Capítulo 15

Aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables

En este capítulo vamos a extender al caso multivariable los resultados visto en el cálculo diferencial de una variable sobre polinomio de Taylor y extremos de funciones.

Recordemos que para el caso de una variable: Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ y $x_0 \in I$; entonces podíamos construir el polinomio de Taylor de orden n

$$T_n f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

junto con el resto en la forma de Taylor

$$T_n f(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

Para el caso de n variables tenemos una expresión parecida.

15.1. Polinomio de Taylor para funciones de varias variables

Definición 15.1 *Definimos* segmento *que une* $\overrightarrow{a}$ *con* $\overrightarrow{b}$ *(*$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$*) al conjunto definido como*

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left\{(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} \mid \lambda \in [0,1]\right\}$$

Notar que para $\lambda = 0$*, obtenemos el punto* $\overrightarrow{a}$ *y para* $\lambda = 1$*, obtenemos el punto* $\overrightarrow{b}$*.*

Si ponemos $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$*, entonces*

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right] &= \left\{(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) \mid \lambda \in [0,1]\right\} \\ &= \left\{\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{h} \mid \mu \in [0,1]\right\} \end{aligned}$$

Teorema 15.1 (Teorema del valor medio en varias variables) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de* n *variables, que sea continua en el segmento* $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$*, y diferenciable en el interior* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$*. Entonces existe al menos un punto* $\xi \in \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *tal que*

$$f\left(\overrightarrow{b}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right) = df(\xi)\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right),$$

o de forma equivalente existe un punto $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{h}\right)-f\left(\overrightarrow{a}\right)=df\left(a+\theta\overrightarrow{h}\right)\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right).$$

O si tenemos en cuenta la relación entre la diferencial y las derivadas parciales, podemos poner

$$f\left(\overrightarrow{b}\right)-f\left(\overrightarrow{a}\right)=\nabla f\left(a+\theta\overrightarrow{h}\right)\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right),$$

y en componentes

$$f\left(\overrightarrow{b}\right)-f\left(\overrightarrow{a}\right)=\sum_{k=1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a+\theta\overrightarrow{h}\right)(b_k-a_k),$$

donde $\overrightarrow{a}=(a_1,\dots,a_n)$ y $\overrightarrow{b}=(b_1,\dots,b_n)$. Notar que si tomamos $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$, entonces obtenemos la expresión

$$f\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{h}\right)-f\left(\overrightarrow{a}\right)=\sum_{k=1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a+\theta\overrightarrow{h}\right)h_k$$

Definición 15.2 *Sea $f\in\mathcal{C}^{m+1}(A)$, con $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto. Definimos el polinomio de Taylor de orden n para f en $\overrightarrow{a}\in A$, con $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$ tal que $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{x}]\subseteq A$ a la expresión definida por*

$$\begin{aligned}T_nf\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{a}\right) &= f\left(\overrightarrow{a}\right)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_i-a_i)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\cdots+\\ &\quad+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_{i_1}-a_{i_1})(x_{i_2}-a_{i_2})\cdots(x_{i_m}-a_{i_m}).\end{aligned}$$

Tomando $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}$, tendremos

$$\begin{aligned}T_nf\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{h},\overrightarrow{a}\right) &= f\left(\overrightarrow{a}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overrightarrow{a}\right)h_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(\overrightarrow{a}\right)h_ih_j+\cdots+\\ &\quad+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}\left(\overrightarrow{a}\right)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}\end{aligned}$$

15.1.1. Polinomios de Taylor para $m=1$ y $m=2$

Veamos el caso particular $m=1$, es decir, el polinomio de Taylor de orden 1 sería

$$T_1f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{a}\right)=f\left(\overrightarrow{a}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_i-a_i)=f\left(\overrightarrow{a}\right)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right)(x_n-a_n),$$

y usando la definición de gradiente de f podemos poner

$$T_1f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{a}\right)=f\left(\overrightarrow{a}\right)+\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}\right).$$

Como caso particular, si $n=2$, la función será de dos variables y usando la notación usual $f(x,y)$, la ecuación queda como

$$T_1f\left((x,y),(a,b)\right)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a),$$

Esta expresión es la ecuación de un plano, que se denomina *plano tangente* a $f(x,y)$ en el punto (a,b) y, si usamos el gradiente de $f(x,y)$, podemos poner:

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-a).$$

Ejemplo 15.1 *Como ejemplo vamos a calcular el plano tangente a la función* $f(x,y) = 14 - x^2 - y^2$ *en los puntos* $(1,2)$ *y* $(0,0)$. *Necesitamos las derivadas parciales de* $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

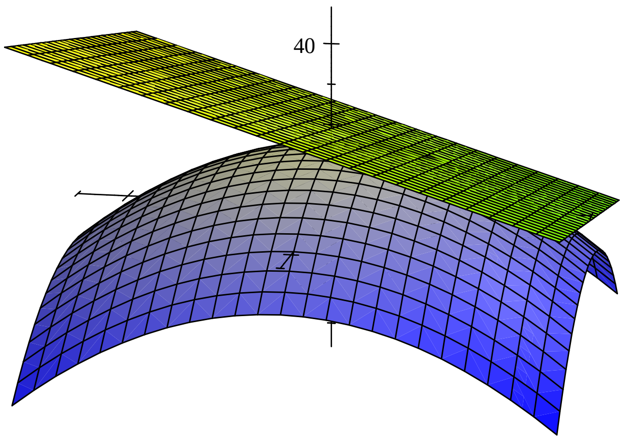
Para el punto $(1,2)$ *tendremos*

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 14-1-4 = 9 \\ \nabla f(1,2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right) = (-2,-4) \end{aligned}$$

por tanto el plano tangente sería

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2) = 9 + (-2,-4) \cdot (x-1, y-2) = \\ &= 9 - 2(x-1) - 4(y-2) \\ &= 19 - 4y - 2x \end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente sería en forma implícita, tomando $z = T_2 f(x,y)$



