorname{sen} y \\ \cos x \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} x \cos y \\ \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{pmatrix} \Rightarrow Jh\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dh\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $l(x) = \left(e^x, 2x, 3x^2\right)$ en (0)

$$Jl(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 2 \\ 6x \end{pmatrix} \Rightarrow Jl(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$dl(0)(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} h \\ 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. Calcula el gradiente de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = x^{x+y}$ en $(1,0)$ b) $g(x,y,z) = \dfrac{x^2 + e^y}{e^z}$ en $(0,0,0)$

a) Usamos la expresión $a^b = e^{b \ln a}$

$$x^{x+y} = e^{(x+y)\ln(x)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x+y)\ln(x)}\right) = e^{(x+y)\ln(x)}\left(\ln(x) + \frac{x+y}{x}\right) = x^{x+y}\left(\ln(x) + \frac{x+y}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{(x+y)\ln(x)}\right) = e^{(x+y)\ln(x)}\ln(x) = x^{x+y}\ln x \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(x^{x+y}\left(\ln(x) + \frac{x+y}{x}\right), x^{x+y}\ln x\right)$$

y por tanto

$$\nabla f(1,0) = (1,0)$$

b) Directamente

$$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{2x}{e^z},\frac{e^y}{e^z},-\frac{x^2+e^y}{e^z}\right),$$

y por tanto

$$\nabla g(0,0,0)=(0,1,-1).$$

8. Calcula la matriz jacobiana de la transformación $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y,z)=\left(x^2-yz+z^2,xyz\right)$.

   Solución: Las componentes de F son $f_1(x,y,z)=x^2-yz+z^2$ y $f_2(x,y,z)=xyz$

$$JF=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & -z & -y+2z\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}$$

9. Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a}\in A$ tal que

$$df(\overrightarrow{a})(x,y)=(x+y,x+2y,y).$$

   Calcula las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\overrightarrow{v}_1=(1,-1)$, $\overrightarrow{v}_2=(-1,-1)$ y $\overrightarrow{v}_3=(0,-1)$ de las funciones coordenadas de f en $\overrightarrow{a}$, así como la matriz jacobiana de f en $\overrightarrow{a}$.

   Solución: Puesto que nos dan la diferencial de la función en el punto $\overrightarrow{a}$, sabemos que

$$df(\overrightarrow{a})(x,y)=Jf(\overrightarrow{a})\cdot(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{a})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{a})\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{a}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{a})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\end{pmatrix}$$

   por tanto debe ocurrir

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{a})x+\frac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{a})y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\ x+2y\\ y\end{pmatrix}$$

   de donde se deduce que las derivadas parciales y la matriz Jacobiana en $\overrightarrow{a}$ vienen dados por

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overrightarrow{a})=1;\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(\overrightarrow{a})=1\\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\overrightarrow{a})=1;\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(\overrightarrow{a})=2\\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\overrightarrow{a})=0;\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(\overrightarrow{a})=1\end{array}\right\}\Rightarrow Jf(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

   Teniendo en cuenta ahora que

$$D_{\overrightarrow{v}}f(\overrightarrow{a})=df(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{v}=Jf(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{v}$$

   tendremos

$$D_{\overrightarrow{v}_1}f(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$D_{\overrightarrow{v}_2} f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\overrightarrow{v}_3} f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Sean $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dadas por $F(x,y) = \left(x^2, xy, y^2\right)$ y $G(u,v,w) = (u+v+w, u-v-2w, 2u+3u, uvw)$ .Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$.

    Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

mientras que

$$JG(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}$$

Usando el teorema de la función compuesta

$$\begin{aligned} J(G \circ F)(x,y) &= JG(F(x,y))\, JF(x,y) = JG\left(F\left(x^2, xy, y^2\right)\right) JF(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ xy^3 & x^2y^2 & x^3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y & x+2y \\ 2x-y & -x-4y \\ 4x+3y & 3x \\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. Sean $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $F(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}, x^2-y^2, \pi\left(xy+y^2\right)\right)$ y $G(u,v,w) = (v + \ln(u), \operatorname{sen}(v+w))$ .Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$ en el punto $(1,1)$.

    Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y JG

$$JF = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2x & -2y \\ \pi y & \pi(x+2y) \end{pmatrix} \Rightarrow JF(1,1) = \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$F(1,1) = \left(e^2, 0, 2\pi\right)$$

y

$$JG(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 1 & 0 \\ 0 & \cos(v+w) & \cos(v+w) \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} JH(1,1) &= JG(F(1,1))\,JF(1,1) = JG\left(e^2,0,2\pi\right)JF(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2+\pi & -2+3\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Sean $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y $G:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $F(x,y,z) = \left(x^2+y^2, xyz, z^2-x^2\right)$ y $G(u,v,w) = (\cos(u+w), e^v)$.Calcula la matriz jacobiana de la composición $G \circ F$ en el punto $(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$.

    Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y JG

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow JF\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$F\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) = (\pi,\pi,\pi)$$

y

$$JG(u,v,w) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(u+w) & 0 & -\operatorname{sen}(u+w) \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} JH\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) &= JG\left(F\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)\right)JF\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) = JG(\pi,\pi,\pi)\cdot JF\left(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi e^\pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Obtener la matriz jacobiana de la descomposición $g \circ F$, siendo $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y) = (2x+3y, xy)$ y $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(u,v) = uv$.

    Solución: Usaremos el teorema de la función compuesta. Para ello calcularemos JF y $Jg = \nabla g$

$$JF = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\nabla g(u,v) = (v,u)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} J(g\circ F) &= \nabla g(F(x,y))\cdot JF(x,y) = \nabla g(2x+3y,xy)\cdot JF(x,y) \\ &= (xy, 2x+3y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \left(4xy+3y^2, 6xy+2x^2\right) \end{aligned}$$

Podemos realizar la composición de las funciones

$$g \circ F(x,y) = g(F(x,y)) = g(2x+3y, xy) = (2x+3y)\,xy = 2x^2y + 3y^2x$$

y realizar la derivada

$$\nabla h(x,y) = \nabla (g \circ F)(x,y) = \left(4xy + 3y^2, 2x^2 + 6yx\right)$$

que obviamente coincide con la anterior.

