industriales
etsii UPCT

1. Dados los números complejos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$, realiza las siguientes operaciones:

   a) Halla sus módulos y argumentos

   b) Calcula

$$\text{(i) } \overline{z_1} + 6z_2 \quad \text{(ii) } 3z_1\overline{z_2} \quad \text{(iii) } z_1\,|z_2|\,i \quad \text{(iv) } z_1^3 \quad \text{(v) } \frac{2z_2}{-z_1}$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |1-i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\\
\theta_{z_1} &= \arctan\left(-\frac{1}{1}\right) = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.\\
|z_2| &= \left|4 + 4\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8,\\
\theta_{z_2} &= \arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

b)

$$\text{(i) } \overline{z_1} + 6z_2 = \overline{(1-i)} + 6\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = 25 + \left(1 + 24\sqrt{3}\right)i.$$

$$\text{(ii) } 3z_1\overline{z_2} = 3(1-i)\,\overline{\left(4+4\sqrt{3}i\right)} = 3(1-i)\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) = 12\left(1-\sqrt{3}\right) - 12\left(1+\sqrt{3}\right)i.$$

$$\text{(iii) } z_1\,|z_2|\,i = (1-i)\left|4 + 4\sqrt{3}i\right| i = 8 + 8i.$$

$$\text{(iv) } z_1^3 = (1-i)^3 = -2 - 2i.$$

$$\text{(v) } \frac{2z_2}{-z_1} = \frac{2\left(4+4\sqrt{3}i\right)}{-(1-i)} = 4\left(\sqrt{3}-1\right) - 4\left(\sqrt{3}+1\right)i.$$

2. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

$$\text{a) } z_1 + z_2 \quad \text{b) } 3z_1 - 2z_2 \quad \text{c) } z_1z_2 \quad \text{d) } (z_2)^{-1} \quad \text{e) } \frac{z_1}{z_2}$$

Solución:

a) $z_1 + z_2 = (2+i) + (3-2i) = 5 - i.$ b) $3z_1 - 2z_2 = 3(2+i) - 2(3-2i) = 7i.$

c) $z_1z_2 = (2+i)(3-2i) = 8 - i.$ d) $(z_2)^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{(3-2i)} = \frac{(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$

e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$

3. Determina los valores de x e y para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy)=i$.

Solución: Hacemos el producto

$$(1+i)(x+iy)=(x-y)+i(x+y)=i,$$

Igualando partes reales e imaginarias se obtiene un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=\frac{1}{2} \Longrightarrow \text{Solución: } \boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}.$$

4. Calcula el módulo de los números complejos:

a) $3+4i$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) i^7+i^{10} d) $1+i+i^2$

Solución:

a) $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$

b) $\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|=\dfrac{|1+i|}{|1-i|}=\dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$

c) $i^7+i^{10}=i^7\left(1+i^3\right)=i^7(1-i)\Rightarrow\left|i^7(1-i)\right|=\left|i^7\right|\cdot|(1-i)|=|i|^7\cdot|(1-i)|=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

d) $1+i+i^2=i\Rightarrow|i|=1.$

5. Expresa en forma polar o exponencial los siguientes números complejos:

a) $2i$ b) $-3i$ c) -1 d) 3 e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

f) $-3+i\sqrt{3}$ g) $\frac{1+i}{1-i}$ h) i^7+i^{10} i) $3+3i$ j) $1+i+i^2$

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{r} |2i|=\sqrt{(0)^2+(2)^2}=2 \\ \theta=\arctan\left(\dfrac{2}{0}\right)=\arctan\infty=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2i=2e^{i\pi/2}.$$

.

b)

$$\left.\begin{array}{r} |-3i|=\sqrt{(0)^2+(-3)^2}=3 \\ \theta=\arctan\left(\dfrac{-3}{0}\right)=\arctan-\infty=-\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -3i=3e^{-i\pi/2}.$$

.