Ejemplo 15.2 *Vamos a calcular el plano tangente a la función* $f(x,y) = 14 - x^2 - y^2$ *en* $(1,2)$ *y en* $(0,0)$. *Necesitamos las derivadas parciales de* $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

Para el punto $(1,2)$ *tendremos*

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 14-1-4=9 \\ \nabla f(1,2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right) = (-2,-4) \end{aligned}$$

por tanto el plano tangente sería

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1,y-2) = 9 + (-2,-4)\cdot(x-1,y-2) = \\ &= 9-2(x-1)-4(y-2) \\ &= 19-4y-2x \end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente sería en forma implícita, tomando $z = T_2 f(x,y)$

$$2x+4y+z=19$$

Para el punto $(0,0)$ *tendremos*

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 14 \\ \nabla f(0,0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = (0,0) \end{aligned}$$

luego el plano tangente vendría dado por

$$T_2 f(x,y) = 14 \Rightarrow z = 14.$$

Para el caso del polinomio de Taylor de segundo orden $(m = 2)$ la expresión es

$$T_2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})(x_i-a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{a})(x_i-a_i)(x_j-a_j)$$

y usando las expresiones del Gradiente y del Hessiano de f obtendremos

$$T_2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + \nabla f(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}) + \frac{1}{2!}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})^T Hf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})$$

donde

$$(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})^T Hf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}) = (x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{pmatrix}$$

Por clarificar la expresión, veremos como queda esta expresión para 2 variables, es decir, $n=2$, el polinomio de Taylor sería

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-a)$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}(x-a)(y-b) + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2\right)$$

Si las derivadas parciales segundas son continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_y \partial x}(a,b)$$

y por tanto

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a)$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)$$

o en forma matricial

$$T_2 f((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \nabla f(a,b)\cdot(x-a,y-b) + \frac{1}{2}(x-a,y-b)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 15.3 *Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en $(0,0)$ para $f(x,y) = \left(x^2-3x\right)e^{y^2}$. Evaluamos la función en $(0,0)$*

$$f(0,0) = 0$$

Y necesitamos las derivadas parciales primeras y segundas.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-3)e^{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y(2x-3)e^{y^2} \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(x^2-3x\right)e^{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y(2x-3)e^{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(2\left(x^2-3x\right)+4y^2\left(x^2-3x\right)\right)e^{y^2} \end{cases} \end{cases}$$

Notar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, de forma que

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{y^2} & 2y(2x-3)e^{y^2} \\ 2y(2x-3)e^{y^2} & \left(2\left(x^2-3x\right)+4y^2\left(x^2-3x\right)\right)e^{y^2} \end{pmatrix}$$

Evaluamos las funciones en el punto $(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

es decir

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el polinomio de Taylor buscado será

$$\begin{aligned}
T_2 f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0) + \frac{1}{2}(x-0,y-0)\,Hf(0,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \\
&= (-3,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= -3x + x^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 15.4 *Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 en $(1,1)$ para $f(x,y) = x^y$. Evaluamos la función en $(1,1)$*

$$f(1,1) = 1$$

Y necesitamos las derivadas parciales primeras, segundas y terceras.

$$\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x) \end{cases} \\ \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\ln x) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y(\ln x)^2 \end{cases}
\end{cases}$$

Notar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ para las derivadas cruzadas de orden 2 y también ocurrirá lo mismo para las derivadas terceras

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = x^{y-2}\left(2y + y^2\ln x - y\ln x - 1\right) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = x^{y-1}(2 + y\ln x)\ln x
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= y(y-1)(y-2)x^{y-3} \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= x^y(\ln x)^3
\end{aligned}$$

Si ahora evaluamos en el punto $(1,1)$, tendremos:

$$\nabla f(1,1) = (1,0)$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y para las terceras derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(1,1) = 1 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,1) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,1) = 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) &= 0 \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1) &= 0
\end{aligned}$$

y el polinomio de Taylor, buscado será

$$T_2 f(x,y) = f(1,1) + \left(\tfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \tfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1)\right) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}(x-1)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y}(x-1)(y-1) + \tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}(y-1)^2\right)$$

$$+\tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}(x-1)^3 + 3\tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2 \partial y}(x-1)^2(y-1) + 3\tfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y^2}(x-1)(y-1)^2 + \tfrac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}(y-1)^3\right)$$

Y usando los valores obtenidos

$$T_2 f(x,y) = f(1,1) + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

Ejemplo 15.5 *Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en $(1,1,0)$ para $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - ze^x$. Evaluamos la función en $(1,1,0)$*

$$f(1,1,0) = 1$$

Y necesitamos las derivadas parciales primeras y segundas.

$$\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y} - ze^x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -ze^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -e^x \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2x}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -e^x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \end{cases}
\end{cases}$$

