

1. Determina si las siguientes aplicaciones $f : V \rightarrow W$, son o no lineales.

- a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$.
 b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $g(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$.
 c) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 + y - 5x$.
 d) $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$ $f(x, y) = |x + y|$.

2. Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \rightarrow W$, una aplicación lineal. Demuestra los siguientes apartados:

- a) Si $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \subseteq V \implies f(S) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_m)\}$.
 b) Si $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ es base de $V \implies \text{Im}(f) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$.
 c) Si f es sobreyectiva $\implies \dim(W) \leq \dim(V)$.

3. ¿Existirá una aplicación lineal tal que $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (21, -3)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$ y $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$? ¿Y si fuera $f(1, 0, 1) = (0, 3)$?

4. Demuestra la ecuación de las dimensiones para aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces se cumple

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f).$$

5. Para las siguientes aplicaciones lineales $f : V \rightarrow W$ calcula tanto el núcleo como la imagen e indica las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

- a) $V = W = \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$.
 b) $V = W = \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + 2z)$.
 c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^4$ $f(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$.
 d) $V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^2$ $f(x, y, z, t) = (x - 3y + 8t, 2x)$.
 e) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ $f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.
 f) $V = W = \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, z)$.

6. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la matriz asociada a f respecto de la base

$$B' = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}.$$

7. Se considera la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que cumple que

$$f(1, 0) = (2, 3 - 1) \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (0, -2, 3)$$

Dadas bases respectivas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

$$B = \{(-1, 2); (3, 0)\}$$

$$B' = \{(0, 0, -1); (0, 2, 1); (-1, 1, 4)\},$$

se pide obtener las matrices asociadas siguientes

$$(a) M_{C_2 \rightarrow C_3}(f) \quad (b) M_{B \rightarrow C_3}(f) \quad (c) M_{C_2 \rightarrow B'}(f)$$

siendo C_2 la base canónica de \mathbb{R}^2 y C_3 la base canónica de \mathbb{R}^3 .

8. Supongamos que tenemos una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica C_3 y en el segundo una base B . Supongamos que

$$M_{C_3 \rightarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $\vec{v} = (2, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ halla $f(\vec{v})_B$. Halla los posibles $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\vec{w})_B = (2, 4)$.

9. Consideremos en \mathbb{R}^3 la base

$$B = \{\vec{v}_1 = (-2, 1, 1); \vec{v}_2 = (1, -1, 0); \vec{v}_3 = (3, 2, -4)\}$$

y el endomorfismo f tal que

$$M_{B \rightarrow B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b-1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $f(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

a) Justifica que $a = 2, b = 3$ y $c = -2$.

b) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.

c) Calcula $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

10. Consideremos en \mathbb{R}^3 la base

$$B = \{\vec{v}_1 = (1, -1, 0); \vec{v}_2 = (0, 1, -1); \vec{v}_3 = (1, 0, 1)\}$$

y en \mathbb{R}^2 la base

$$B' = \{\vec{w}_1 = (-1, 1); \vec{w}_2 = (-1, 0)\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B \rightarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) La matriz de la aplicación f respecto de las bases canónicas respectivas.

b) La expresión analítica de dicha aplicación.

c) Calcula $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$ y bases para estos subespacios.

d) ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

11. Determina un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 que verifique $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ y $f(0, 1, 1) = (2, 1, -1)$.

12. Determina un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 que verifique $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0; x + z = 0\}$ e $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

13. Determina la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:

a) En \mathbb{R}^3 la proyección ortogonal de base $U = \{(1, 1, 0); (0, 1, -1)\}$.

b) En \mathbb{R}^3 la simetría ortogonal de base $W = \{(1, 0, 1); (1, 0, -1)\}$.

14. Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ y $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y en el segundo la base $B' = \{1, x, x^2\}$. Se pide:

a) **Matriz de la derivada.** Consideremos la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

$$\begin{aligned} D: \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] &\rightarrow \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] \\ p(x) &\mapsto D(p)(x) = p'(x). \end{aligned}$$

Comprueba que D es una aplicación lineal y que la matriz asociada a D en las bases B y B' es

$$M_{B' \rightarrow B}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) **Matriz de la integral.** Consideremos ahora la aplicación que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

$$\begin{aligned} I: \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] &\rightarrow \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \\ p(x) &\mapsto I(p)(x) = \int_0^x p(t) dt. \end{aligned}$$

Comprueba que I es una aplicación lineal y que la matriz asociada a I en las bases B' y B es

$$M_{B \rightarrow B'}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Calcula $\ker D$ y $\ker I$.

d) Comprueba que $M_{B \rightarrow B'}(D) \cdot M_{B' \rightarrow B}(I) = I_3$, con I_3 la matriz identidad de $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Nótar que esta identidad matricial es una especie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: La derivada de la integral de una función $f(x)$ es ella misma, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

15. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven, cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Las tres últimas transformaciones se representan matemáticamente, en el espacio tridimensional, por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

■ **Cambio de escala** (Scaling o Rescaling en inglés):

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) &\mapsto S(\vec{v}) := (c_1 v_1, c_2 v_2, c_3 v_3) \end{aligned}$$

con $c_k > 0$, $1 \leq k \leq 3$. Calcula la matriz asociada a S en la base canónica de \mathbb{R}^3 .