c)

$$\left.\begin{array}{r}|-1|=\sqrt{(-1)^2+(0)^2}=1\\ \theta=\arctan\left(-\dfrac{0}{1}\right)=\arctan 0=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -1=e^{i\pi}$$

d)

$$\left.\begin{array}{r}|3|=\sqrt{(3)^2+(0)^2}=3\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{0}{3}\right)=\arctan 0=2\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 3=3e^{i2\pi}.$$

e)

$$\left.\begin{array}{r}\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\pi/4}.$$

f)

$$\left.\begin{array}{r}\left|-3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-3}\right)=\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow -3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i5\pi/6}.$$

g)

$$\left.\begin{array}{r}\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|=\dfrac{|1+i|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\\ \theta=\theta_1-\theta_2=\arctan 1-\arctan(-1)=\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{1+i}{1-i}=e^{i\pi/2}.$$

h)

$$\left.\begin{array}{r}\left|i^7+i^{10}\right|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{-1}{-1}\right)=\arctan 1=\dfrac{5\pi}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow i^7+i^{10}=-1-i=\sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

i)

$$\left.\begin{array}{r}|3+3i|=\sqrt{(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{2}\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{3}{3}\right)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow 3+3i=3\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

j)

$$\left.\begin{array}{r}\left|1+i+i^2\right|=|i|=\sqrt{(0)^2+(1)^2}=1\\ \theta=\arctan\left(\frac{1}{0}\right)=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow i=e^{i\pi/2}.$$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(1+i)^3$ b) $\frac{2+3\,i}{3-4\,i}$ c) i^5+i^{16} d) $1+i+i^2+i^3$ e) $\dfrac{1}{i}$

f) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ g) $2_{\pi/2}$ h) $1_{\pi/4}$ i) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ j) $(2+2i)^2$

k) $(2-2i)^2$ l) $(2+2i)\,(2-2i)$ m) $e^{-i\pi/2}$ n) $2e^{-i\pi}$ o) $3e^{-i\pi/2}$

p) $2e^{-i\pi/4}$ q) $i+3e^{i2\pi}$ r) $e^{i\pi/4}-2e^{-i\pi/4}$ s) $\frac{1}{e^{-i\pi/4}}$ t) $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

Solución:

a) En forma binómica

$$(1+i)^3 = 1^3+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$$

En forma polar

$$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2i$$

b)

$$\frac{2+3\,i}{3-4\,i} = \frac{(2+3i)\,(3+4i)}{(3-4i)\,(3+4i)} = \frac{6+8i+9i+12i^2}{9+16} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$$

c)

$$i^5+i^{16} = i^4 i+\left(i^4\right)^4 = i+1$$

d)

$$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1+i^2 i = 1+i-1-i = 0$$

e)

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

f) En forma binómica

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = 1+3i\sqrt{3}+3\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3 = 1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i = -8$$

En forma polar

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^3 = 2^3e^{i\pi} = 8e^{i\pi} = -8$$

g)

$$2_{\pi/2} = 2e^{i\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\,(0+i) = 2i$$

h)

$$1_{\pi/4} = e^{i\pi/4} = \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i)

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^1} = -\frac{2i}{2} = -i$$

j)

$$(2+2i)^2 = 2^2 + 8i + (2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$$

k)

$$(2-2i)^2 = \left(\overline{2+2i}\right)^2 = \overline{(2+2i)^2} = \overline{8i} = -8i$$

l)

$$(2+2i)(2-2i) = 2^2 - (2i)^2 = 4 - (-4) = 8$$

m)

$$e^{-i\pi/2} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$$

n)

$$2e^{-i\pi} = 2\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = 2\left(\cos\pi - i\sin\pi\right) = -2$$

ñ)

$$3e^{-i\pi/2} = 3(-i) = -3i$$

o)

$$2e^{-i\pi/4} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$

p)

$$i + 3e^{i2\pi} = i + 3\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = i + 3$$

q)

$$\begin{aligned}
e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= -\cos\frac{\pi}{4} + i3\sin\frac{\pi}{4} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i3\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

r)

$$\frac{1}{e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

s)

$$\sqrt{2}e^{i\pi/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

7. Representa gráficamente los conjuntos dados por las expresiones siguientes:

a) $\vert z\vert \le 1$	b) $z+\overline{z} \ge \vert z\vert^2$	c) $z+\overline{z} \le 1$	d) $z-\overline{z} = i$
e) $\mathrm{Im}\,(z) < 0$	f) $\vert\mathrm{Re}\,(z)\vert < 1$	g) $\mathrm{Re}\,(z)+\mathrm{Im}\,(z) = z\overline{z}$	h) $\vert z\vert^{-1} \le 1,\ (z \ne 0)$
i) $\vert z-5i\vert = 8$	j) $\mathrm{Im}\left(z^2\right) > 2$	k) $\mathrm{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$	l) $\mathrm{Re}\left(z^2-z\right) = 0$
m) $\vert z-1\vert = \vert 1-2\overline{z}\vert$	n) $2 < \vert z\vert < 3$	o) $\left\vert\dfrac{z-1}{z+1}\right\vert \le 1$	p) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