14. Resuelve los siguientes ejercicios, en primer lugar calculando la composición (es decir, expresando z en función de t) y, en segundo lugar, usando la regla de la cadena:

   a) $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 1 + \ln(t-1) \end{cases}$ calcula $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

   b) $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$ siendo $\begin{cases} x = e^{-2t+s} \\ y = s^2 + \ln(t-1) \end{cases}$ calcula $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}$

   c) $z(x,y) = x\ln(y) + e^{yz}$ siendo $\begin{cases} x = 2r - 3s + 4t \\ y = \frac{r}{s} \\ z = \frac{t}{r} \end{cases}$ calcula $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

Solución:

a) Usando la composición

$$z(x,y) = z\left(e^{-2t}, 1 + \ln(t-1)\right) = \sqrt{e^{-2t}} + (1 + \ln(t-1))^2 = e^{-t} + (1 + \ln(t-1))^2$$

y por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t} + 2(1 + \ln(t-1))\frac{1}{t-1}$$

Usando el teorema de la función compuesta tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-2e^{-2t}\right) + 2y\frac{1}{t-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t}}}\left(-2e^{-2t}\right) + 2(1 + \ln(t-1))\frac{1}{t-1} \\
&= -\frac{1}{e^{-t}}e^{-2t} + 2(1 + \ln(t-1))\frac{1}{t-1} \\
&= -e^{-t} + 2(1 + \ln(t-1))\frac{1}{t-1}
\end{aligned}$$

b) Usando la composición

$$z(x,y) = z\left(e^{-2t+s}, s^2 + \ln(t-1)\right) = \sqrt{e^{-2t+s}} + \left(s^2 + \ln(t-1)\right)^2 = e^{-t}e^{s/2} + \left(s^2 + \ln(t-1)\right)^2$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= -e^{-t}e^{s/2} + 2\left(s^2 + \ln(t-1)\right)\frac{1}{t-1} \\
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{e^{-t}e^{s/2}}{2} + 4\left(s^2 + \ln(t-1)\right)s
\end{aligned}$$

Usando el teorema de la función compuesta tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-2e^{-2t+s}\right)+2y\frac{1}{t-1}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t+s}}}\left(-2e^{-2t+s}\right)+2\left(s^2+\ln(t-1)\right)\frac{1}{t-1}\\
&= -\frac{1}{e^{-t}e^{s/2}}e^{-2t+s}+2\left(s^2+\ln(t-1)\right)\frac{1}{t-1}\\
&= -e^{-t}e^{s/2}+2\left(s^2+\ln(t-1)\right)\frac{1}{t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{-2t+s}\right)+2y2s\\
&= \frac{1}{2\sqrt{e^{-2t+s}}}\left(e^{-2t+s}\right)+4\left(s^2+\ln(t-1)\right)s\\
&= \frac{1}{2e^{-t}e^{s/2}}\left(e^{-2t+s}\right)+4\left(s^2+\ln(t-1)\right)s\\
&= \frac{e^{-t}e^{s/2}}{2}+4\left(s^2+\ln(t-1)\right)s
\end{aligned}$$

$c)$ Usando la composición

$$u(x,y)=u\left(2r-3s+4t,\frac{r}{s},\frac{t}{r}\right)=(2r-3s+4t)\ln\left(\frac{r}{s}\right)+e^{\frac{r}{s}\frac{t}{r}}=(2r-3s+4t)\ln\left(\frac{r}{s}\right)+e^{\frac{t}{s}}$$

Derivando directamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= 2\ln\left(\frac{r}{s}\right)+(2r-3s+4t)\frac{\frac{1}{s}}{\frac{r}{s}}=2\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\frac{(2r-3s+4t)}{r}\\
\frac{\partial u}{\partial s} &= -3\ln\left(\frac{r}{s}\right)+(2r-3s+4t)\frac{-\frac{r}{s^2}}{\frac{r}{s}}-\frac{t}{s^2}e^{\frac{t}{s}}=-3\ln\left(\frac{r}{s}\right)-(2r-3s+4t)\frac{1}{s}-\frac{t}{s^2}e^{\frac{t}{s}}=\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= 4\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\frac{1}{s}e^{\frac{t}{s}}
\end{aligned}$$

y usando el teorema de la función compuesta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\ln(y)\,2+\left(\frac{x}{y}+ze^{yz}\right)\frac{1}{s}+ye^{yz}\left(-\frac{t}{r^2}\right)\\
&= 2\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\left(\frac{(2r-3s+4t)\,s}{r}+\frac{t}{r}e^{\frac{t}{s}}\right)\frac{1}{s}+\frac{r}{s}e^{\frac{t}{s}}\left(-\frac{t}{r^2}\right)\\
&= 2\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\frac{(2r-3s+4t)}{r}+\frac{t}{rs}e^{\frac{t}{s}}-\frac{t}{sr}e^{\frac{t}{s}}\\
&= 2\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\frac{(2r-3s+4t)}{r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = -3\ln\left(y\right)+\left(\frac{x}{y}+ze^{yz}\right)\left(-\frac{r}{s^2}\right)+ye^{yz}\cdot 0\\
&= -3\ln\left(\frac{r}{s}\right)+\left(\frac{(2r-3s+4t)\,s}{r}+\frac{t}{r}e^{\frac{t}{s}}\right)\left(-\frac{r}{s^2}\right)\\
&= -3\ln\left(\frac{r}{s}\right)-\frac{(2r-3s+4t)}{s}-\frac{t}{s^2}e^{\frac{t}{s}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 4\ln\left(y\right)+\left(\frac{x}{y}+ze^{yz}\right)\cdot 0+ye^{yz}\frac{1}{r}\\
&= 4\ln\left(y\right)+\frac{r}{s}e^{\frac{t}{s}}\frac{1}{r}\\
&= 4\ln\left(y\right)+\frac{1}{s}e^{\frac{t}{s}}
\end{aligned}
$$

