SEGUNDO PARCIAL (Q2)

1. Halla el polinomio de Taylor de orden 3 de la función

$$f(x) = \frac{x+6}{x+1}$$

en el punto $x_0 = 2$, acotando el resto en el intervalo $[1,2]$.

Solución: Expresaremos la función de una forma más manejable para el cálculo de las sucesivas derivadas

$$f(x) = \frac{x+6}{x+1} = \frac{x+1+5}{x+1} = 1 + \frac{5}{x+1} = 1 + 5(x+1)^{-1}$$

Construiremos la tabla de derivadas hasta el orden $n = 3$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
0	$1+5(x+1)^{-1}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$
1	$-5(x+1)^{-2}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{9}$
2	$10(x+1)^{-3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{2!}\frac{10}{27} = \frac{5}{27}$
3	$-30(x+1)^{-4}$	$-\frac{30}{81}$	$-\frac{1}{3!}\frac{30}{81} = -\frac{5}{81}$

Finalmente el polinomio de Taylor pedido es:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{5}{9}(x-2) + \frac{5}{27}(x-2)^2 - \frac{5}{81}(x-2)^3 . \end{aligned}$$

Para acotar el resto de Lagrange es necesario calcular la cuarta derivada $f^{(4)}(x) = 120(x+1)^{-5}$ y evaluarla en un punto intermedio ξ entre x_0 y el punto x, donde se aplique el polinomio de Taylor:

$$R_3 f(x,2) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4 = \frac{120}{(\xi+1)^5\,4!}(x-2)^4 = 5\frac{(x-2)^4}{(\xi+1)^5},$$

para encontrar una cota de este resto, se tendrá en cuenta que $\xi, x \in [1,2]$. Por una parte y puesto que $(x-2)^4 \geq 0; \forall x$ y que $(\xi+1)^5$ para $\xi \in [1,2]$, podemos quitar las barras de valor absoluto y poner:

$$|R_3 f(x,2)| = \left| \frac{5(x-2)^4}{(\xi+1)^5} \right| = \frac{5(x-2)^4}{(\xi+1)^5}.$$

Ahora, por una parte la derivada de la función $\frac{1}{(\xi+1)^5}$ es

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{(\xi+1)^5}\right) = -\frac{5}{(\xi+1)^6} < 0,$$

es negativa $\forall\xi$ y por tanto decreciente, de modo que su máximo en $[1,2]$ se alcanzará en el extremo inferior así que

$$\frac{1}{(\xi+1)^5} \leq \frac{1}{(1+1)^5} = \frac{1}{2^5}; \forall\xi \in [1,2].$$

Por otro lado, la derivada de la función $(x-2)^4$ es $4(x-2)^5$ y como $x \in [1,2] \Rightarrow x < 2$ y por tanto $(x-2) < 0$, lo que supone que $(x-2)^5 < 0$, y por tanto este término también es decreciente y el máximo se alcanzará en el extremo inferior del intervalo, en $x = 1$

$$(x-2)^4 \leq (1-2)^4 = 1; \forall x \in [1,2]$$

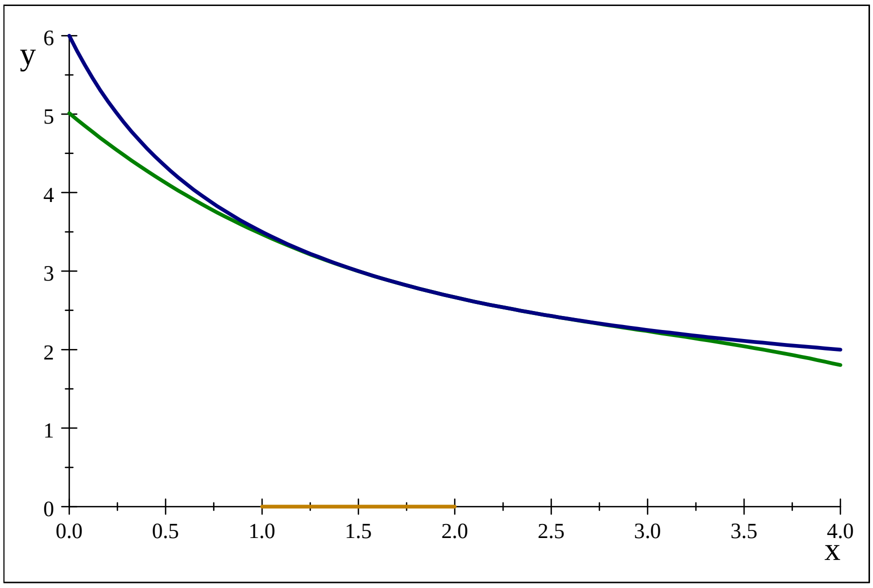
Usando ambas cotas en la expresión del resto:

$$|R_3 f(x,2)| = \frac{5(x-2)^4}{(\xi+1)^5} \leq \frac{5(1-2)^4}{2^5} = \frac{5}{2^5}.$$

Luego el máximo error que se cometerá en $[1,2]$ usando el polinommio de Taylor de orden 3 como aproximación de la función $f(x)$ es

$$|R_3 f(0)| < \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} = 0{,}15625.$$

Nota Adicional: En la siguiente gráfica vemos la proximidad entre la función y su polinomio dentro del intervalo $[1,2]$



$f(x)$ y $P_2 f(x)$ en el intervalo $[1,2]$ (en marrón).