Solución: Usaremos el hecho de que

$$z = x+iy;\quad \overline{z} = x-iy;\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2};\quad \mathrm{Re}\,(z) = x;\quad \mathrm{Im}\,(z) = y$$

a)

$$|z| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 1$$

Ecuación del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.

b)

$$z+\overline{z} \ge |z|^2 \Leftrightarrow (x+iy)+(x-iy) \ge x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$$

Ecuación del círculo de centro $(1,0)$ y radio 1.

c)

$$z+\overline{z} \le 1 \Leftrightarrow (x+iy)+(x-iy) \le 1 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$$

Semiplano a la izquierda de abcisa $\frac{1}{2}$.

d)

$$z-\overline{z} = i \Leftrightarrow (x+iy)-(x-iy) = i \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Recta horizontal $\left(x,\frac{1}{2}\right)$.

e)

$$\mathrm{Im}\,(z) < 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Semiplano abierto de ordenadas negativas.

f)

$$|\mathrm{Re}\,(z)| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Banda vertical simétrica de anchura 2.

g)

$$\mathrm{Re}\,(z)+\mathrm{Im}\,(z) = z\overline{z} \Leftrightarrow x+y = x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Ecuación de la círcunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

h) Suponiendo $z \neq 0$

$$|z|^{-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq 1 \Leftrightarrow |z| \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 1$$

Exterior del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.

i)

$$|z-5i| = 8 \Leftrightarrow |x+(y-5)\,i| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-5)^2} = 8 \Leftrightarrow x^2+(y-5)^2 = 64$$

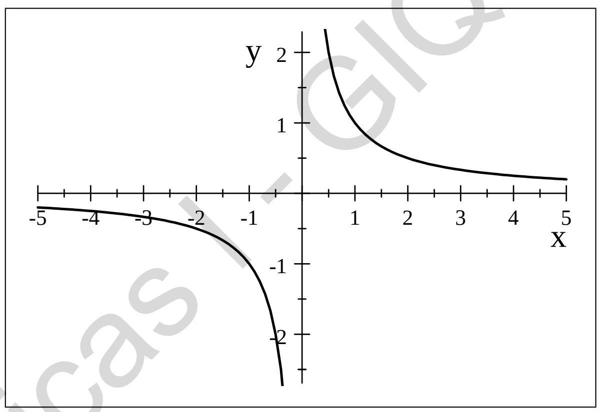
Ecuación de la circunferencia de centro $(0,5)$ y radio 8.

j)

$$\operatorname{Im}\left(z^2\right) > 2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\left(x^2-y^2\right)+i2xy\right) > 2 \Leftrightarrow xy > 1$$

La frontera del conjunto es la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$

$$y > \frac{1}{x}$$



k)

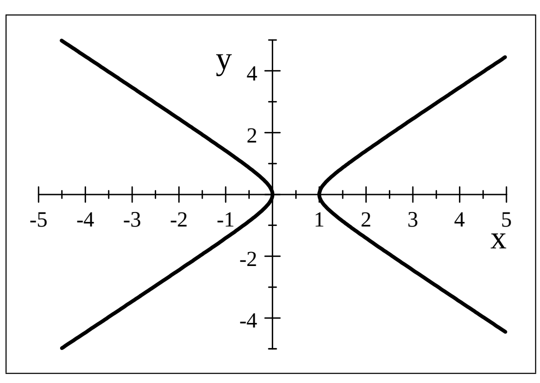
$$\operatorname{Re}\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x = x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Ecuación de la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

l)

$$\operatorname{Re}\left(z^2-z\right) = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2-x = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/4} = 1$$

Ecuación de la hipérbola centrada en $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y semiejes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.



m)

$$\begin{aligned}
|z-1| &= |1-2\overline{z}| \Leftrightarrow |(x-1)+iy| = |(1-2x)+i2y| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(1-2x)^2+(2y)^2} \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = (1-2x)^2+(2y)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 1+4x^2-4x+4y^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = 3x^2-2x+3y^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = 3\left(x^2-2\frac{1}{3}x+y^2\right) \\
&\Leftrightarrow 0 = \left(x^2-2\frac{1}{3}x+y^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2 = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{3},0\right)$ y radio $\frac{1}{3}$.

n)

$$2<|z|<3 \Leftrightarrow 4<x^2+y^2<9$$

Anillo (o corona circular) de centro $(0,0)$ y radios 2 y 3.

