industriales
etsii UPCT

509101010-Matemáticas I - Grado en Ingeniería Química Industrial
4 de febrero de 2021
Examen Final Ordinario - Duración: 210 minutos

APELLIDOS y NOMBRE: DNI:

Firma:

TIPO EXAMEN: ☐ PARCIAL 1 ☐ PARCIAL 2 ☐ GLOBAL ☐ PROBLEMAS MESA:

OBSERVACIONES Y REQUISITOS

- Coloca el DNI o equivalente encima de la mesa. Rellena y entrega la hoja del enunciado. Pon tu nombre en cada folio de respuesta. Indica en la cabecera del enunciado el tipo de examen que vas a realizar y el número de mesa que usas.
- Usa bolígrafo azul o negro, **nunca lápiz**. **Escribe con claridad**.
- Está prohibido el uso de móviles. **NO** se puede usar calculadora programable. **NO** se permite ningún tipo de material bibliográfico. **NO** se permite la comunicación entre los asistentes al examen. **NO** se puede salir del examen durante la primera media hora. **NO** se puede salir del aula durante la realización del examen. **Una violación de estas reglas o una acción irregular realizada durante la prueba será motivo de expulsión y una calificación final de 0 en la asignatura.**
- Los resultados obtenidos sin el razonamiento matemático adecuado serán puntuados con 0.
- Los alumnos que tengan que recuperar ambos parciales deben realizar los problemas marcados con **EG**.

A. Problemas (20 %)

1. (**5 puntos**). Calcula los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{Sh}\,x - 2x}{x-\sin x} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)$$

2. (**5 puntos**). Prueba que no existe un punto $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que la función $f(x) = x^2 + \dfrac{\alpha}{x}$, tenga un máximo relativo.

B. Primer Parcial (35 %)

1. **EG (1.5 puntos**). Encuentra en $\mathbb{C}$ todas las soluciones en forma binómica de la ecuación

$$z^3 - i = 0,$$

y comprueba que la suma de esas soluciones es 0 y que su producto es i.

2. (**1 punto**).Siendo z, $w \in \mathbb{C}$, con $z \neq w$ y $\dfrac{(z+w)\,i}{(z-w)} \in \mathbb{R}$. Encuentra la relación entre $|z|$ y $|w|$.

3. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   a) (**1 punto**) Sea V un espacio vectorial, entonces si $U, W \leqslant V \Longrightarrow U+W \leqslant V$.

b) Indica de forma razonada, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

1) **EG (0.75 puntos)** Cualquier familia de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} \in \mathbb{R}^3$ linealmente independiente es base de $\mathbb{R}^3$.

2) **EG (0.75 puntos)**. El conjunto $H : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

4. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B_1 = \{(2,1),(3,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(-1,1)\}$

a) **EG (1 punto)** Halla las matrices de cambio de base $M_{B_1 \to B_2}$ y $M_{B_2 \to B_1}$.

b) **(0.5 puntos)** Dado el vector $v_{B_1} = (1,-2)_{B_1}$ halla su expresión en la base canónica y en la base B_2.

5. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ junto con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios vectoriales

$$U = \langle(-1,0,1,0);(1,-1,0,1);(-1,1,2,-1)\rangle \qquad V = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \middle| \quad x + 2y + 3z - t = 0\right\}$$

a) **(1.25 punto)** Encuentra una base y ecuaciones paramétricas e implícitas de ambos subespacios U y V.

b) **(0.75 punto)** Calcula una base para los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

c) **EG (1.5 punto)** Calcula mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal para V.

C. Segundo Parcial (35 %)

1. Se considera en $\mathbb{R}^4$, junto con el producto escalar euclídeo, el siguiente subespacio vectorial:

$$U = \langle\{(-1,1,1,0);(1,-1,0,1)\}\rangle$$

a) **(0.75 puntos)** Encuentra una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$.

b) **EG (1 punto)** Calcula la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,1,-1)$ sobre U.

c) **(0.5 puntos)** Calcula la simetría ortogonal del vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,1,-1)$ sobre U.

2. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) **(1 puntos)** Demuestra que una matriz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tiene como valor propio el valor 0 si y sólo si su determinante es 0.

b) **EG (0.5 puntos)** Utilizando el teorema de la función inversa, calcula la derivada de $f(x) = \arctan x$. (Poner la derivada directamente se puntuará con 0)

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que la matriz asociada a las bases canónicas es

$$M_{B_1 \to B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base $B_1 = \{(1,-1,0);(0,1,-1);(1,0,1)\}$ y en $\mathbb{R}^2$ la base $B_2 = \{(-1,1);(-1,0)\}$. Se pide:

a) **(1 punto)** La matriz asociada a f respecto de B_1 y B_2: $M_{B_1 \to B_2}(f)$

b) **(0.5 puntos)** Calcula la expresión analítica de f.

c) **EG (1 punto)** Calcula una base de los subespacios $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva? Razona las respuestas.

4. Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) **(1.25 punto)** Estudia para qué valores del parámetro α, la matriz M es diagonalizable.

b) **EG (1.25 puntos)** Para $\alpha = 1$, encuentra una matriz diagonal semejante a M y las matrices de paso correspondientes.

5. **EG (1.25 puntos)** Calcula el desarrollo de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = e^x \cos x$ en el punto $x_0 = 0$.Utiliza este desarrollo para aproximar el valor de $e^{0,1}\cos(0{,}1)$, y determina la menor cota posible del error cometido.