2. Encuentra, si existe, el valor de la siguiente integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

Solución: Para buscar una primitiva de la función, primero hacemos un cambio de variable para eliminar la raíz

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Esta nueva integral se realiza por partes

$$\left.\begin{array}{c} u = t \\ \\ dv = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} du = dt \\ \\ v = \int \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} dt = \int 2t\left(1+t^2\right)^{-2} dt = \dfrac{\left(1+t^2\right)^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{1+t^2} \end{array}\right.$$

Sustituyendo

$$\int \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = t\left(-\frac{1}{1+t^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{t}{1+t^2} + \arctan t$$

Deshacemos el cambio para tener la primitiva en función de x

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+x\right)^2}dx = -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \arctan\sqrt{x}.$$

Para el cálculo de la integral impropia usamos su definición y la primitiva que acabamos de obtener:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\left(1+x\right)^2}dx &= \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{\sqrt{x}}{\left(1+x\right)^2}dx \\
&= \lim_{T\to\infty} -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \arctan\sqrt{x}\Big|_{x=1}^{x=T} \\
&= \lim_{T\to\infty} -\frac{\sqrt{T}}{1+T} + \arctan\sqrt{T} - \left(-\frac{\sqrt{1}}{1+1} + \arctan\sqrt{1}\right) \\
&= \left(\lim_{T\to\infty} -\frac{\sqrt{T}}{1+T} + \arctan\sqrt{T}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

El límite de la primera función se puede hacer por L'Hôpital (o directamente usando los términos de mayor grado en numerador y denominador)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{1+T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{T}}}{1} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{T}} = 0$$

Nota Adicional: Como alternativa, la integral también se podría hacer por el método de Hermite, realizando una descomposición de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} &= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{Ct+D}{1+t^2}\right) \\
&= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C\left(1+t^2\right) - 2t\left(Ct+D\right)}{\left(1+t^2\right)^2} \\
&= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{-Ct^2 - 2Dt + C}{\left(1+t^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(At+B\right)\left(1+t^2\right) - Ct^2 - 2Dt + C}{\left(1+t^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(At^3+Bt^2+At+B\right) - Ct^2 - 2Dt + C}{\left(1+t^2\right)^2} \\
&= \frac{At^3 + \left(B-C\right)t^2 + \left(A-2D\right)t + \left(B+C\right)}{\left(1+t^2\right)^2}
\end{aligned}$$

e igualando coeficientes entre numeradores, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
A &= 0 \\
(B-C) &= 2 \\
A-2D &= 0 \\
B+C &= 0
\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$A = 0; \qquad B = 1; \qquad C = 0; \qquad D = -1.$$

La descomposición buscada es

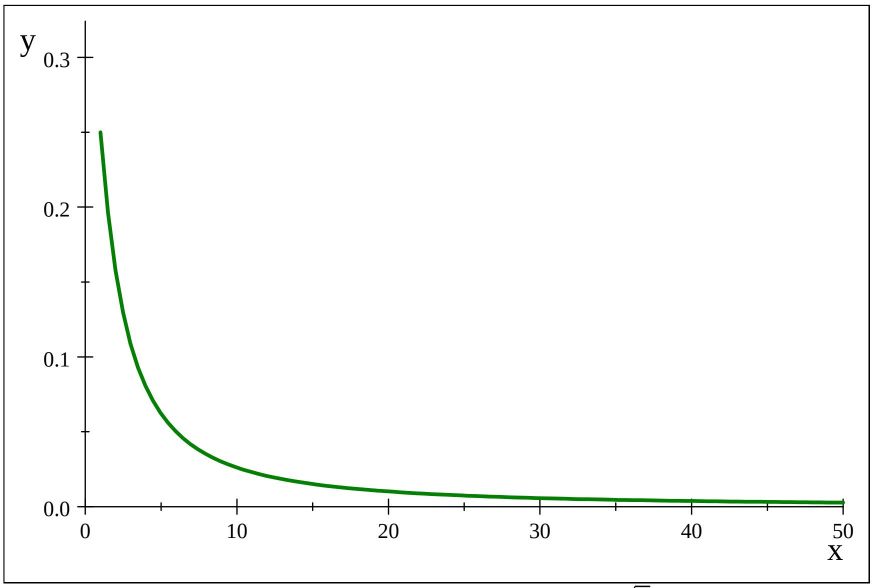
$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{1+t^2}\right),$$

e integrando respecto de t

$$\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt + \int \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{1+t^2}\right) dt = \arctan t - \frac{1}{1+t^2}.$$

Tal y como se ha encontrado antes.

En la siguiente gráfica vemos cómo la función se aproxima rápidamente al valor 0, ya que de otro modo no sería convergente.