15. Sea $z=2x^2-3y^3$, con $x=u+v+w$ e $y=u^2v^2w^2$, calcula $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$.

Solución: Utilizamos el teorema de la función compuesta

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=4x-9y2uv^2w^2=4\left(u+v+w\right)-18u^3v^4w^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=4x-18y\left(u^2vw^2\right)=4\left(u+v+w\right)-18u^4v^3w^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}=4x-18y\left(u^2v^2w\right)=4\left(u+v+w\right)-18u^4v^4w^3$$

16. Sea $u:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$u\left(x,y,z\right)=\left(x+y\right)^4+y^2\left(z+x\right)^3$$

con

$$x=r\cdot s\cdot e^{-t};\ \ y=r\cdot s\cdot\ln\left(1+t^2\right);\ \ z=r^2\cdot s\cdot\cos t$$

Calcula, usando la regla de la cadena, ∇u, para $r=2$, $s=1$ y $t=0$.

Solución: Como $(r_0,s_0,t_0)=(2,1,0)$ entonces $\left(x\left(r_0,s_0,t_0\right),y\left(r_0,s_0,t_0\right),z\left(r_0,s_0,t_0\right)\right)=(2,0,4)$

Tenemos la función u

$$u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\text{ con }u\left(x,y,z\right)=\left(x+y\right)^4+y^2\left(z+x\right)^3$$

y tenemos la función F de cambio de variable

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\text{ con }F\left(r,s,t\right)=\left(rse^{-t},rs\ln\left(1+t^2\right),r^2s\cos t\right)=\left(x,y,z\right)$$

y se pide $J\left(u\circ F\right)(2,1,0)$. Usando la regla de la cadena:

$$J\left(u\circ F\right)(2,1,0)=Ju\left(F\left(2,1,0\right)\right)\cdot JF\left(2,1,0\right)=Ju\left(2,0,4\right)\cdot JF\left(2,1,0\right)$$

por una parte

$$Ju\left(r,s,t\right)=\left(\begin{array}{c}4\left(x+y\right)^{3}+3y^{2}\left(z+x\right)^{2}\\ 4\left(x+y\right)^{3}+2y\left(z+x\right)^{3}\\ 3y^{2}\left(z+x\right)^{2}\end{array}\right)^{T}\Rightarrow Ju\left(2,0,4\right)=\left(32,32,0\right)$$

y por otra

$$JF\left(r,s,t\right)=\left(\begin{array}{ccc}se^{-t} & re^{-t} & -rse^{-t}\\ s\ln\left(1+t^{2}\right) & r\ln\left(1+t^{2}\right) & rs\frac{2t}{1+t^{2}}\\ 2rs\cos t & r^{2}\cos t & -r^{2}s\operatorname{sen}t\end{array}\right)\Rightarrow JF\left(2,1,0\right)=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{array}\right)$$

y finalmente

$$J\left(u\circ F\right)\left(2,1,0\right)=\left(32,32,0\right)\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}32 & 64 & -64\end{array}\right)$$

17. Dada la función $f:\mathbb{R}^{2}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{2}\left(\mathbb{R}\right)$, demuestra que

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}\left(x,y\right)+\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}\left(x,y\right)=2\frac{\partial^{2}f}{\partial u^{2}}\left(u,v\right)+2\frac{\partial^{2}f}{\partial v^{2}}\left(u,v\right)$$

siendo

$$u=x+y\qquad v=x-y$$

Solución: De las relaciones entre (u,v) y (x,y) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\frac{\partial u}{\partial y}=1;\frac{\partial v}{\partial x}=1;\frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Usando ahora la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales primeras

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}$$

y ahora las segundas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial^{2}f}{\partial u^{2}}+\frac{\partial^{2}f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^{2}f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^{2}f}{\partial v^{2}}\\ &= \frac{\partial^{2}f}{\partial u^{2}}+2\frac{\partial^{2}f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^{2}f}{\partial v^{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

Sumando ambas expresiones

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)
$$

18. Sea $z(x,y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$
\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0
$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$
\left\{ \begin{array}{l} u = x + 2y \\ v = 3x - 2y \end{array} \right.
$$

Solución: Usaremos la regla de la cadena, teniendo en cuenta que

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 2; \frac{\partial v}{\partial x} = 3; \frac{\partial v}{\partial y} = -2
$$

Notar que el determinante Jacobiano de la transformación es

$$
\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)}\right) = -2 - 6 = -8 \neq 0
$$

y por tanto es un cambio de coordenadas válido. Si derivamos respecto de x

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}
$$

y ahora respecto de y

$$
\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}
$$

sustituyendo en la ecuación

$$
\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}\right) - 3\left(2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0 \Rightarrow -5\frac{\partial z}{\partial u} + 6\frac{\partial z}{\partial v} = 0
$$

19. Sea $z(x,y)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0
$$

Halla la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$u = x + 2y : \qquad v = 3x - 2y$$

Solución: Es el mismo cambio del problema anterior con

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 2; \frac{\partial v}{\partial x} = 3; \frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

Si derivamos respecto de x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}$$

y ahora respecto de y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

Y ahora obtenemos las derivadas parciales segundas derivando las expresiones anteriores

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + 4\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + 3\left(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 8\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) &= 0 \\
21\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= 0
\end{aligned}$$

