1. **(1 punto)** Calcula $z_1 = \dfrac{(1-i)}{(1+i\sqrt{3})}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y operamos.

$$\frac{(1-i)}{(1+i\sqrt{3})} = \frac{(1-i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{(1+i\sqrt{3})\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} - i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

2. **(1 punto)** Calcula $z_2 = (1+i)^{10}$, expresando el resultado en forma binómica.

   Solución: Expresamos z_2 en forma polar

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

   y operamos

$$z_2^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{10} = \left(2^{1/2}e^{i\pi/4}\right)^{10} = 2^5 e^{i\pi 10/4}$$

   por otro lado

$$\frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

   por tanto damos 1 vuelta a la circunferencia y nos quedaría

$$2^5 e^{i\pi 10/4} = 2^5 e^{i\pi/2}$$

   y en forma binómica, tal y como se pide en el enunciado sería:

$$2^5 e^{i\pi/2} = 2^5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2^5(0+i) = 2^5 i = 32i.$$

3. **(2 puntos)** Calcula $\sqrt[3]{i}$ en $\mathbb{C}$ y expresa el resultado en las formas exponencial y binómica.

   Solución: Expresamos el radicando en forma polar

$$i = 1e^{i\pi/2}$$

   y aplicamos la fórmula de las raíces n–ésimas

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi_k} \text{ con } \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ y } k = 0,1,2,\dots n-1$$

   en este caso

$$n = 3,\ \ |z| = 1,\ \ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \varphi_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \quad k = 0,1,2 \end{array}\right.$$

   luego tendremos 3 raíces

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1e^{i\pi/6} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\
w_1 &= 1e^{i5\pi/6} = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\
w_2 &= 1e^{i3\pi/2} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -i.
\end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(2,0),(1,3)\}$ y $B' = \{(0,1),(1,-1)\}$. Halla la matriz de cambio de base de B a B'.

Solución: Buscamos $M_{B\to B'}$, luego hay que expresar los elemento de la base B en términos de la base B',es decir,si ponemos $B = \{u_1,u_2\}$ y $B' = \{v_1,v_2\}$, entonces buscamos 4 escalares a,b,c,d de forma que

$$\begin{aligned} u_1 &= av_1 + bv_2 \\ u_2 &= cv_1 + dv_2 \end{aligned}$$

y en este caso la matriz buscada será

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Para calcular estos valores, sólo hay que sustituir los vectores y resolver los sistemas que aparecen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 = b \\ 0 = a-b \end{array} \right. \Leftrightarrow a = 2, b = 2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c-d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = d \\ 3 = c-d \end{array} \right. \Leftrightarrow c = 4, d = 1 \end{aligned}$$

La matriz buscada será

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Se consideran en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \quad \text{y } W = <(-1,0,2),(1,-4,0)>$$

   a) **(1 punto)** Encuentra una base, las ecuaciones implícitas y las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios, U y W.
   b) **(1 punto)** Encuentra mediante el método de Gram–Schmidt una base ortonormal de W.
   c) **(1 punto)** Calcula la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U.
   d) **(1 punto)** Calcula una base de $U \cap W$. ¿Es directa la suma $U + W$?

Solución:

   a) Para el subespacio U, ya tenemos las ecuaciones implícitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$$

Con estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas de U, resolviendo el sistema correspondiente: De la segunda ecuación

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

y sustituyendo en la primera

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x + z = -y \Rightarrow y = -2x$$

y si usamos un parámetro, por ejemplo α

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= -2\alpha \\ z &= \alpha \end{aligned}$$

Las soluciones serán de la forma

$$(\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha\,(1, -2, 1)$$

lo que nos proporciona una base para U, $B_U = \{u = (1, -2, 1)\}$

$$U = \langle (1, -2, 1) \rangle\,.$$

Para el subespacio W, ya tenemos la base

$$W =< (-1, 0, 2), (1, -4, 0) > \Longrightarrow\; B_W = \{w_1 = (-1, 0, 2); w_2 = (1, -4, 0)\}$$

que nos permite construir las ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = \alpha(-1, 0, 2) + \beta(1, -4, 0) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = -\alpha + \beta \\ y = -4\beta \\ z = 2\alpha \end{array} \right.$$