Representación gráfica de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$.

3. Se considera la función

$$f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$$

   a) Determina y clasifica los puntos críticos de $f(x, y)$.

   b) Razona si $f(x, y)$ alcanza valores máximo y mínimo absolutos en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$. En caso afirmativo, encuéntralos.

Solución:

a) Recordemos la definición de punto crítico de una función real de varias variables

$$(x_0, y_0) \text{ es un punto crítico } \Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0,$$

y en este caso

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 24y = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -24x + 3y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) obtenemos

$$24x^2 = 24y \Leftrightarrow x^2 = y,$$

y si sustituimos el resultado en (2)

$-24x+3\left(x^2\right)^2=0 \Leftrightarrow -24x+3x^4=0 \Leftrightarrow 3x\left(x^3-8\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ o $x=2$ (las otras dos raíces son complejas)

Los valores para y serían

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow P_1=(0,0)\,, \\ \\ \text{Si } x &= 2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow P_2=(2,4)\,. \end{aligned}$$

Para clasificar estos puntos críticos se necesita el Hessiano de $f(x,y)$ en cada uno de ellos

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48x & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix}.$$

Para $P_1=(0,0)$

$$Hf(P_1)=\begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\Delta_1=0$ y $\Delta_2=-24^2<0$, no puede ser ni máximo, ni mínimo. Como en cualquier caso debe ocurrir $\Delta_2 \geq 0$, es un punto de silla.

Para $P_2=(2,4)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$$

Como $\Delta_1=96>0$ y $\Delta_2=96*24-24^2=(96-24)*24>0$, el punto P_2 es un mínimo relativo o local.

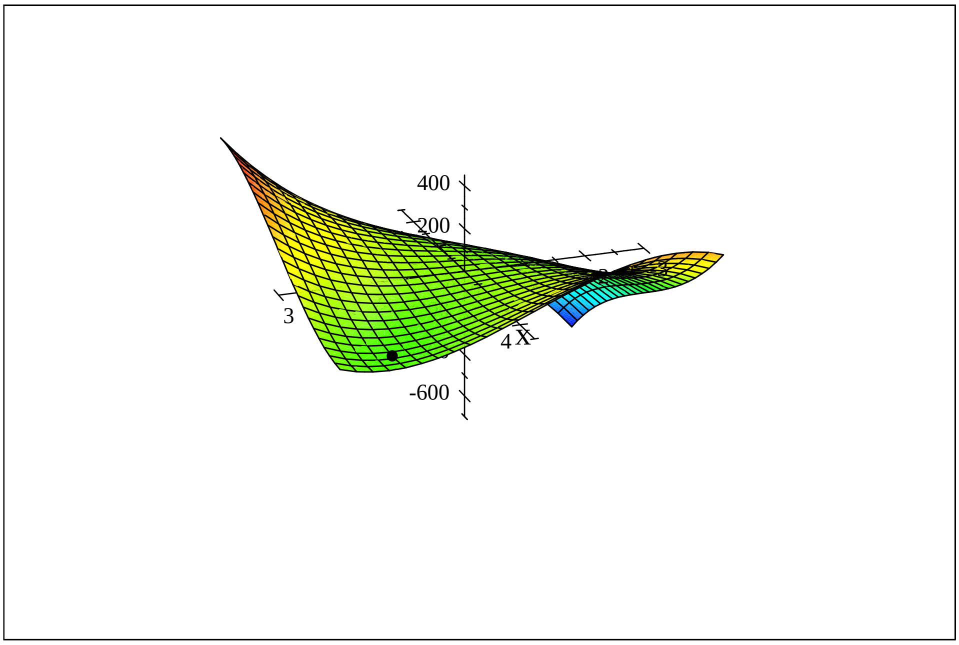
Nota Adicional: La función no tiene ni máximo global, ni mínimo global, puesto que si tomamos por ejemplo la recta $y=x$ y evaluamos los puntos sobre ella tendremos

$$f(x,x)=8x^3-24x^2+x^3=9x^3-24x^2=x^2(9x-24)$$

y por tanto

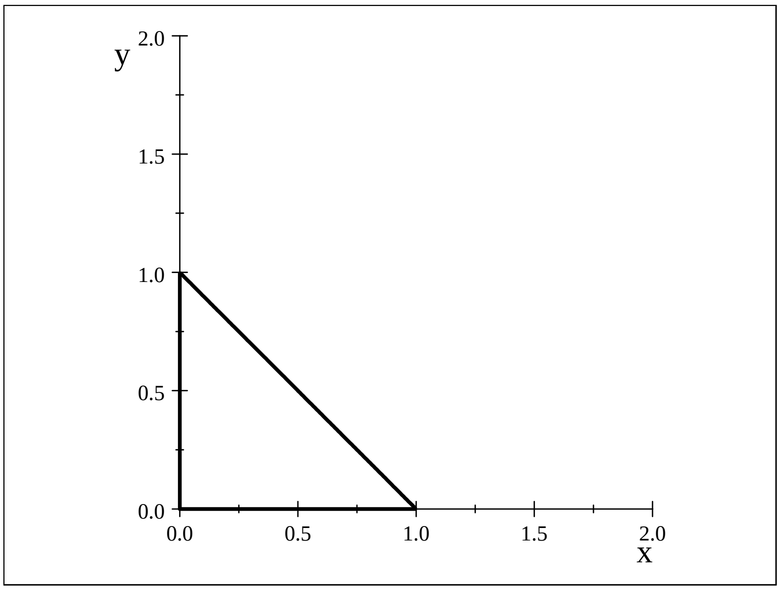
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x,x) &= \infty \\ \\ \lim_{x\to-\infty} f(x,x) &= -\infty \end{aligned}$$

lo que indica que la función puede tomar valores por encima y por debajo de cualquier valor.