20. Sea $f\left(x,y\right)$ una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$x=e^u;\qquad y=e^v$$

Solución: El cambio es válido puesto que

$$\det\left(\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right)=\det\begin{pmatrix} e^u & 0\\ 0 & e^v\end{pmatrix}=e^{u+v}\neq 0$$

y usando el teorema de la función inversa

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=\left(\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} e^{-u} & 0\\ 0 & e^{-v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x};\frac{\partial u}{\partial y}=0;\frac{\partial v}{\partial x}=0;\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{y}$$

Usando la regla de la cadena calculamos las derivadas parciales de f respecto de u y v

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}$$

y las segundas derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= -\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= -\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}
x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} &= 0\\
x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)+y^2\left(-\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+x\left(\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+y\left(\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}\right) &= 0\\
\left(-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)+\left(-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v} &= 0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= 0
\end{aligned}$$

21. Probar que la expresión

$$yz^4+x^2z^3-e^{xyz}=0$$

define a $z=z(x,y)$ como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,0)$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Solución: Hay una ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independientes. La función es

$$\varphi(x,y,z)=yz^4+x^2z^3-e^{xyz}$$

Para encontrar el valor de z damos los valores $x=1$ e $y=0$ indicados

$$z^3-1=0\Leftrightarrow z=1$$

luego tenemos que comprobar que se cumplen las dos hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(1,0,1)$:

a) Las ecuaciones se cumplen en el punto indicado

$$\varphi(1,0,1)=0\cdot 1^4+1^2\cdot 1^3-e^{1\cdot 0\cdot 1}=0$$

b)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)=4yz^3-3x^2z^2-xye^{xyz}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,0,1)=-3\neq 0$$

Luego se cumplen ambas hipótesis y la función φ define a z como función implícita de las variables x e y.

Para encontrar la derivada pedida utilizaremos la ecuación inicial. Si derivamos respecto de x, teniendo en cuenta que $z=z(x,y)$. Por simplicidad en las expresiones se utilizará z en lugar de $z(x,y)$ y $z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ y $z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(yz^4+x^2z^3-e^{xyz}=0\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(yz^4+x^2z^3-e^{xyz}\right)=0$$

$$4yz^3z_x+2xz^3+3x^2z^2z_x-e^{xyz}(yz+xyz_x)\quad=\quad 0\ (1)$$

y evaluamos en el punto $(1,0,1)$ sabiendo que $x=1$, $y=0$ y $z(1,0)=1$

$$2+3z_x(1,0)=0\Rightarrow z_x(1,0)=-\frac{2}{3}$$

y para la derivada respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz}\right) = 0$$

$$z^4 + 4yz^3z_y + 3x^2z^2z_y - e^{xyz}\left(xz + xyz_y\right) \quad = \quad 0 \ (2)$$

que para el punto $(1, 0, 1)$ se obtiene

$$1 + 3z_y\left(1, 0\right) - 1 = 0 \Rightarrow z_y\left(1, 0\right) = 0$$

Para obtener la derivada solicitada, podemos derivar (1) repecto de y o (2) respecto de x. Si usamos (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4yz^3z_x + 2xz^3 + 3x^2z^2z_x - e^{xyz}\left(yz + xyz_x\right)\right) = 0$$

$$4z^3z_x + 12yz^2z_yz_x + 4yz^3z_{xy} + 6xz^2z_y + 3x^2\left(2zz_yz_x + z^2z_{xy}\right) - e^{xyz}\left(xz + xyz_y\right)\left(yz + xyz_x\right) - e^{xyz}\left(z + yz_y + xz_x +\right.$$

Ahora sabemos que $x = 1, y = 0, z = 1, z_x = -\frac{2}{3}$ y $z_y = 0$

$$-\frac{8}{3} + 3z_{xy} - 1 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow z_{xy} = 1$$

22. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y + \operatorname{sen}\left(xyz\right) + z^2 = 1 \\ \\ e^{yz} + xz = 1 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x, en un entorno del punto $(1, 1, 0)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 3 incógnitas, lo que indica que hay una variable independiente. Las funciones son

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(x, y, z\right) &= x^2y + \operatorname{sen}\left(xyz\right) + z^2 - 1 \\ \varphi_2\left(x, y, z\right) &= e^{yz} + xz - 1 \end{aligned}$$

Tenemos que comprobar que se cumplen las dos hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(1, 1, 0)$:

a) Las ecuaciones se deben cumplir en el punto indicado

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(1, 1, 0\right) &= 1^21 + \operatorname{sen}\left(1 \cdot 1 \cdot 0\right) + 0^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ \varphi_2\left(1, 1, 0\right) &= e^{1 \cdot 0} + 1 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

b) El jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes debe ser distinto de cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\varphi_1, \varphi_2\right)}{\partial\left(y, z\right)}\left(x, y, z\right) &= \begin{pmatrix} x^2 + xz\cos\left(xyz\right) & xy\cos\left(xyz\right) + 2z \\ ze^{yz} & ye^{yz} + x \end{pmatrix} \\ \det\left(\frac{\partial\left(\varphi_1, \varphi_2\right)}{\partial\left(y, z\right)}\left(1, 1, 0\right)\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego se cumplen ambas hipótesis y las ecuaciones definen a z e y como funciones implícitas de la variable x.