El Hessiano será

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} -ze^x & -\frac{1}{y^2} & -e^x \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & 0 \\ -e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluamos las funciones en el punto $(1,1,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0)=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,0)=0 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,0)=-1 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,0)=-e \end{cases} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0)=-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,0)=-1 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,0)=2 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,0)=0 \end{cases} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)=-e^x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,0)=-1 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,0)=0 \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,0)=0 \end{cases} \end{cases}$$

es decir

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el polinomio de Taylor buscado será

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y,z) &= f(1,1,0)+\nabla f(1,1,0)\cdot(x-1,y-1,z-0)+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z-0)\,Hf(1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} \\ &= 1+(1,-1,-3)\cdot(x-1,y-1,z)+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -e \\ -1 & 2 & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \\ &= 2+(x-1)-(y-1)-3z+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z)\begin{pmatrix} 1-y-ze \\ -x+2y-1 \\ e(1-x) \end{pmatrix} \\ &= 2+(x-1)-(y-1)-3z+\frac{1}{2}(x-1)(1-y-ze)+(y-1)(-x+2y-1)+ze(1-x) \\ &= \frac{5}{2}+\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}y+\left(\frac{3}{2}e-3\right)z-\frac{3}{2}xy+2y^2-\frac{3}{2}xze \end{aligned}$$

15.2. Extremos de funciones de varias variables

15.2.1. Definiciones básicas

Definición 15.3 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de* n *variables, sea* $\overrightarrow{a} \in A$. *Diremos que* f *tiene un* mínimo relativo o local en $\overrightarrow{a} \iff \exists \varepsilon > 0 : f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x}),\ \forall \overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a}, \varepsilon) \cap A$.

Definición 15.4 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de* n *variables, sea* $\overrightarrow{a} \in A$. *Diremos que* f *tiene un* máximo relativo o local en $\overrightarrow{a} \iff \exists \varepsilon > 0 : f(\overrightarrow{a}) \geq f(\overrightarrow{x}),\ \forall \overrightarrow{x} \in B(\overrightarrow{a}, \varepsilon) \cap A$.

Definición 15.5 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de* n *variables, sea* $\overrightarrow{a} \in A$. *Diremos que* f *tiene un* mínimo absoluto o global en $\overrightarrow{a} \iff f(\overrightarrow{a}) \leq f(\overrightarrow{x}),\ \forall \overrightarrow{x} \in A$.

Definición 15.6 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real de* n *variables, sea* $\overrightarrow{a} \in A$. *Diremos que* f *tiene un* máximo absoluto o global en $\overrightarrow{a} \iff f(\overrightarrow{a}) \geq f(\overrightarrow{x}),\ \forall \overrightarrow{x} \in A$.

Un punto que es máximo o mínimo de una función se dice que es un *extremo* de la función, que pueden ser locales o globales.

¿Cómo podemos calcular estos extremos? Si la función tiene, por ejemplo, un mínimo, debería suceder que en cualquier dirección en la que nos moviéramos a partir de ese punto la función debería aumentar su valor, al menos localmente.

Teorema 15.2 (Condición necesaria de primer orden) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f *diferenciable en* $\overrightarrow{a} \in A$. *Si la función* f *tiene un extremo relativo en* $\overrightarrow{a}$, *entonces debe ocurrir*

$$df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = 0; \forall \overrightarrow{x} \in A$$

Se deduce directamente que si $f \in \mathcal{C}^1(A)$, *entonces como* $df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x})$ *se debe cumplir:*

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = 0$$

Un punto $\overrightarrow{a} \in A$, *que cumpla la condición necesaria de primer orden es un* punto crítico.

La ecuación vectorial anterior equivale a que cada derivada parcial de f se anule en el punto $\overrightarrow{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = 0,\ \forall k = 1, \ldots, n$$

Las soluciones de este sistema son los posibles candidatos para ser extremo.

El teorema es una condición necesaria, en el sentido de que un punto que no la cumpla, no puede ser extremo; por otra parte que un punto cumpla esta condición no significa que sea extremo, como pasaba en el caso de las funciones de una variable y los puntos de inflexión.

Ejemplo 15.6 *Vamos a calcular los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - 2y^2,$$

para ello plantearemos el sistema $\nabla f(x, y) = 0$, *es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Longrightarrow -2x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Longrightarrow 2x - 4y = 0$$

En este caso es un sistema lineal que tiene por solución única el punto $(0, 0)$, *luego este es el único punto crítico.*

Ejemplo 15.7 *Vamos a calcular los puntos críticos de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 2z + 2yz - 3,$$

planteamos el sistema $\nabla f(x,y,z) = 0$*, es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2x - 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2y + 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 8z - 2x + 2 + 2y = 0$$

Cuya solución se obtiene fácilmente, ya que de la primera ecuación $x = z$ *y de la segunda* $y = -z$*. Estas igualdades llevadas a la última ecuación la transforma en*

$$8z - 2z + 2 - 2z = 0 \Rightarrow 4z = -2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

y por tanto

$$x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

El único punto crítico es

$$\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ya hemos comentado, que como pasaba en una variable, esta condición es necesaria, pero no suficiente. Sin embargo este resultado nos ayuda para calcular los extremos relativos puesto que nos da los candidatos a ser extremo.

Necesitamos una condición suficiente para decidir si un punto crítico dado es un extremo y también como en el caso de una variable, tenemos que recurrir a las segundas derivadas.