$8x^3-24xy+y^3$ en el rango $[-3,3]\times[-5,5]$. En negro el punto $P_2=(2,4)$ de mínimo relativo.

b) Representamos gráficamente el triángulo



Triángulo de vértices $(0,0)-(1,0)-(0,1)$.

y que puede definirse de forma explícita como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$$

El conjunto Ω es cerrado, puesto que estamos considerando las igualdades en la definición del conjunto y por tanto contiene a su frontera, además está acotado puesto que obviamente $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, así que el conjunto es un compacto. Como la función es polinomial entonces es continua, y por el Teorema de Weierstrass la función tiene máximo y mínimo en el conjunto, es decir, el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y) \\ \text{Sujeto a} & (x, y) \in \Omega \end{array}$$

tiene solución.

El problema de optimización sobre Ω se divide en dos: un problema de optimización sobre el interior del conjunto

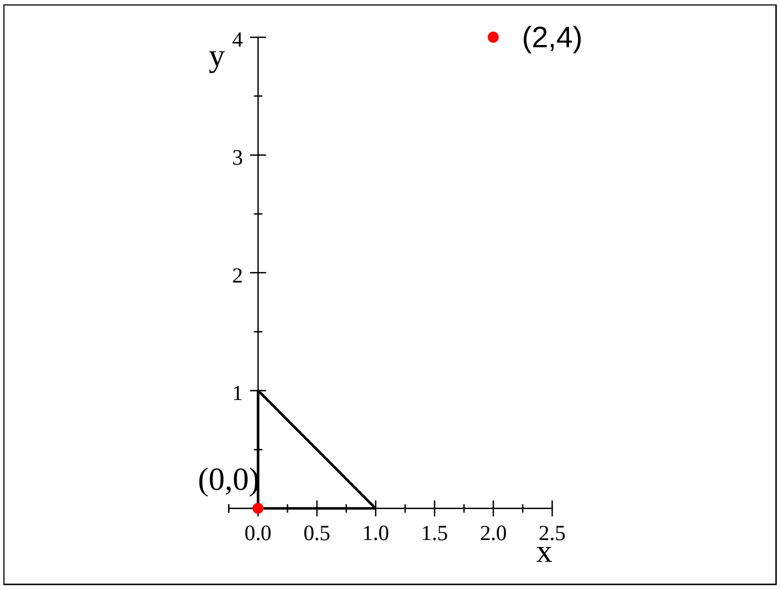
$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y) \\ \text{Sujeto a} & (x, y) \in \overset{\circ}{\Omega} \end{array}$$

y otro de optimización sobre la frontera

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x, y) \\ \text{Sujeto a} & (x, y) \in \delta\Omega \end{array}$$

El primer problema ya está resuelto en el apartado anterior, ya que se trata de un problema sin restricciones, sólo faltaría por comprobar que los puntos obtenidos en ese apartado están realmente en el interior del conjunto Ω

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0) \Rightarrow \notin \overset{\circ}{\Omega}, \text{ es un punto de la frontera ya que } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ P_2 &= (2,4) \Rightarrow \notin \overset{\circ}{\Omega}, \text{ está fuera del conjunto ya que } 2 + 4 = 6 > 1 \end{aligned}$$



Puntos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (2,4)$.

Ninguno de los puntos obtenidos en el apartado anterior son válidos.
Para estudiar qué ocurre en la frontera hay que tener en cuenta que está formada por 3 rectas

$$\delta\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0; 0 \le x \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0; 0 \le y \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1; x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

En el eje horizontal $y = 0$ y el problema se reduce a

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & 8x^3 \\ \text{Sujeto a} & 0 \le x \le 1 \end{array},$$

la función es creciente en $[0,1]$ porque su derivada es $24x^2$ que es siempre positiva, de forma que el mínimo en $x \in [0,1]$ se alcanza en $x = 0$ y el máximo en $x = 1$, que junto con $y = 0$, proporciona los puntos $P_3 = (0,0)$ y $P_4 = (1,0)$.
En el eje vertical $x = 0$ y el problema se reduce a

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & y^3 \\ \text{Sujeto a} & 0 \le y \le 1 \end{array},$$

la función es creciente en $[0,1]$ porque su derivada es $3y^2$ que es siempre positiva, de forma que el mínimo en $y \in [0,1]$ se alcanza en $y = 0$ y el máximo en $y = 1$, que junto con $x = 0$, proporciona los puntos $P_5 = (0,0)$ y $P_6 = (0,1)$.
Sobre la recta $x + y = 1$, el problema es