Para encontrar las derivadas pedidas utilizaremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(1,1,0) &= -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(1,1,0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(1,1,0)\right)\\ &= -\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(1,1,0)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(1,1,0)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Derivando las funciones respecto de x e igualando en el punto $(1,1,0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,z) &= 2xy+yz\cos(xyz)\Rightarrow\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(1,1,0)=2\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y,z) &= z\Rightarrow\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(1,1,0)=0\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(1,1,0)=-\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}y'(1) &= -2\\ z'(1) &= 0\end{aligned}$$

23. Suponiendo que las ecuaciones

$$\begin{cases} u+2v-x^2+y^2=0\\ \\ 2u-v-2xy=0\end{cases}$$

define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y, en un entorno de un punto adecuado. Calcula $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 4 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independiente. Las funciones son

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,u,v) &= u+2v-x^2+y^2\\ \\ \varphi_2(x,y,u,v) &= 2u-v-2xy\end{aligned}$$

Como nos indican que u y v son funciones de x e y en un entorno de un punto, por ejemplo, $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)$, entonces se cumple:

a) Las ecuaciones pasan por el punto, es decir, se cumple

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_0,y_0,u_0,v_0) &= u_0+2v_0-x_0^2+y_0^2=0\\ \\ \varphi_2(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 2u_0-v_0-2x_0y_0=0\end{aligned}$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}(x_0,y_0,u_0,v_0)\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4=-5\neq 0\end{aligned}$$

que se cumple para todos los puntos, así que lo único que necesitamos es cualquier punto solución del sistema de dos ecuaciones.

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0,u_0,v_0) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,u_0,v_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0,u_0,v_0)\right)$$

La matriz es constante y su inversa es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

mientras que la derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} -2x & +2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} \\ \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \begin{pmatrix} -2x_0 & +2y_0 \\ -2y_0 & -2x_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0,u_0,v_0) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2x_0 & +2y_0 \\ -2y_0 & -2x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_0+\frac{4}{5}y_0 & -\frac{2}{5}y_0+\frac{4}{5}x_0 \\ -\frac{2}{5}y_0+\frac{4}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_0-\frac{4}{5}y_0 \end{pmatrix}$$

24. Probar si la expresión

$$xy - x + 2z + e^z = 2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,2)$ con $z(1,2)=0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Solución: Comprobamos las hipótesis del teorema de la Función Implícita. Tenemos una ecuación y 3 incógnitas, por tanto tendremos dos variables independientes. mientras que la función φ es

$$\varphi(x,y,z) = xy - x + 2z + e^z - 2$$

a) La función debe anularse en el punto $(1,2,0)$

$$\varphi(1,2,0) = 2-1+0+1-2=0$$

b) Como sólo hay una variable inpendiente la segunda hipótesis que debe cumplirse es $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,2,0)\neq 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2+e^z \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,2,0) = 2+e^0 = 3\neq 0$$

Entonces podemos poner $z = z(x, y)$. Para obtener las derivadas pedidas, usamos la ecuación y la derivamos respecto de x e y. Por comodidad usaremos la notación $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x$ para expresar la derivada

$$xy - x + 2z + e^z = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow y - 1 + 2z_x + z_x e^z = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow x + 2z_y + z_y e^z = 0 \end{cases}$$

y si evaluamos en el punto $(1, 2)$ con $z(1, 2) = 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(1,2)} \Rightarrow 2 - 1 + 2z_x(1,2) + z_x(1,2)\, e^0 = 0 \Rightarrow 1 + 3z_x(1,2) = 0 \Rightarrow z_x(1,2) = -\frac{1}{3} \\ \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(1,2)} \Rightarrow 1 + 2z_y(1,2) + z_y(1,2)\, e^0 = 0 \Rightarrow 1 + 3z_y(1,2) = 0 \Rightarrow z_y(1,2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

y volvemos a derivar para la segunda derivada

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow 2z_{xx} + z_{xx}e^z + z_x^2 e^z = 0 \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Rightarrow 1 + 2z_{xy} + z_{xy}e^z + z_x z_y e^z = 0 \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Rightarrow 1 + 2z_{yx} + z_{yx}e^z + z_y z_x e^z = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow 2z_{yy} + z_{yy}e^z + z_y^2 e^z = 0 \end{cases}$$

Y sustituyendo los valores $x = 1$, $y = 2$, $z(1,2) = 0$, $z_x(1,2) = -\frac{1}{3}$ y $z_y(1,2) = -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} 2z_{xx}(1,2) + z_{xx}(1,2)\, e^{z(1,2)} + z_x^2(1,2)\, e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{xx}(1,2) = -\frac{1}{27} \\ \\ 1 + 2z_{xy}(1,2) + z_{xy}(1,2)\, e^{z(1,2)} + z_x(1,2)\, z_y(1,2)\, e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow z_{xy}(1,2) = -\frac{10}{27} \\ \\ 1 + 2z_{yx}(1,2) + z_{yx}(1,2)\, e^{z(1,2)} + z_y(1,2)\, z_x(1,2)\, e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{xy}(1,2) = -\frac{10}{27} \\ \\ 2z_{yy}(1,2) + z_{yy}(1,2)\, e^{z(1,2)} + z_y^2(1,2)\, e^{z(1,2)} = 0 \Leftrightarrow z_{yy}(1,2) = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

25. Probar si la expresión

$$xe^z + ye^{x-1} + ze^y = 2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1, 1)$ con $z(1, 1) = 0$. Calcula en dicho punto $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Comprobamos las hipótesis del teorema de la Función Implícita. Tenemos una ecuación y 3 incógnitas, por tanto tendremos dos variables independientes. mientras que la función φ es

$$\varphi(x, y, z) = xe^z + ye^{x-1} + ze^y - 2$$

a) La función debe anularse en el punto $(1, 1, 0)$

$$\varphi(1, 1, 0) = 1 + 1 + 0 - 2 = 0$$

b) Como sólo hay una variable inpendiente la segunda hipótesis que debe cumplirse es $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = xe^z + e^y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1, 0) = 1 + e \neq 0$$

Entonces podemos poner $z = z(x, y)$. Para obtener las derivadas pedidas, usamos la ecuación y la derivamos respecto de x e y. Usando el teorema de la función implícita

$$\frac{\partial z}{\partial (x,y)}(1,1,0) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1,0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial (x,y)}(1,1,0)\right)$$

El primer factor lo hemos calculado antes y al ser un número real

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1,0)\right)^{-1} = \frac{1}{1+e}$$