■ **Rotación:** una rotación en el plano de ángulo θ se puede realizar por medio de la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano YZ ?

- **Proyección:** en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen. En la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y otro vector fijo $\vec{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, la proyección de cualquier vector tridimensional $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano de ecuación $n_1x + n_2y + n_3z = v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3$ se calcula multiplicando el vector de coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ por la matriz 4×4 (llamada de proyección)

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & \vec{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - \vec{n} \cdot \vec{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & -\vec{v}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la proyección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano XY se puede calcular mediante el procedimiento anterior.

- Aunque en principio, una translación es fácil de entender, sin embargo no es una aplicación lineal. En efecto, comprueba que si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación

$$T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \mapsto T_{\vec{a}}(\vec{v}) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3),$$

no es lineal. Por tanto, una translación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz 3×3 . Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la translación de vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se calculará por medio de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para ello hay que considerar las llamadas coordenadas homogéneas de un vector \vec{v} , definidas como

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \vec{v}_h = (v_1, v_2, v_3, 1).$$

Demuestra que.

$$T_{\vec{a}_h}(\vec{v}_h) = \vec{a}_h + \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluciones:

1. (a) Sí. (b) No. (c) No. (d) No.
2. (a) Se usa la definición de imagen. (b) Se usa la imagen de una base de mV. (c) Usando la imagen de una base de V como sistema generador de $\text{Im } f$
3. No. Sí.
4. Teoría.
5. (a) $\ker(f) = \langle (1, -1, 0) \rangle$, $\text{Im}(f) = \langle (0, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle$, no inyectiva, no sobreyectiva. (b) $\ker(g) = \langle 0 \rangle$, $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$, biyectiva. (c) $\ker(h) = \langle 0 \rangle$, $\text{Im}(h) = \langle \{(0, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\} \rangle$, inyectiva, no sobreyectiva. (d) $\ker(k) = \langle \{(0, 0, 1, 0), (0, \frac{8}{3}, 0, 1)\} \rangle$, $\text{Im}(k) = \mathbb{R}^2$, no inyectiva, sobreyectiva. (e) $\ker(l) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$, $\text{Im}(l) = \langle (1, 0) \rangle$, no inyectiva, no sobreyectiva. (f) $\ker(m) = \langle (1, -1, 0) \rangle$, $\text{Im}(m) = \langle (1, 1, 0), (1, -1, 1) \rangle$, no inyectiva, no sobreyectiva.

$$6. M_{B' \rightarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. $M_{C_2 \rightarrow C_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, M_{B \rightarrow C_3}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -7 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, M_{C_2 \rightarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} -9/2 & -4 \\ 5/2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

8. $f(\vec{v})_B = (3, 0), f^{-1}(w) = \{(\alpha, \alpha - 2, \alpha + 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$

9. **(a)** Expresar $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ y $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ en coordenadas de la base B y aplicar linealidad. **(b)** $M_{C_3 \rightarrow C_3}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}; f(x, y, z) = (6x + y + 6z, 4x + 4z, 8x + y + 8z)$ **(c)** $\ker f = \langle \{(1, 0, -1)\} \rangle; \text{Im } f = \langle \{(3, 2, -4), (-1, 0, 1)\} \rangle.$ **(d)** No inyectiva, no sobreyectiva.

10. **(a)** $M_{C_3 \rightarrow C_2}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$ **(b)** $f(x, y, z) = (\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z).$ **(c)** $\ker f = \langle \{(0, -3, 1)\} \rangle; \text{Im } f = \langle \{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}); (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})\} \rangle.$ **(d)** No inyectiva, sobreyectiva.

11. La solución no es única, una podría ser: $M_{B \rightarrow B}f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

12. La solución no es única una podría ser $M_{C \rightarrow C}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

13. **(a)** $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$ **(b)** $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

14. **(a)** Se obtiene derivando cada polinomio de $B = \{1, x, x^2, x^3\}.$ Se obtiene integrando cada polinomio de $B' = \{1, x, x^2\}.$ **(b)** $\ker D = \langle \{(a, 0, 0, 0)\} \rangle, \ker I = \{0\}.$ **(c)** Multiplicar las dos matrices.

15. **(a)** $M_{C_3 \rightarrow C_3}(S) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$ **(c)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ **(d)** No

lineal. Multiplicar la matriz por el vector.