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & y^3 \\ \text{Sujeto a} & x + y = 1 \\ & 0 \le x, y \le 1 \end{array}$$

que es un problema de Lagrange, con restricciones de igualdad. Construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = 8x^3 - 24xy + y^3 + \lambda(x + y - 1),$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 24y + \lambda = 0, \quad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 3y^2 + \lambda = 0, \quad (2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0, \quad (3)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$\left(24x^2 - 24y + \lambda\right) - \left(-24x + 3y^2 + \lambda\right) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 + 24x - 24y - 3y^2 = 0, \ (4)$$

Y de la ecuación (3) despejamos el valor de y

$$y = 1 - x,$$

que sustituimos en la ecuación (4)

$$24x^2 + 24x - 24(1-x) - 3(1-x)^2 = 0 \Rightarrow 21x^2 + 54x - 27 = 0 \Rightarrow 7x^2 + 18x - 9 = 0,$$

y resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 + 9 \cdot 4 \cdot 7}}{14} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 252}}{14} = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{14} = \frac{-18 + 24}{14} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-18+24}{14} = \dfrac{3}{7} \\ x_2 = \dfrac{-18-24}{14} = -3 \end{cases}.$$

Sólo nos sirve la solución $x_1 = \frac{3}{7}$, puesto que $x_2 = -3 < 0$. Para $x_1 = \frac{3}{7}$ obtendremos

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow P_7 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) \\ \lambda &= 24y - 24x^2 = 24\frac{4}{7} - 24\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{456}{49}. \end{aligned}$$

Los puntos y sus correspondientes valores en f son

P_k	Factibilidad	$f(P_k)$
$P_1 = P_3 = P_5 = (0,0)$	SI	$f(P_1) = 0$
$P_2 = (2,4)$	NO	-
$P_4 = (1,0)$	SI	$f(P_4) = 8$
$P_6 = (0,1)$	SI	$f(P_6) = 1$
$P_7 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$	SI	$f(P_7) - \frac{248}{49}$

de donde se deduce que $P_4 = (1,0)$ es el **máximo absoluto** con valor 8 y $P_7 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$ es el **mínimo absoluto** con valor $-\frac{248}{49}$.

4. Probar que

$$yze^{x+3} + 3xe^{z-y} = 0$$

define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(1,-1,3)$. ¿Es el punto $(1,-1)$ un punto crítico para la función $z(x,y)$?

Solución:

a) Consideremos la función $F(x,y,z) = yze^{x+3} + 3xe^{z-y}$, la ecuación es equivalente a poner $F(x,y,z) = 0$.Para que z se pueda definir como función implícita del punto $(1,-1,3)$ debe suceder por una parte que $F(1,-1,3) = 0$ y por otra que $\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,3) \neq 0$.

Sustituyendo los valores $x = 1$, $y = -1$ y $z = 3$ en la función y en su derivada parcial respecto de z, obtenemos

$$\begin{aligned} F(1,-1,3) &= (-1) \cdot 3 \cdot e^{1+3} + 3 \cdot 1e^{3-(-1)} = -3e^4 + 3e^4 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= ye^{x+3} + 3xe^{z-y} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,3) = (-1)e^{1+3} + 3 \cdot 1 \cdot e^{3-(-1)} = -e^4 + 3e^4 = 2e^4 \neq 0, \end{aligned}$$

de forma que se cumplen las condiciones para que z se pueda definir como función implícita de (x, y) en un entorno de $(1, -1, 3)$.

Para ver si $(1, -1)$ es un punto crítico tendremos que calcular el gradiente de z y comprobar si se anula en ese punto.

Para la obtener derivada parcial respecto de x usamos la ecuación inicial y derivamos respecto de esa variable, donde habrá que tener en cuenta que $z = z(x, y)$ es función de las dos variables x e y

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(yze^{x+3} + 3xe^{z-y}\right) = 0 \Rightarrow ye^{x+3}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + yze^{x+3} + 3e^{z-y} + 3xe^{z-y}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0,$$

o de forma más compacta

$$\left(yze^{x+3} + 3e^{z-y}\right) + \left(ye^{x+3} + 3xe^{z-y}\right)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0,$$

Evaluamos la ecuación en $(1, -1)$, teniendo en cuenta que $z(1, -1) = 3$

$$\left(-1 \cdot 3 \cdot e^4 + 3e^4\right) + \left(-1 \cdot e^4 + 3 \cdot 1 \cdot e^4\right)\frac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2e^4\frac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = 0.$$

Repetimos el proceso para calcular la derivada parcial respecto a y

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(yze^{x+3} + 3xe^{z-y}\right) = 0 \Rightarrow ze^{x+3} + ye^{x+3}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + 3xe^{z-y}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} - 3xe^{z-y} = 0$$

o de forma más compacta

$$\left(ze^{x+3} - 3xe^{z-y}\right) + \left(ye^{x+3} + 3xe^{z-y}\right)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0,$$

Evaluamos en el punto $(1, -1)$

$$\left(3 \cdot e^4 - 3 \cdot 1 \cdot e^4\right) + \left(-1 \cdot e^4 + 3 \cdot 1 \cdot e^4\right)\frac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 0 + 2e^4 5\frac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = 0.$$

Puesto que

$$\frac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = \frac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla z(1,-1) = 0,$$

el punto $(1, -1)$ es crítico para $z(x, y)$.