Para obtener el segundo, derivamos la función respecto de x y respecto de y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^z + ye^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1,0) = 1+1 = 2$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x-1} + ze^y \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1,0) = 1+0 = 1$$

y por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial (x,y)}(1,1,0) = -\frac{1}{1+e}(2,1) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{-2}{1+e} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{-1}{1+e}$$

Podemos también utilizar la ecuación

$$xe^z + ye^{x-1} + ze^y = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow e^z + xz_xe^z + ye^{x-1} + z_xe^y = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow xz_ye^z + e^{x-1} + z_ye^y + ze^{yz} = 0 \end{cases}$$

y en $(1,1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) &= e^0 + 1z_x(1,1)e^0 + 1e^{1-1} + z_x(1,1)e^1 = 0 \Rightarrow 1 + z_x(1,1) + 1 + z_x(1,1)e = 0 \\ 2 + (1+e)z_x(1,1) &= 0 \Leftrightarrow z_x(1,1) = -\frac{2}{1+e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) &\Rightarrow 1z_y(1,1)e^0 + e^0 + z_y(1,1)e^1 + 0e^{1\cdot 0} = 0 \Rightarrow z_y(1,1) + 1 + z_y(1,1) = 0 \\ 1 + 2z_y(1,1) &= 0 \Leftrightarrow z_x(1,1) = -\frac{1}{1+e} \end{aligned}$$

26. Estudia si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy + xyz + z - 1 = 0 \\ \\ xyz = 0 \end{cases}$$

define a las variables y y z como funciones implícitas de x, en un entorno del punto $(1,0,1)$. Calcula $y'(1)$ y $z'(1)$.

Solución: Hay dos ecuaciones y 3 incógnitas, lo que indica que hay 1 variable independiente. Las funciones serían

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y,u,v) &= xy + xyz + z - 1 \\ \varphi_2(x,y,u,v) &= xyz \end{aligned}$$

Como nos indican que y y z son funciones de x en un entorno de $(1,0,1)$:

a) Las ecuaciones tienen que pasar por el punto

$$\varphi_1(1,0,1) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\varphi_2(1,0,1) = 1\cdot 0\cdot 1 = 0$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+xz & xy+1 \\ xz & xy \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial x}(1,0,1)\right)$$

Calculamos la inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

mientras que la derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+yz \\ yz \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x)}(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x)}(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

27. Sea α y β dos números reales. Prueba que la ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z)\, e^z = 0$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(0,0,0)$. Determina los valores de α y β, para los que se cumple

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 3 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -3$$

Solución: Hay 1 ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay 2 variables independiente. La función serían

$$\varphi(x,y,z) = \operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z)\, e^z$$

a) Las ecuaciones tienen que pasar por el punto

$$\varphi(0,0,0) = \operatorname{sen}(\alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + 0)\, e^0 = 0$$

b) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ respecto de las variables dependientes es distinto de 0. En este caso como sólo hay una variable dependiente, este jacobiano es la derivada de la función

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(x,y,z) &= \cos(\alpha x+\beta y+z)\,e^z+\operatorname{sen}(\alpha x+\beta y+z)\,e^z \\ &= e^z\left(\cos(\alpha x+\beta y+z)+\operatorname{sen}(\alpha x+\beta y+z)\right) \\ \det\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(0,0,0)\right) &= e^0(1+0)=1\neq 0\end{aligned}$$

La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}(x,y,z)=-\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(z)}(x,y,z)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(x,y,z)\right)$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(x,y,z) &= \left(\alpha\cos(\alpha x+\beta y+z)\,e^z,\beta\cos(\alpha x+\beta y+z)\,e^z\right) \\ &= e^z\cos(\alpha x+\beta y+z)(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

que en el punto $(0,0,0)$, sería

$$\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}(0,0,0)=-(1)^{-1}\cdot(\alpha,\beta)=(-\alpha,-\beta)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,0),\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\right)$$

de donde se deduce

$$\alpha=-3 \text{ y } \beta=-3$$

28. La ecuación

$$3y^3x^4-x^2y=2$$

¿define a y como función implícita de x en $x_0=1$? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a y en dicho punto.

Hay 1 ecuación y 2 incógnitas, lo que indica que hay 1 variable independiente. Las funciones serían

$$\varphi(x,y)=3y^3x^4-x^2y-2$$

Como nos indican que y es función de x en $x_0=1$, primero hay que encontrar el valor de y_0, para ello

a) La ecuación tiene que pasar por el punto

$$\varphi(1,y_0)=3y_0^3-y_0-2=0$$

que es un polinomio de grado 3 y por tanto tendrá tres soluciones. Podemos probar por Ruffini que $y_0=1$ es una raíz, lo que permite descomponer el polinomio en

$$3y_0^3-y_0-2=(y_0-1)\left(3y_0^2+3y_0+2\right)$$

y las otras dos raíces se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado

$$y_0=\frac{-3\pm\sqrt{9-24}}{6}$$

que son complejas y por tanto no nos sirven. El punto debe ser el $(1,1)$.

b) La segunda hipótesis del teorema nos dice que la derivada de la función φ respecto de la variable dependiente y en el punto $(1,1)$ que hemos encontrado debe ser distinta de 0

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z)=9y^2x^4-x^2\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)=6-1=5\neq 0$$

luego y se puede poner como función implícita de x.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(1,1)$ necesitamos conocer el valor de $y'(1)$, que podemos obtener derivando la ecuación

$$9y^2x^4y'+12y^3x^3-2xy-x^2y'=0$$

y sustituyendo en el punto $x=1, y(1)=1$

$$6y'(1)+12-2-y'(1)=0\Longleftrightarrow 5y'(1)+10=0\Longleftrightarrow y'(1)=-2$$

La recta tangente (es el polinomio de primer grado de la función y en $x=1$)

$$y(1)+y'(1)(x-1)=1-2(x-1)=-2x+3$$

La recta tangente será

$$y=-2x+3$$

29. Probar si la expresión

$$xz+ye^{2x-z}=2$$

define a z como función implícita de x e y, en un entorno del punto $(1,0)$ con $z(1,0)=2$. En caso afirmativo calcula $\nabla z(1,0)$.