Y con estas ecuaciones paramétricas obtendremos la implícita

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -\alpha + \beta \;\Longrightarrow\; x = -\dfrac{z}{2} - \dfrac{y}{4} \\ y = -4\beta \;\Longrightarrow\; \beta = -\dfrac{y}{4} \\ z = 2\alpha \;\Longrightarrow\; \alpha = \dfrac{z}{2} \end{array} \right.$$

es decir

$$x + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0 \iff 4x + y + 2z = 0.$$

b) A partir de la base de W que nos proporciona el enunciado,

$$B_W = \{w_1 = (-1, 0, 2); w_2 = (1, -4, 0)\}$$

construímos la base ortogonal $B'_W = \{w'_1; w'_2\}$ mediante el método de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_1 = (-1, 0, 2) \\ w'_2 &= w_2 + \alpha w'_1 = (1, -4, 0) + \alpha(-1, 0, 2) = (1 - \alpha, -4, 2\alpha) \end{aligned}$$

eligiendo α de forma que $\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = 0$

$$\left\langle w'_1; w'_2 \right\rangle = \langle (-1, 0, 2); (1 - \alpha, -4, 2\alpha) \rangle = (\alpha - 1) + 4\alpha = 0 \iff 5\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{5},$$

de modo que

$$w'_2 = \left(\frac{4}{5}, -4, \frac{2}{5} \right).$$

Se obtiene la base ortonormal pedida (b.o.n.) $B''_W = \{w''_1; w''_2\}$ dividiendo cada vector por su norma

$$\begin{aligned} w''_1 &= \frac{w'_1}{\|w'_1\|} = \frac{w'_1}{\left\langle w'_1; w'_1 \right\rangle^{1/2}} = \frac{(-1, 0, 2)}{\langle (-1, 0, 2); (-1, 0, 2) \rangle^{1/2}} = \frac{(-1, 0, 2)}{\sqrt{1 + 4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ w''_2 &= \frac{w'_2}{\|w'_2\|} = \frac{w'_2}{\left\langle w'_2; w'_2 \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{4}{5}, -4, \frac{2}{5}\right)}{\left\langle \left(\frac{4}{5}, -4, \frac{2}{5}\right); \left(\frac{4}{5}, -4, \frac{2}{5}\right) \right\rangle^{1/2}} = \frac{\left(\frac{4}{5}, -4, \frac{2}{5}\right)}{\sqrt{\frac{16}{25} + 16 + \frac{4}{25}}} = \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{21}}{105}, -\frac{2\sqrt{5}\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{5}\sqrt{21}}{105} \right. \end{aligned}$$

c) Como sabemos $\mathbb{R}^3 = U + U^{\perp}$, de forma que

$$v = (3, 2, 1) = u_1 + u_2, \quad \text{con } u_1 \in U \text{ y } u_2 \in U^{\perp}$$

el enunciado nos pide el cálculo de u_1. Por una parte y como $u_1 \in U = \langle (1,-2,1) \rangle$ entonces se tiene que si $u = (1,-2,1)$

$$u_1 = \alpha u = \alpha (1,-2,1) = (\alpha, -2\alpha, \alpha)$$

por otra sabemos que como $u_2 \in U^{\perp}$, entonces

$$\langle u; u_2 \rangle = 0$$

de este modo si calculamos $\langle v; u \rangle$, o

$$\langle v; u \rangle = \langle u_1 + u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle + \langle u_2; u \rangle = \langle u_1; u \rangle$$

y calculando los productos escalares correspondientes

$$\begin{aligned} \langle v; u \rangle &= \langle (3,2,1)\,; (1,-2,1) \rangle = 3 - 4 + 1 = 0 \\ \\ \langle u_1; u \rangle &= \langle (\alpha, -2\alpha, \alpha)\,; (1,-2,1) \rangle = \alpha + 4\alpha + \alpha = 6\alpha \end{aligned}$$

Por tanto

$$0 = 6\alpha \iff \alpha = \frac{0}{6} = 0$$

y la proyección buscada será

$$u_1 = (0,0,0)$$

esto indica que el vector $v = (1,2,3)$ está en $U^{\perp}$, es decir

$$v = u_2.$$

d) Para calcular una base $U \cap W$ podemos, por ejemplo, utilizar las ecuaciones implícitas de U y W

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad (x,y,z) \in U \text{ y } (x,y,z) \in W \right\} \\ \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x+y+z=0,\, x-z=0,\, 4x+y+2z=0 \right\} \end{aligned}$$

Tendremos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ 4x+y+2z=0=0 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones (ver apartado a) sabemos que $y = -2x$ y que $z = x$ y sustituyendo en la tercera

$$4x + y + 2z = 0 \iff 4x - 2x + 2x = 0 \iff x = 0$$

luego el vector nulo $(0,0,0)$ es la única solución

$$U \cap W = \{0\}$$

de donde

$$\dim (U \cap W) = 0$$

y la fórmula de las dimensiones nos da

$$\dim (U + W) = \dim (U) + \dim (W) - \dim (U \cap W) = 1 + 2 - 0 = 3$$

luego la suma es directa

$$U + W = U \oplus W.$$