5. Dada la función

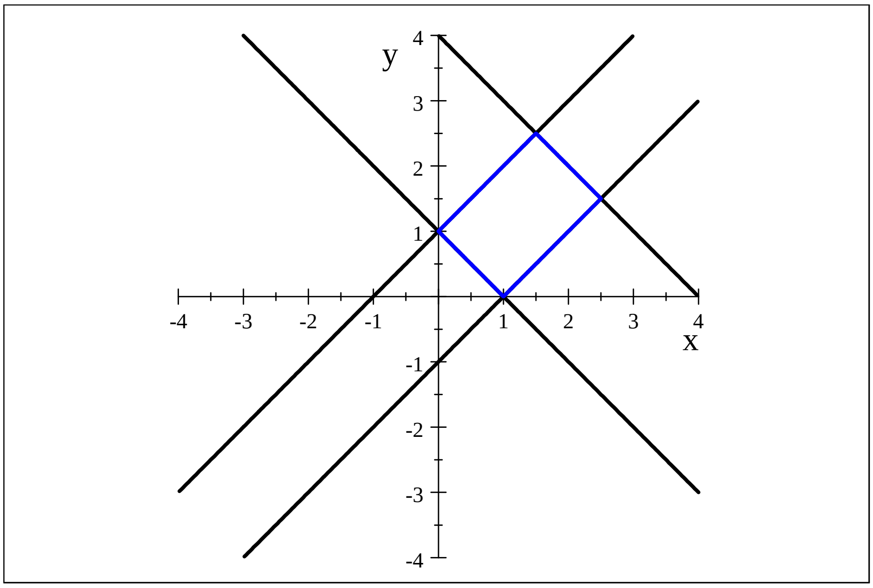
$$f(x,y) = (x+y)^2 e^{x-y}$$

   a) Calcula $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$, siendo R el paralelogramo delimitado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$ y $x - y = 1$, efectuando el cambio de coordenadas $u = x + y$ y $v = x - y$.

   b) Expresa, **pero sin calcular**, la expresión de la integral usando los límites de integración sin usar el cambio de coordenadas.

Solución:

a) El conjunto $\mathcal{R}$ es el determinado por la siguiente gráfica



y viene determinada de forma explícita como

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 4; \ -1 \leq x - y \leq 1\right\}$$

Para hacer el cambio de coordenadas, es necesario expresar x e y en función de u y v

$$\begin{aligned} u + v &= (x + y) + (x - y) \Rightarrow u + v = 2x \Rightarrow x = \frac{u + v}{2} \\ u - v &= (x + y) - (x - y) \Rightarrow u - v = 2y \Rightarrow y = \frac{u - v}{2} \end{aligned}$$

siendo el Jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

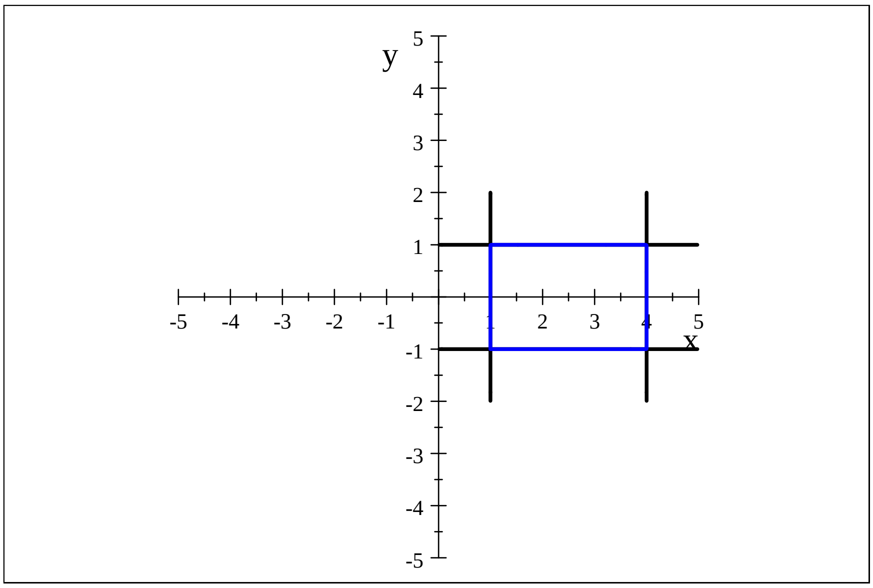
La integral sería

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dxdy = \int\int_{\mathcal{R}'} f(u, v)\, |J|\, dudv$$