Teorema 15.3 (Condiciones suficientes de segundo orden) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $f \in \mathcal{C}^2(A)$ *y* $\overrightarrow{a} \in A$ *un punto crítico de* f*. Sea la sucesión de menores principales asociados al Hessiano de* f*, es decir, sea*

$$\Delta_1 f(\overrightarrow{a}), \Delta_2 f(\overrightarrow{a}), \ldots, \Delta_n f(\overrightarrow{a})$$

siendo

$$\Delta_k f(\overrightarrow{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\overrightarrow{a}) \end{vmatrix}$$

entonces:

1. *Si* $\Delta_k f(\overrightarrow{a}) > 0$*,* $\forall k \Rightarrow \overrightarrow{a}$ *es un mínimo relativo estricto.*
2. *Si* $(-1)^k \Delta_k f(\overrightarrow{a}) > 0$*,* $\forall k \Rightarrow \overrightarrow{a}$ *es un máximo relativo estricto.*
3. *En otro caso, no podemos afirmar nada sobre la naturaleza del punto crítico* $\overrightarrow{a}$*.*

Ejemplo 15.8 *Vamos a determinar los extremos relativos de*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Primero calculamos sus puntos críticos

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2x - y + 1 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2y - x = 0 \qquad \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = 1 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Longrightarrow 2z - 2 = 0 \end{array}\right.$$

Sólo tiene un punto crítico

$$\overrightarrow{a} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

Calculamos ahora el Hessiano

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que evaluamos en el punto $\overrightarrow{a}$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 f(a) & = & 2 \\ \Delta_2 f(a) & = & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \\ \Delta_3 f(a) & = & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \end{array}$$

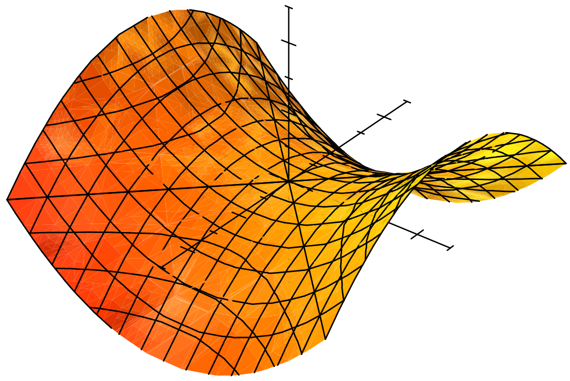
Luego el punto $\overrightarrow{a}$ *es un mínimo relativo estricto.*

Proposición 15.4 (Condiciones suficientes para el caso $n = 2$) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ *y* $(a,b) \in A$ *un punto crítico de* f. *Se* $Hf(a,b)$ *el hessiano evaluado en dicho punto crítico, entonces:*

Teorema 15.5

1. *Si* $|Hf(a,b)| > 0$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b)$ *es un mínimo relativo estricto.*
2. *Si* $|Hf(a,b)| > 0$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)$ *es un máximo relativo estricto.*
3. *Si* $|Hf(a,b)| < 0 \Rightarrow$ *En* (a,b) *no hay extremo y se dice que es un punto de silla.*
4. *Si* $|Hf(a,b)| = 0 \Rightarrow$ *No podemos asegurar nada de la naturaleza de* (a,b).

Observación 15.1 *Un punto crítico que no es extremo se denomina* punto de silla *y verifica que respecto a una determinada dirección es un mínimo relativo y con respecto a otra, es un máximo relativo. ¿Te suena la siguiente imagen?*



Ejemplo 15.9 *Habíamos obtenido como único punto crítico de la función*

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2,$$

que era el punto $(a,b) = (0,0)$*. Si ahora usamos el Hessiano*

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(0,0) &= -2 < 0 \\ \Delta_2 f(0,0) &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Luego el punto $(0,0)$ *es un máximo relativo .*

Ejemplo 15.10 *Habíamos obtenido como único punto crítico de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz + 2z + 2yz - 3,$$

el punto $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$*. El Hessiano se obtiene fácilmente a partir del gradiente ya calculado*

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\Delta_1 f(0,0) &= 2>0\\
\Delta_2 f(0,0) &= \begin{vmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 4>0\\
\Delta_3 f(0,0) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 8\end{vmatrix} = 32-8-8=16>0
\end{aligned}$$

Como todos los menores principales son positivos el punto $\overrightarrow{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *es un mínimo relativo estricto.*

15.3. Extremos condicionados: Método de los multiplicadores de Lagrange

En esta sección vamos a resolver problemas con la siguiente estructura

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(\overrightarrow{x}) \\ \text{Sujeto a} & h(\overrightarrow{x}) = 0; i=1,\ldots,m \end{array}$$

donde $f,h : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos una curva σ, definida como

$$\begin{array}{llll} \sigma & : [-\varepsilon,\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \rightsquigarrow & \sigma(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{array}$$

de forma que se cumpla:

1. $\sigma(0) = \overrightarrow{a}$.

2. $\sigma(t)$ cumple la restricción del problema, es decir, $h(\sigma(t)) = 0$, $\forall t$.

Consideremos ahora la función compuesta

$$\begin{array}{llllll} \sigma & : [-\varepsilon,\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightsquigarrow & \sigma(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \rightsquigarrow & f(\sigma(t)) = f(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{array}$$

Obviamente si $\overrightarrow{a}$ es un mínimo de $f(\overrightarrow{x})$ sobre $h(\overrightarrow{x}) = 0$, entonces, en particular, también lo es sobre la curva $\sigma(t)$, es decir $f(\sigma(t))$ tiene un mínimo en $t_0 = 0$ y por tanto si tomamos $g(t) = f(\sigma(t))$, entonces $g'(0) = 0$.