ñ) Notar que en este caso $z \neq -1$

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |z-1| \leq |z+1| \Leftrightarrow |z-1|^2 \leq |z+1|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \leq (x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Semiplano a la derecha de la abcisa $x=0$.

o)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, menos el punto $(0,0)$, ya que no tiene inverso.

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(1+i)^{100}$ b) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{30}$ c) $\left(\sqrt{1-i}\right)^{10}$ d) $\dfrac{1}{(1-i)^5}$

Solución:

a)

$$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{100} = \left(\sqrt{2}\right)^{100} e^{i\pi 25} = 2^{50}e^{i\pi} = -2^{50} = 1125\,899\,906\,842\,624$$

b)

$$
\begin{aligned}
|z| &= \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\
\theta &= \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{30} = \left(2e^{i2\pi/3}\right)^{30} = 2^{30}e^{i20\pi} = 2^{30} = 1073741824
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{1-i}\right)^{10} &= (1-i)^{10/2} = (1-i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^5 = 2^{5/2}e^{-i5\pi/4} = 2^{5/2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= 2^{5/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4+4i
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-i)^5} &= \left(\frac{1}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^{5/2}}e^{i5\pi/4} = \frac{1}{2^{5/2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2^{5/2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8} - i\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

9. Deduce una fórmula para calcular cualquier potencia de i^n con $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Para las 5 primeras potencias tenemos

n	i^n
0	$i^0 = 1$
1	$i^1 = i$
2	$i^2 = -1$
3	$i^3 = i^2 i = -i$
4	$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

y comprobamos que los resultados se repiten cada 4 unidades imaginarias. Por tanto si hacemos la división eculídea de la potencia n entre 4

$$
n = 4c + r
$$

donde el r, el resto, es un número que está en $\{0,1,2,3\}$, luego

$$
i^n = i^{4c+r} = \left(i^4\right)^c i^r = 1^c i^r = i^r
$$

es decir, i^n tiene el mismo valor que i^r con r el resto de la división por 4 de n. Por ejemplo

$$
i^{741} = i^{185*4+1} = i^1 = i
$$

$$
I^{48546} = i^{12136*4+2} = i^2 = -1
$$

10. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[6]{-8}$ d) $\sqrt[4]{-1}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[4]{-81}$ g) $\sqrt{1-i}$

h) $\sqrt{3+3i}$ i) $\sqrt[3]{-2+2i}$ j) $\sqrt[3]{-1+i}$ k) $\sqrt[4]{-8\left(1-\sqrt{3}i\right)}$ l) $\sqrt[4]{1}$ m) $\sqrt[6]{1}$ n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

Solución:

$$\text{a) } \sqrt[3]{1} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i2\pi/3} & = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = e^{i4\pi/3} & = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{i} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = e^{i\pi/6} & = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ w_1 = e^{i5\pi/6} & = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_2 = e^{i9\pi/6} & = -i \end{cases}$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{-8} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 8 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} & = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} & = \sqrt{2}i \\ w_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} & = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/6} & = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_4 = \sqrt{2}e^{i3\pi/2} & = -\sqrt{2}i \\ w_5 = \sqrt{2}e^{i11\pi/6} & = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{-1} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = e^{i\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_1 = e^{i3\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_2 = e^{i5\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ w_3 = e^{i7\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

e) $\sqrt[8]{1} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ w_2 = e^{i\pi/2} & = i \\ w_3 = e^{i3\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ w_4 = e^{i\pi} & = -1 \\ w_5 = e^{i5\pi/4} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ w_6 = e^{i3\pi/2} & = -i \\ w_7 = e^{i7\pi/4} & = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{cases}$

f) $\sqrt[4]{-81} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 81 \\ \theta = \pi \end{cases} \quad \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} w_0 = 3e^{i\pi/4} & = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ w_1 = 3e^{i3\pi/4} & = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ w_2 = 3e^{i5\pi/4} & = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i \\ w_3 = 3e^{i7\pi/4} & = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i \end{cases}$