y el conjunto transformado $\mathcal{R}'$ sería

$$\mathcal{R}' = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 4; \ -1 \leq v \leq 1\right\}$$

cuya representación gráfica es



y puesto que el conjunto es un rectángulo los extremos de integración son los límites de ese rectángulo

$$\int\int_{\mathcal{R}} (x+y)^2\, e^{x-y} dxdy = \int\int_{\mathcal{R}'} y^2 e^v \frac{1}{2} dudv = \int_1^4 \int_{-1}^1 u^2 e^v \frac{1}{2} dudv = \int_1^4 u^2 du \int_{-1}^1 e^v \frac{1}{2} dv$$

la primera integral es

$$\int_{-1}^1 e^v \frac{1}{2} dv = \left.\frac{e^v}{2}\right|_{v=-1}^{v=1} = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

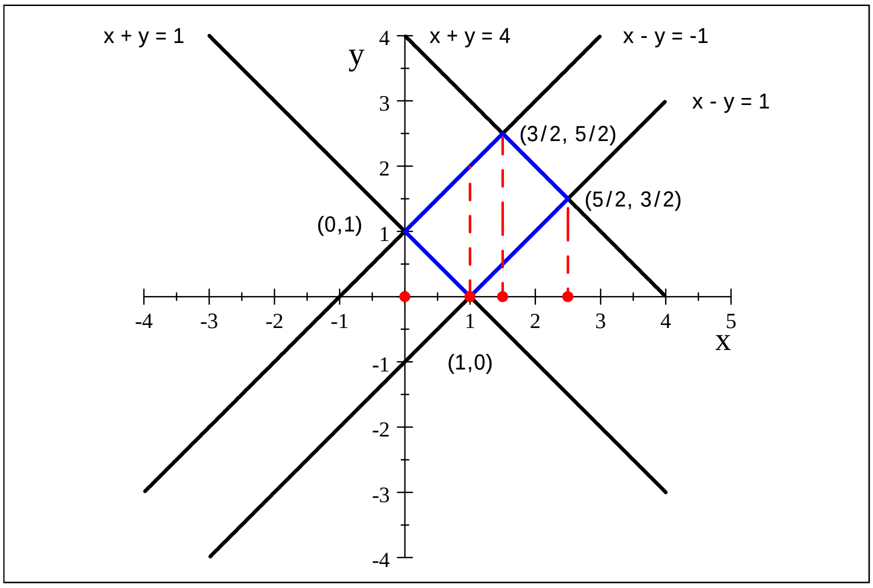
y la integral doble

$$\int_1^4 u^2 du \int_{-1}^1 e^v \frac{1}{2} dv = \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) \int_1^4 u^2 du = \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) \left.\frac{u^3}{3}\right|_{u=1}^{u=4} = \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{21}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

b) Para integrar directamente, sin cambio de variable, tendremos en cuenta los vértices del conjunto. Si, por ejemplo, dejamos fija la variable x, entonces podemos comprobar que su rango es

$$0 \le x \le \frac{5}{2}$$

Como vemos en la gráfica, dependiendo del valor que la x toma en este rango, el valor de la función que está por encima y por debajo es distinta



podemos comprobar que

Rango	Función por encima	Función por debajo
$0 \leq x \leq 1$	$x-y=-1$	$x+y=1$
$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$	$x-y=-1$	$x-y=1$
$\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$	$x+y=4$	$x-y=1$

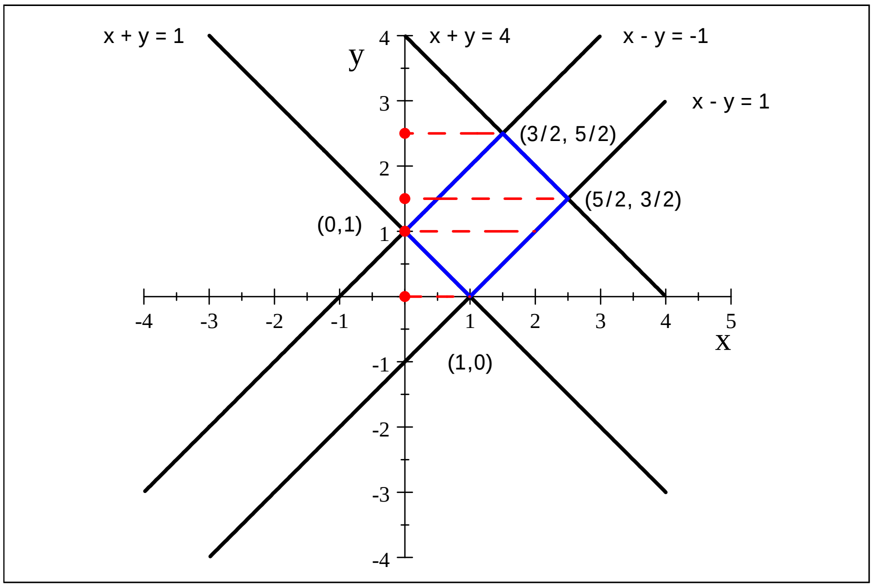
y por tanto la integral se puede expresar como