Usando el teorema de la función compuesta

$$[f(\sigma(t))]' = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \frac{\partial f(\sigma(t))}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f(\sigma(t))}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

y evaluando en $t_0 = 0$

$$\nabla f(\sigma(0)) \cdot \sigma'(0) = 0 \Rightarrow \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \sigma'(0) = 0$$

lo que indica que esos dos vectores son perpendiculares.

Recordemos además que $h(\sigma(t)) = 0$; $\forall t$, luego derivando respecto de t

$$[h(\sigma(t))]' = \frac{\partial h(\sigma(t))}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial h(\sigma(t))}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0$$

De nuevo igualando en $t_0 = 0$

$$\frac{\partial h(a)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial h(a)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla h(\overrightarrow{a}) \cdot \sigma'(0) = 0$$

luego estos dos vectores también son perpendiculares entre sí. lo que implica que $\nabla h(\overrightarrow{a})$ y $\nabla f(\overrightarrow{a})$ están en el mismo subespacio vectorial, es decir son linealmente dependientes y por tanto, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$, que cumple

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) + \lambda \nabla h(\overrightarrow{a}) = 0.$$

Este razonamiento se puede realizar análogamente si el número de restricciones es mayor que 1, lo que nos conduciría al siguiente resultado.

Teorema 15.6 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Si $\overrightarrow{a} \in A$ es un extremo de $f(x)$ condicionado por las restricciones (ligaduras)*

$$h_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad i = 1, \ldots, m < n$$

siendo $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $h_i \in \mathcal{C}^1(A)$; $i = 1, \ldots, m \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, llamados multiplicadores de Lagrange, *tales que $\overrightarrow{a}$ es un punto crítico de la llamada* función lagrangiana *definida por*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, \ldots, x_n)$$

es decir, se cumple

$$\nabla L(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \nabla_x L(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \\ \nabla_\lambda L(\overrightarrow{a}) = h_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

donde ∇_x y ∇_λ representa las derivadas de L respecto de $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{\lambda}$ respectivamente.

Observación 15.2 *De nuevo el teorema nos da las condiciones necesarias para que un punto $\overrightarrow{a}$ sea un extremo de una función codicionado a unas restricciones (se denominan* extremos condicionados*), pero no son suficiente, su cumplimiento no garantiza que el punto sea realmente un extremo.*

Observación 15.3 *Tanto los valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ como los de $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ son desconocidos y se obtienen al resolver el sistema de $n + m$ ecuaciones que proporciona la condición estacionaria*

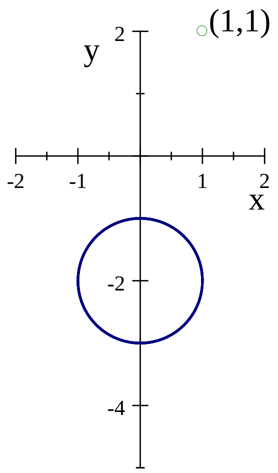
$$\nabla_x L(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla_\lambda L(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow h_1(\overrightarrow{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(\overrightarrow{a}) = 0 \Rightarrow h_m(\overrightarrow{a}) = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 15.11 *Vamos a resolver mediante el método de los multiplicadores de Lagrange el siguiente problema de optimización no lineal, que representa la distancia mínima del punto* $(1,2)$ *a la circunferencia de centro* $(0,-2)$ *y radio* 1

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ \textit{Sujeto a} & h(x,y) = x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Representado gráficamente como:



Construimos la función lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda\left(x^2 + (y+2)^2 - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \quad 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow \quad 2(y-2) + 2\lambda(y+2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow \quad x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1) + \lambda x = 0 \\ (y-2) + \lambda(y+2) = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos x *en la primera ecuación*

$$(x-1) + \lambda x = 0 \Rightarrow x(1+\lambda) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1+\lambda}$$

notar que $\lambda \neq -1$*, ya que en caso contrario en la primera ecuación obtendríamos* $-1 = 0$*, lo que es imposible, y por tanto podemos dividir por* $(\lambda+1)$*. Y hacemos lo propio con* y *en la segunda ecuación*

$$(y-2) + \lambda(y+2) = 0 \Rightarrow y(1+\lambda) = 2 - 2\lambda \Rightarrow y = \frac{2-2\lambda}{1+\lambda}$$

Sustituyendo estos valores en la última ecuación

$$x^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2-2\lambda}{1+\lambda} + 2\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{1+\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

multiplicando por $(1+\lambda)^2$ *toda la ecuación*

$$1+16-(1+\lambda)^2=0 \Rightarrow 17=(1+\lambda)^2$$

Tomando la raíz cuadrado en ambos lados obtenemos dos valores para λ

$$1+\lambda=\pm\sqrt{17} \Rightarrow \lambda=-1\pm\sqrt{17}$$

y esto nos permite obtener dos valores para x *e* y

$$\lambda=-1+\sqrt{17} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{1+\lambda}=\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \\ y=\frac{2-2\lambda}{1+\lambda}=\frac{2-2\left(-1+\sqrt{17}\right)}{\sqrt{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}-2 \end{cases} \Rightarrow P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}-2\right)$$