Hay 1 ecuación y 3 incógnitas, lo que indica que hay 2 variables independientes. La función sería

$$\varphi(x,y,z)=xz+ye^{2x-z}-2$$

Para que z sea función de x e y, en $(1,0)$

a) La ecuación tiene que pasar por el punto $(1,0,z(1,0))=(1,0,2)$

$$\varphi(1,0,2)=1\cdot 2+0\cdot e^{2\cdot 1-1}-2=2-2=0$$

b) La segunda hipótesis del teorema nos dice que la derivada de la función φ respecto de la variable dependiente z en el punto $(1,0)$ debe ser distinta de 0

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)=x-ye^{2x-z}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,0,2)=1-0\cdot e^{2\cdot 1-1}=1\neq 0$$

luego z se puede poner como función implícita de x e y.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}(x,y,z) &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial(x,y)}(x,y,z)\right)\\
\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}(1,0,2) &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}(1,0,2)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(1,0,2)\right)\\
\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}(1,0,2) &= -(1)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(1,0,2)\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(x,y,z)=\left(z+2ye^{2x-z},e^{2x-z}\right)\Rightarrow\left(\frac{\partial(\varphi)}{\partial(x,y)}(1,0,2)\right)=(2,1)$$

luego

$$\nabla z(1,0)=(2,1)$$

30. Sea el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} xu+yvu^2=2 \\ \\ xu^3+y^2v^4=2 \end{cases}$$

y considera el punto $P=(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$

a) Prueba que en un entorno del punto P el sistema define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y.

b) Encuentra una expresión formal para la matriz jacobiana $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

c) Calcula el Jacobiano anterior en el punto $(1,1)$. Indica cuál es el valor de $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$.

Solución:

a) Hay dos ecuaciones y 4 incógnitas, lo que indica que hay dos variables independiente. Las funciones son

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,u,v) &= xu+yvu^2-2\\ \varphi_2(x,y,u,v) &= xu^3+y^2v^4-2\end{aligned}$$

Como nos indican que u y v son funciones de x e y en un entorno de un punto, por ejemplo, $P=(1,1,1,1)$, entonces se cumple:

1) Las ecuaciones pasan por el punto

$$\begin{aligned}\varphi_1(1,1,1,1) &= 1\cdot1+1\cdot1\cdot1^2-2=0\\ \varphi_2(1,1,1,1) &= 1\cdot1^3+1^2\cdot1^4-2=0\end{aligned}$$

2) También debe ocurrir en ese punto que el jacobiano de las funciones φ_k respecto de las variables dependientes es distinto de 0

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} x+2yvu & yu^2\\ 3xu^2 & 4y^2v^3\end{pmatrix}\\ \det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1)\right) &= \begin{vmatrix}3&1\\3&4\end{vmatrix}=12-3=9\neq0\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos hipótesis del teorema, entonces las ecuaciones definen a u y v commo funciones implícitas de x e y.

b) La derivada implícita, viene dada por la expresión

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y,v,w)=-\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(x,y,v,w)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x,y,v,w)\right)$$

a derivada de las funciones respecto de las variables independientes es:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}(x,y,u,v)=\begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix}$$

La expresión formal buscada será

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y,v,w)=-\begin{pmatrix} x+2yvu & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix}$$

que tendrá sentido cuando exista la matriz inversa.

$c)$ Para el punto $(x,y)=(1,1)$ y como $u(1,1)=1$ y $v(1,1)=1$, tendremos

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y,v,w)=-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)=0.$$

31. Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a}\in A$ tal que

$$Jf(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la diferencial de f en $\overrightarrow{a}$ y las derivadas parciales y las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores $\overrightarrow{v}_1=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{v}_2=(-1,-1,-1)$ y $\overrightarrow{v}_3=(0,-1,0)$ de las funciones coordenadas de f en $\overrightarrow{a}$.

Solución: La diferencial viene dada por

$$df(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{h}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h-k \\ -h+j+k \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales serían las derivadas direccionales en la dirección de los ejes coordenados que podemos obtener usando el Jacobiano

$$D_{\overrightarrow{e_k}}f(\overrightarrow{a})=df(\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{e_k}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{e_k}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{e_1}}f(\overrightarrow{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
D_{\overrightarrow{e_2}}f(\overrightarrow{a}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
D_{\overrightarrow{e_3}}f(\overrightarrow{a}) &= \frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{a})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El resto de derivadas direccionales se calcula de modo análogo $= (-1,-1,1)$, $= (-1,-1,-1)$ y $= (0,-1,0)$

$$\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{v}_1} f\left(\overrightarrow{a}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
D_{\overrightarrow{v}_2} f\left(\overrightarrow{a}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
D_{\overrightarrow{v}_3} f\left(\overrightarrow{a}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

32. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto, $\overrightarrow{a} \in A$ tal que la matriz jacobiana de f en $\overrightarrow{a}$ es

$$D_{\overrightarrow{v_1}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = -1 \qquad \overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$$

$$D_{\overrightarrow{v_2}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = 1 \qquad \overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$$

$$D_{\overrightarrow{v_3}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{v_3} = (0,1,1)$$

Calcula la diferencial de f y las derivadas parciales en $\overrightarrow{a}$.