$$\int\int_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y} dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (x+y)^2 e^{x-y} dy + \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{x-1}^{x+1} (x+y)^2 e^{x-y} dy + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} dx \int_{x-1}^{4-x} (x+y)^2 e^{x-y} dy$$

que es bastante más complicada de hacer.
También podemos fijar la variable y, en este caso vemos que su rango es

$$0 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

y como vemos en la gráfica, dependiendo del valor que la y toma en este rango, el valor de la función que está por encima y por debajo es distinta



podemos comprobar que

Rango	Función por encima	Función por debajo
$0 \leq y \leq 1$	$x-y=1$	$x+y=1$
$1 \leq y \leq \frac{3}{2}$	$x-y=1$	$x-y=-1$
$\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$	$x+y=4$	$x-y=-1$

y por tanto la integral se puede expresar como

$$\int\int_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y} dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y} (x+y)^2 e^{x-y} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} dy \int_{y-1}^{1+y} (x+y)^2 e^{x-y} dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} dy \int_{y-1}^{4-y} (x+y)^2 e^{x-y} dx.$$

Cualquiera de las dos opciones es válida.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias indicando orden y tipo en cada caso:

   a)

$$\begin{cases} xy' = y + xe^{y/x} \\ y(1) = \log(2) \end{cases}$$

b)

$$y''' - 3y' + 2y = 2x^2$$

c) Encuentra un factor integrante de la EDO

$$\left(3y^2 - x\right) dx + \left(2y^3 - 6xy\right) dy = 0$$

Sabiendo que depende de $z = x + y^2$. No hay que resolver la ecuación.

Solución:

a) Tomando $y' = \frac{dy}{dx}$ podemos expresar la ecuación como

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x} \Leftrightarrow xdy = \left(y + xe^{y/x}\right) dx \Leftrightarrow \left(y + xe^{y/x}\right) dx - xdy = 0$$

Vamos a comprobar que es una ecuación homogénea

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \left(y + xe^{y/x}\right) \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \left(\lambda y + \lambda x e^{\lambda y/\lambda x}\right) = \lambda \left(y + xe^{y/x}\right) = \lambda M(x,y) \\ N(x,y) &= -x \Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = -\lambda x = \lambda(-x) = \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

Tanto M como N son funciones homogéneas del mismo grado, por tanto la EDO es homogéna y la se puede resolver mediante el cambio

$$y = xv \quad \Rightarrow \quad dy = vdx + xdv,$$

y sustituyendo

$$\left(y + xe^{y/x}\right) dx - xdy = 0 \Rightarrow \left(xv + xe^{xv/x}\right) dx - x(vdx + xdv) = 0,$$

dividiendo por x

$$(v + e^v) dx - (vdx + xdv) = 0,$$

reagrupando

$$(v + e^v - v) dx - xdv = 0 \Rightarrow e^v dx - xdv = 0,$$

que es una ecuación de variables separables

$$e^v dx - xdv = 0 \Leftrightarrow e^v dx = xdv \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = e^{-v}dv,$$

Integrando

$$\ln x + C = -e^{-v} \Rightarrow e^{-v} + \ln x + C = 0,$$

y deshaciendo el cambio

$$e^{-y/x} + \ln x + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{y/x}} + \ln x + C = 0,$$

Aplicando la condición inicial

$$y(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\ln(2)/1}} + \ln 1 + C = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2},$$

y la solución buscada será

$$\frac{1}{e^{y/x}} + \ln x - \frac{1}{2} = 0.$$

b) La ecuación diferencial
$$y''' - 3y' + 2y = 2x^2$$
es lineal, de tercer orden, con coeficientes constantes y no homogénea. Para encontrar la solución general, resolvemos la ecuación homogénea
$$y''' - 3y' + 2y = 0,$$
usando el polinomio característico
$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2,$$
que puede factorizarse (usando Ruffini) como
$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2),$$
y por tanto la solución de la ecuación homogénea es
$$y_h(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x}.$$
Para encontrar la solución particular, y_p, y teniendo en cuenta que el término independiente es un polinomio de 3 grado sería
$$y_p(x) = ax^2 + bx + c,$$
de forma que
$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b, \\ y_p''(x) &= 2a, \\ y_p'''(x) &= 0, \end{aligned}$$
que sustituiremos en la ecuación general como para obtener los valores para a, b y c
$$y_p''' - 3y_p' + 2y_p = 0 \Leftrightarrow (0) - 3(2ax + b) + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 2x^2$$
operando sobre el lado izquierdo
$$-6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2$$
y agrupando términos
$$x^2(2a) + x(2b - 6a) + (2c - 3b) = 2x^2$$
e identificando coeficientes, obtenemos el sistema
$$\begin{aligned} 2a &= 2 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2c - 3b &= 0 \end{aligned}$$
que tiene por solución
$$a = 1;\ b = 3;\ c = \frac{9}{2}.$$
Las solución particular es
$$y_p(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{2},$$
y
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x} + x^2 + 3x + \frac{9}{2},$$
la solución general.