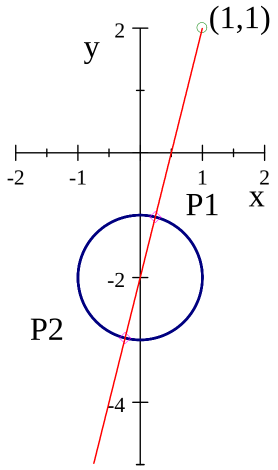
$$\lambda=-1-\sqrt{17} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{1+\lambda}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \\ y=\frac{2-2\lambda}{1+\lambda}=\frac{2-2\left(-1-\sqrt{17}\right)}{-\sqrt{17}}=-\frac{4}{\sqrt{17}}-2 \end{cases} \Rightarrow P_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}-2\right)$$

Sustituyendo en la función $f(x,y)$ *ambos puntos se comprueba que*

$$f(P_1)=f\left(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}-2\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{17}}-1\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{17}}-2-2\right)^2=18-2\sqrt{17}$$

$$f(P_2)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}-2\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}-1\right)^2+\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}-2-2\right)^2=18+2\sqrt{17}$$

Luego como $f(P_1)<f(P_2)$*, el punto* P_1 *es un mínimo y* P_2 *será un máximo. Lo vemos gráficamente*



Ejemplo 15.12 *Halla los puntos extremos que alcanza la función* $f(x,y)=x+y^2$*, cuando* (x,y) *está situado sobre la circunferencia* $x^2+y^2=25$*. Para ello vamos a construir el Lagrangiano*

$$L(x,y,\lambda)=x+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad 1+2\lambda x=0 \quad (1) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad 2y+2\lambda y=0 \quad (2) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-25=0 \quad (3) \end{cases}$$

En (2) sacamos factor común

$$2y\left(1+\lambda\right)=0$$

que nos da como soluciones $y=0$ *o* $1+\lambda=0$. *En el caso de que* $y=0$, *entonces de (3)*

$$x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$$

Y tendremos dos puntos $P_1=(5,0)$ *y* $P_2=(-5,0)$.

En el caso en el que $\lambda=-1$, *entonces sustituyendo en (1)*

$$1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

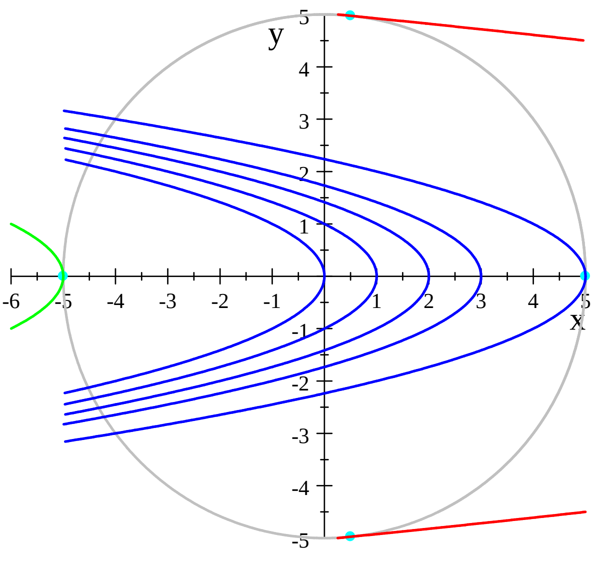
y sustituyendo este valor en (3)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-25=0\Rightarrow y^2=25-\frac{1}{4}=\frac{99}{4}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{99}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$$

y tendremos otros dos puntos $P_3=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)$ *y* $P_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)$. *Evaluamos la función en todos los puntos encontrados*

$$\begin{array}{rcl} f\left(P_1\right) & = & f\left(5,0\right)=5 \\ f\left(P_2\right) & = & f\left(-5,0\right)=-5 \\ f\left(P_3\right) & = & f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)=\frac{1}{2}+\frac{99}{4}=\frac{101}{4} \\ f\left(P_4\right) & = & f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)=\frac{1}{2}+\frac{99}{4}=\frac{101}{4} \end{array}$$

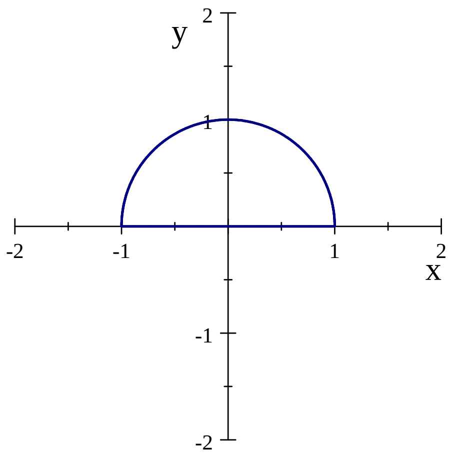
Lo que nos da un mínimo en P_2 *y dos máximos con el mismo valor en* P_3 *y* P_4. *Lo podemos ver en la siguiente gráfica*



15.4. Extremos de funciones sobre conjuntos compactos

Sabemos por el teorema de Weierstrass que si $f : K \subseteq R^n \to R$, es una función continua y K es un conjunto compacto, entonces la función f tiene al menos un máximo y un mínimo absoluto sobre el conjunto K. El problema es que el teorema no nos dice cómo encontrar esos valores. No obstante, como K es compacto entonces es la unión de su interior y su frontera, es decir $K = \delta K \cup \overset{\circ}{K}$, y podemos dividir el problema de buscar los extremos de f en K en dos subproblemas: el primero consiste en buscar los extremos de f en el interior $\overset{\circ}{K}$, las restricciones no influyen en el cálculo de los extremos relativos, es un problema sin restricciones; obviamente los puntos obtenidos con esta consideración deben comprobarse posteriormente para saber si están o no dentro del conjunto K. El segundo problema consiste en buscar los extremos en la frontera, en este caso se tendrían que cumplir las restricciones y sería un problema de Lagrange o problema con restricciones de igualdad..