Solución: El Jacobiano de la función f en el punto $\overrightarrow{a}$, viene dado por

$$Jf\left(\overrightarrow{a}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right)\right)$$

Y el enunciado del problema nos da la siguiente información

$$D_{\overrightarrow{v_1}} f\left(\overrightarrow{a}\right) = -1 \Rightarrow Jf\left(\ \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{v_1} = -1$$

es decir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right)\right) \cdot (1,1,0) = -1 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right) = -1$$

y el resto de vectores

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right)\right) \cdot (1,0,1) = 1 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right)\right) \cdot (0,1,1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right) = 0$$

que nos proporciona un sistema de 3 ecuaciones (las derivadas direccionales) y 3 incógnitas (las derivadas parciales en el punto) que tiene por solución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right) &= -1 \\
\frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right) &= 1
\end{aligned}$$

La diferencial viene dada por

$$df\left(\overrightarrow{a}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right)dx+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right)dy+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\overrightarrow{a}\right)dz=-dy+dz$$

33. Calcula el gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x,y)=\operatorname{sen}(x+y)\,e^{x-y},\qquad (b)\quad g(x,y,z)=xye^{yz},\qquad (c)\quad h(x,y,z)=\cos(x+2y+3z).$

Solución: Derivamos dos veces en cada caso

a)

$$f(x,y)=\operatorname{sen}(x+y)\,e^{x-y}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x+y)\right)e^{x-y}\\[2ex]\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\cos(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)\right)e^{x-y}\end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\left(-\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x+y)\right)e^{x-y}+\left(\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x+y)\right)e^{x-y}=2\cos(x+y)\,e^{x-y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\left(-\operatorname{sen}(x+y)+\cos(x+y)\right)e^{x-y}-\left(\cos(x+y)+\operatorname{sen}(x+y)\right)e^{x-y}\\&=-2\operatorname{sen}(x+y)\,e^{x-y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\left(-\operatorname{sen}(x+y)-\cos(x+y)\right)e^{x-y}-\left(\cos(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)\right)e^{x-y}=-2\cos(x+y)\,e^{x-y}$$

siendo

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2\cos(x+y)\,e^{x-y} & -2\operatorname{sen}(x+y)\,e^{x-y}\\ -2\operatorname{sen}(x+y)\,e^{x-y} & -2\cos(x+y)\,e^{x-y}\end{pmatrix}=2e^{x-y}\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y)\\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\cos(x+y)\end{pmatrix}$$

b)

$$g(x,y,z)=xye^{yz}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=ye^{yz}\\[2ex]\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=xe^{yz}+xyze^{yz}=xe^{yz}(1+yz)\\[2ex]\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=xy^2e^{yz}\end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y,z)=e^{yz}(1+yz)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(x,y,z)=y^2e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z)=xze^{yz}(1+yz)+xze^{yz}=xz(2+yz)\,e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 2xye^{yz} + xy^2 z e^{yz} = xy(2+yz)e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z) = xy^3 e^{yz}$$

siendo

$$\begin{aligned} Hg(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{yz}(1+yz) & y^2 e^{yz} \\ e^{yz}(1+yz) & xz(2+yz)e^{yz} & xy(2+yz)e^{yz} \\ y^2 e^{yz} & xy(2+yz)e^{yz} & xy^3 e^{yz} \end{pmatrix} \\ &= e^{yz} \begin{pmatrix} 0 & 1+yz & y^2 \\ 1+yz & xz(2+yz) & xy(2+yz) \\ y^2 & xy(2+yz) & xy^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$c)$

$$h(x,y,z) = \cos(x+2y+3z) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(x+2y+3z) \\ \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = -2\operatorname{sen}(x+2y+3z) \\ \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = -3\operatorname{sen}(x+2y+3z) \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y,z) = -\cos(x+2y+3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -2\cos(x+2y+3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -3\cos(x+2y+3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y,z) = -4\operatorname{sen}(x+2y+3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -6\cos(x+2y+3z)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(x,y,z) = -9\cos(x+2y+3z)$$

siendo

$$\begin{aligned} Hf(x,y) &= \begin{pmatrix} -\cos(x+2y+3z) & -2\cos(x+2y+3z) & -3\cos(x+2y+3z) \\ -2\cos(x+2y+3z) & -4\operatorname{sen}(x+2y+3z) & -6\cos(x+2y+3z) \\ -3\cos(x+2y+3z) & -6\cos(x+2y+3z) & -9\cos(x+2y+3z) \end{pmatrix} \\ &= -\cos(x+2y+3z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

34. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces y c una constante. Comprueba que la función $\phi(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct))$ es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Solución: Si tomamos

$$u = x - ct$$

y

$$v = x + ct$$

entonces usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

y como f es una función real de variable real $\frac{\partial f}{\partial u} = f'(u)$ y por tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(f'(x-ct) + f'(x+ct)\right)$$

y derivando otra vez

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} = \frac{1}{2}\left(f''(x-ct) + f''(x+ct)\right)$$

mientras que si derivamos repecto de t

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left(-cf'(x-ct) + cf'(x+ct)\right)$$

y derivando otra vez obtenemos la igualdad buscada

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(c^2 f''(x-ct) + c^2 f''(x+ct)\right) = c^2\frac{1}{2}\left(f''(x-ct) + f''(x+ct)\right) = c^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x}.$$

35. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva. Calcula $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$. Aplica la fórmula obtenida para el caso concreto $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

Solución: Usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

o usando la notación usual de derivada para funciones de una sola variable

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))$$

Para el ejemplo tendremos

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\operatorname{sen} t \\ y'(t) &= \cos t \\ z'(t) &= 0 \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

Usando el resultado obtenido

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = -\operatorname{sen}(t)\, 2\cos(t) + \cos(t)\, 2\operatorname{sen}(t) + 0 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

El resultado se obtiene de la misma forma si hacemos la composición

$$f\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) = \left(x\left(t\right)\right)^2 + \left(y\left(t\right)\right)^2 + \left(z\left(t\right)\right)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1^2 = 2$$

es decir constante sobre la curva y por tanto, como antes:

$$\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = 0.$$

©Silvestre Paredes Hernández®