g) $\sqrt{1-i} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/8} & = \sqrt[4]{2} \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) \\ w_1 = \sqrt[4]{2} e^{i7\pi/8} & = \sqrt[4]{2} \left(-\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) \end{cases}$

h) $\sqrt{3+3i} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 3\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2} e^{i\pi/8} & = \sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) \\ w_1 = \sqrt{3}\sqrt[4]{2} e^{i9\pi/8} & = -\sqrt{3}\sqrt[4]{2} \left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right) \end{cases}$

i) $\sqrt[3]{-2+2i} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} & = 1 + i \\ w_1 = \sqrt{2} e^{i11\pi/12} & = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} i \\ w_2 = \sqrt{2} e^{i19\pi/12} & = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} i \end{cases}$

j) $\sqrt[3]{-1+i} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/4} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i\pi/4} & = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+i\right) \\ w_1 = \sqrt[6]{2}e^{i11\pi/12} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i11\pi/12} & = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i\right) \\ w_2 = \sqrt[6]{2}e^{i19\pi/12} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}e^{i19\pi/12} & = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) \end{cases}$

k) $\sqrt[4]{-8\left(1-\sqrt{3}i\right)} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 16 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 2e^{i\pi/6} & = \sqrt{3}+i \\ w_1 = 2e^{i2\pi/3} & = -1+i\sqrt{3} \\ w_2 = 2e^{i7\pi/6} & = -\sqrt{3}-i \\ w_3 = 2e^{i5\pi/3} & = 1-i\sqrt{3} \end{cases}$

l) $\sqrt[4]{1} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/2} & = i \\ w_2 = e^{i\pi} & = -1 \\ w_3 = e^{i3\pi/2} & = -i \end{cases}$

m) $\sqrt[6]{1} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 & = 1 \\ w_1 = e^{i\pi/3} & = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = e^{i2\pi/3} & = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = e^{i\pi} & = -1 \\ w_4 = e^{i4\pi/3} & = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_5 = e^{i5\pi/3} & = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

n) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \\ \theta = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/6} & = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) \\ \\ w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i2\pi/3} & = \sqrt[4]{2}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \\ w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i7\pi/6} & = \sqrt[4]{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) \\ \\ w_3 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/3} & = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$

Para calcular las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{12}$ se utilizan las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}};$$

luego

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/6}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/6}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

11. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{R}$:

a) $z^2+1=0$ b) $z^3+2=0$ c) $z^5+64=0$ d) $(z^2+4)(z-1)^2=0$

Solución:

a) $z^2+1=0 \Longleftrightarrow z=\sqrt{-1} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = i \\ \\ z_2 = -i \end{cases}$

b) $z^3+2=0 \Longleftrightarrow z=\sqrt[3]{-2} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} & = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \\ w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} & -\sqrt[3]{2} \\ w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/3} & = -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \end{cases}$

c) $z^5+64=0 \Longleftrightarrow z=\sqrt[5]{-64} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} w_0 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi/5} \\ \\ w_1 = 2\sqrt[5]{2}e^{i3\pi/5} \\ \\ w_2 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi} \\ \\ w_3 = 2\sqrt[5]{2}e^{i7\pi/5} \\ \\ w_4 = 2\sqrt[5]{2}e^{i9\pi/5} \end{cases}$

d) $(z^2+4)(z-1)^2=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{-4} \\ z=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1=2i \\ z_2=-2i \\ z_3=1 \\ z_4=1 \end{cases}$

:

12. Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{C}$:

a) $z^2-(2+i)\,z+(9+i)=0$ b) $z^2-2\,(2-i)\,z+3\,(1-2i)=0$ c) $z^4+64=0$

Solución:

a) $z^2-(2+i)\,z+(9+i)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} w_0=1+i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \\ w_1=1+i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \end{cases}$

b) $z^2-2\,(2-i)\,z+3\,(1-2i)=0 \Longleftrightarrow z=\begin{cases} w_0=3 \\ w_1=1-2i \end{cases}$

c) $z^4+64=0 \Longleftrightarrow z=\sqrt[4]{-64} \Longleftrightarrow \begin{cases} w_0=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}=2+2i \\ w_1=2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}=-2+2i \\ w_2=2\sqrt{2}e^{i5\pi/4}=-2-2i \\ w_3=2\sqrt{2}e^{i7\pi/4}=2-2i \end{cases}$

13. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $(1+i)^{2/3}$ b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/4}$

Solución:

a) $(1+i)^{2/3}=\sqrt[3]{(1+i)^2}=\sqrt[3]{2i} \Rightarrow \begin{cases} w_0=\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} : \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right) \\ w_1=\sqrt[3]{2}e^{i5\pi/6}=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ w_2=\sqrt[3]{2}e^{i3\pi/2}=-i\sqrt[3]{2} \end{cases}$

b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3/4} = \sqrt[4]{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3} = \sqrt[4]{-8} = \sqrt[4]{8}\sqrt[4]{-1} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ \\ w_1 = \sqrt[4]{8}e^{i3\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ \\ w_2 = \sqrt[4]{8}e^{i5\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ \\ w_3 = \sqrt[4]{8}e^{i7\pi/4} = \sqrt[4]{8}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \end{cases}$

14. Utiliza la fórmula de Moivre para obtener $\cos(3x)$ y $\operatorname{sen}(3x)$ en función de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$. ¿Cuál será la relación para $\cos(4x)$ y $\operatorname{sen}(4x)$?

Solución: La fórmula de Moivre es

$$\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} (\cos x + i\operatorname{sen} x)^3 &= \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \\ \cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i\operatorname{sen} x) + 3\cos x\,(i\operatorname{sen} x)^2 + (i\operatorname{sen} x)^3 &= \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \\ \left(\cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x\right) &= \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x \\ \operatorname{sen}(3x) &= 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

Para $n = 4$

$$\begin{aligned} (\cos x + i\operatorname{sen} x)^4 &= \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x \\ \cos^4 x + 4\cos^3 x\,(i\operatorname{sen} x) + 6\cos^2 x\,(i\operatorname{sen} x)^2 + 4\cos x\,(i\operatorname{sen} x)^3 + (i\operatorname{sen} x)^4 &= \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x \\ \left(\cos^4 x - 6\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x\right) + i\left(4\cos^3 x \operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen}^3 x\right) &= \cos 4x + i \operatorname{sen} 4x \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \cos^4 x - 6\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x \\ \operatorname{sen}(4x) &= 4\cos^3 x \operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

15. Resuelve: $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Solución: Si $z = 0$, entonces se cumple la igualdad para cualquier valor de $n \geq 1$, ya que

$$\overline{0} = 0^{n-1}$$

Buscamos soluciones no nulas, es decir, suponemos $z \neq 0$ y por tanto se puede expresar en forma exponencial como

$$z = |z| \, e^{i\theta}$$

con $\theta \in \arg(z)$. Sabemos que en ese caso

$$\begin{aligned} \overline{z} &= |z| \, e^{-i\theta} \\ z^{n-1} &= |z|^{n-1} \, e^{i(n-1)\theta} \end{aligned}$$

y la ecuación queda como

$$|z| \, e^{-i\theta} = |z|^{n-1} \, e^{-i(n-1)\theta}$$

Como es una igualdad de complejos en forma polar, los módulos deben coincidir

$$|z| = |z|^{n-1},$$

y dividiendo por $|z|$

$$1 = |z|^{n-2}.$$

Como $n \neq 2 \Rightarrow n - 2 \neq 0$, debe ocurrir

$$|z| = 1.$$

Para los argumentos debe ocurrir que estén en el mismo conjunto de argumentos, es decir, $-\theta$ y $(n-1)\,\theta$ deben diferir en un múltiplo entero de 2π

$$(n-1)\,\theta = -\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

de donde obtenemos

$$n\theta = 2k\pi$$

y despejando θ

$$\theta = \frac{2k\pi}{n},$$

y las soluciones para cada $n \neq 2$ son las raíces n–ésimas de la unidad

$$w_k = e^{i2k\pi/n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sólo es necesario considerar n valores consecutivos de k, por ejemplo, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ya que, en este caso para el siguiente valor, que sería n, tenemos

$$w_n = e^{i2n\pi/n} = e^{i2\pi} = e^{i0} = w_0.$$

Veamos ahora el caso $n = 2$.

$$\overline{z} = z^{2-1} \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$