Ejemplo 15.13 *Vamos a buscar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x^2+xy-x+y^2$ *dentro del conjunto* $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 1;\ y \geq 0\right\}$. *Los primero que hay que notar es que el conjunto* K *es compacto, porque es cerrado, ya que contiene a los puntos de la frontera, representados mediante las igualdades y además es acotado, puesto que es la mitad de una circunferencia como podemos ver en la gráfica siguiente:*



Para resolver el problema lo dividimos en dos partes: buscaremos los extremos en el interior del conjunto y sobre la frontera.

El interior del conjunto sería

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 < 1;\ y > 0\right\}$$

en este caso las restricciones sólo se tendrán en cuenta para eliminar aquellos puntos críticos de $f(x,y)$ *que no cumplan esta restricción. Los puntos críticos de* $f(x,y)$ *se obtienen resolviendo la ecuación*

$$\nabla f(x,y) = 0$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-1 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+2y = 0 \end{array}\right.$$

que es un sistema lineal que tiene una única solución

$$P_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

pero como $y_0 = -\frac{1}{3} < 0$*, esta solución no está en el interior de* K*.*

La frontera del conjunto está definida por las igualdades. En este caso habría dos partes en la frontera: podemos considerar puntos sobre la semicircunferencia ($x^2+y^2-1=0$) *o podemos considerar puntos sobre el eje* OX ($y=0$)*. Por tanto tendremos dos problemas*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2+xy-x+y^2 \\ & y=0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2+xy-x+y^2 \\ & x^2+y^2-1=0 \end{array}$$

Ambos problemas son de Lagrange. El primero es muy sencillo, ya que como $y=0$*, el problema queda*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x^2-x \\ & x \in [-1,1] \end{array}$$

que es un problema de optimización en una variable que resolvemos de la forma usual, buscando los puntos críticos de la función y comparando con los extremos del intervalo

$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

el punto está en el intervalo y si comparamos con los valores de la función en los extremos tendremos

$$\begin{array}{rcl} f(-1) & = & (-1)^2 - (-1) = 2 \\ f(1) & = & (1)^2 - (1) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) & = & \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \end{array}$$

En la semirrecta tendremos un máximo en el -1 *y un mínimo en el punto* $\frac{1}{2}$*, ambos con coordenada* y *nula, lo que nos da 2 puntos en el plano*

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & (-1,0) \\ P_2 & = & \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{array}$$

El segundo problema se resuelve utilizando los multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta la restricción, para ello. construimos el Lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = x^2+xy-x+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & 2x+y-1+2\lambda x = 0 & \Rightarrow & 2x(1+\lambda)+y = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & x+2y+2\lambda y = 0 & \Rightarrow & x+2y(1+\lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow & x^2+y^2-1=0 & \Rightarrow & \end{array} \right.$$

Despejamos λ de la primera y segunda ecuaciones. Suponiendo $x \neq 0$

$$2\lambda x = 1 - y - 2x \Rightarrow \lambda = \frac{1-y-2x}{2x}$$

mientras que si $x = 0$, entonces la primera ecuación nos da $y = 1$. El punto $(0,1)$ cumple la tercera ecuación y sustituyendo estos valores en la segunda obtenemos $\lambda = -1$. Luego tenemos un primer punto solución

$$P_1 = (0,1)\,;\ \lambda = -1$$

Suponiendo $y \neq 0$, de la segunda ecuación

$$x + 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2\lambda y = -x - 2y \Rightarrow \lambda = \frac{-x-2y}{2y}$$

Si $y = 0$, entonces usando esa misma ecuación obtenemos $x = 0$, pero el punto $(0,0)$ no cumple la tercera ecuación y descartamos el caso.

Igualando los valores de λ

$$\frac{1-y-2x}{2x} = \frac{-x-2y}{2y} \Longleftrightarrow 2y\,(1-y-2x) = 2x\,(-x-2y) \Longleftrightarrow 2y-2y^2-4xy = -2x^2-4xy \Longleftrightarrow 2y-2y^2 = -2x^2$$

de donde obtenemos la relación

$$x^2 = y^2 - y$$

que sustituimos en la tercera ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(y^2 - y\right) + y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0,$$

ecuación de segundo grado que tiene por solución

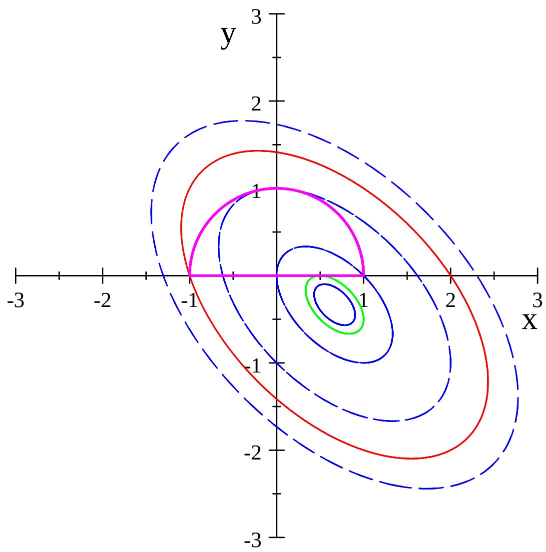
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

la solución negativa no sirve puesto que $y \geq 0$. El valor positivo ya lo hemos obtenido anteriormente ya que x debe ser 0. Sólo tenemos un punto: el $P_3 = (0,1)$.

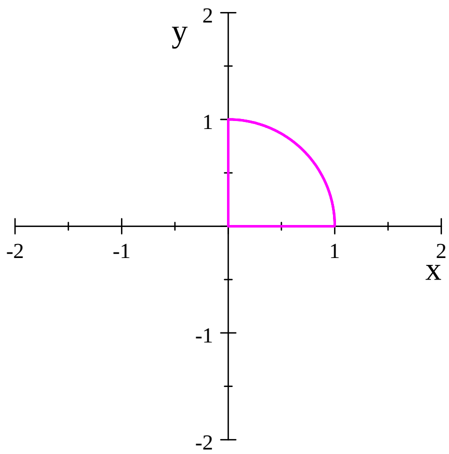
Evaluamos la función en este punto y lo comparamos con los que hemos obtenido en el apartado anterior

$$f\,(0,1) = 1$$

y deducimos que los extremos globales (o absolutos) son $P_1\,(-1,0)$ es un máximo y $P_2 = \left(\frac{1}{2},0\right)$ un mínimo. En la siguiente gráfica vemos en color magenta el conjunto K (la semicircunferencia). Podemos comprobar que la curva verde que determina la curva de nivel correspondiente al mínimo es tangente al conjunto K es el punto $P_1 = \left(\frac{1}{2},0\right)$, de forma que si el valor es menor, ya no habrá intersección. La curva roja corresponde a la curva de nivel de mayor valor, correspondiente al punto $P_2 = (-1,0)$, un valor mayor ya no cortaría a la curva.



Ejemplo 15.14 *Vamos a buscar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = xy^2$ *dentro del conjunto* $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0 y \geq 0\right\}$*. Los primero que hay que notar es que el conjunto* K *es compacto, porque es cerrado, ya que contiene a los puntos de la frontera, representados mediante las igualdades y además es acotado, puesto que es la parte de la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* 1 *que está en el primer cuadrante como podemos ver en la gráfica siguiente:*



Para resolver el problema lo dividimos en dos partes: buscaremos los extremos en el interior del conjunto y sobre la frontera.

El interior del conjunto sería

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1; x > 0 y > 0\right\}$$

en este caso las restricciones sólo se tendrán en cuenta para eliminar aquellos puntos críticos de $f(x,y)$ *que no cumplan esta restricción. Los puntos críticos de* $f(x,y)$ *se obtienen resolviendo la ecuación*

$$\nabla f(x,y) = 0$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y^2 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow 2xy = 0 \end{array} \right.$$

que tiene por solución los puntos de la forma

$$P_0 = (x, 0)$$

pero como $y = 0$*, esta solución no estará en el interior de* K *y no hay candidatos a extremos que cumplan estas condiciones*

La frontera del conjunto está definida por las igualdades. En este caso habría tres partes en la frontera: podemos considerar puntos sobre la semicircunferencia $(x^2+y^2-1=0)$ *, podemos considerar puntos sobre el eje* OX $(y=0)$ *y puntos sobre el eje* OY $(x=0)$ *Por tanto tendremos tres subproblemas*

$$\textit{Problema 1} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy^2 \\ & y = 0 \end{array} \right. ,$$

$$\textit{Problema 2} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy^2 \\ & x = 0 \end{array} \right.$$

y

$$\textit{Problema 3} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & xy^2 \\ & x^2+y^2-1 = 0 \end{array} \right.$$

Los primeros son muy sencillos, ya que en ambos la función toma el valor 0*. Como tenemos que manternos en el conjunto* K*, tendremos puntos de la forma*

$$P_x = (x, 0) \ \textit{ con } x \in [0, 1]$$

y también de la forma

$$P_x = (0, y) \ \textit{ con } y \in [0, 1]$$

en todos ellos la función es igual a 0*.*

El tercer problema se resuelve utilizando los multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta la restricción, para ello. construimos el Lagrangiano

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda \left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

y buscamos sus puntos críticos

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Rightarrow & y^2 + 2\lambda x = 0 & \Rightarrow & y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow & 2xy + 2\lambda y = 0 & \Rightarrow & 2y(x+\lambda) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow & x^2 + y^2 - 1 = 0 & \Rightarrow & \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación tenemos dos opciones

$$y = 0 \ \textit{o} \ x = -\lambda$$

Para el valor $y = 0$*, sustituimos en la tercera ecuación y obtenemos el valor* 1 *para la* x*, obtenemos el punto* $(1, 0)$*, aunque este punto es de la forma* P_y *que ya se han considerado en el apartado anterior.*

$$P_1 = (0, 1)\,; \ \lambda = -1$$

Suponiendo ahora el caso $\lambda = -x$*, sustituimos en la primera ecuación*

$$y^2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow y^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

y podemos sustituir en la tercera ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

descartamos la solución negativa puesto que estaría fuera del conjunto, de este modo

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y por tanto

$$y^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

y de nuevo descartamos la solución negativa para quedarnos con un único punto

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Para los puntos obtenidos en todos los apartados evaluamos la función

$$\begin{aligned} f(P_x) &= f(P_y) = 0 \\ f(P_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

que serían mínimos y máximo respectivamente. Vemos en la gráfica las curvas de nivel de la función xy^2. La curva en verde representa a la curva de nivel mínimo y corresponde con los puntos de los ejes coordenados, mientras que la curva en rojo representa el valor máximo obtenido.