Capítulo 14

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

14.1. Derivadas direccionales y parciales

Definición 14.1 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* A *un conjunto abierto, sea* $\overrightarrow{a} \in A$ *y* $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$*, con* $\overrightarrow{v} \neq 0$*. Llamamos* derivada de f en $\overrightarrow{a}$ en la dirección $\overrightarrow{v}$ (o según $\overrightarrow{v}$) *al límite*

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t}$$

Si $\overrightarrow{v} = 1$*, entonces la derivada anterior se denomina* derivada direccional de f en $\overrightarrow{a}$ según $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 14.1 *Calcularemos la derivada de* $f(x, y) = xy$ *en el punto* $\overrightarrow{a} = (1, 1)$ *en la dirección* $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$*. Para ello, utilizamos la definición que acabamos de introducir*

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) &= D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Luego

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

En la imagen 14.1 vemos la interpretación de la derivada direccional: Es la variación que experimenta la función f en la dirección $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 14.2 *Calculemos la derivada de* $f(x, y) = xyz$ *en el punto* $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$ *en la dirección* $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$*.*

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) &= D_{(1,-1,0)} f(1,1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,1,1) + t(1,-1,0)) - f(1,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t, 1-t, 1) - f(1,1,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)(1-t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t^2 - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t} = \lim_{t\to 0} -t = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$D_{(1,-1,0)} f(1,1,1) = 0.$$

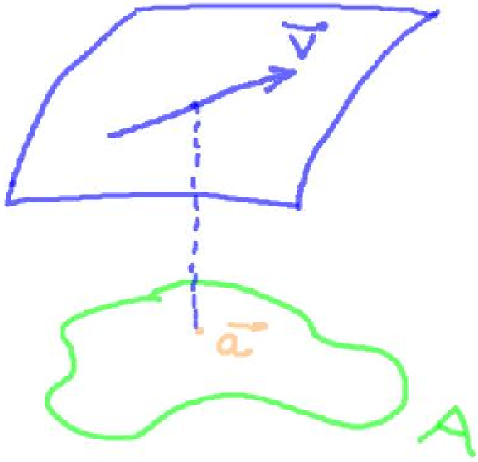

Figura 14.1: Interpretación geométrica de la derivada direccional.

Definición 14.2 *Si tomamos como vector* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_k}$*, el* k*–ésimo vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$*, es decir* $e_k = \left(0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, \ldots, 0\right)$*, entonces* $D_{\overrightarrow{e_k}} f\left(\overrightarrow{a}\right)$ *es la* derivada parcial de f *en* $\overrightarrow{a}$ *respecto a* x_k *y se escribe como* $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$, $D_k f\left(\overrightarrow{a}\right)$ *o también* $f_{x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$*, por tanto*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e_k}\right) - f\left(\overrightarrow{a}\right)}{t}$$

Ejemplo 14.3 *Vamos a obtener la expresión de las derivadas parciales para una función* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*. En este caso* $\overrightarrow{a} = (x, y)$ *y las dos derivadas parciales serían:*

$$\text{En la dirección del eje } x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x, y) + t\left(1, 0\right)\right) - f\left(x, y\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + t, y\right) - f\left(x, y\right)}{t},$$

$$\text{En la dirección del eje } y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x, y) + t\left(0, 1\right)\right) - f\left(x, y\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x, y + t\right) - f\left(x, y\right)}{t}.$$

Por ejemplo, supongamos que $f(x, y) = x^2 + y^2$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + t, y\right) - f\left(x, y\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + t\right)^2 + y^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x^2 + t^2 + 2tx + y^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 2tx}{t} = \lim_{t \to 0} t + 2x = 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x, y + t\right) - f\left(x, y\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x^2 + \left(y + t\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x^2 + t^2 + 2ty + y^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 2ty}{t} = \lim_{t \to 0} t + 2y = 2y
\end{aligned}$$

Observación 14.1 *Vemos que la derivada parcial de una función respecto de una variable x_k, se obtiene al considerar el resto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ como parámetros y tratar a f como una función de sólo de la variable x_k. Por ejemplo para $f(x,y) = xy$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

Para el caso $n = 3$, utilizaremos como variables x, y, z y pondremos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$. Por ejemplo para $f(x,y,z) = xyz$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xy$$

Ejemplo 14.4 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = e^{x^2 + \operatorname{sen} y}$$

Para la variable x hay que suponer que y es un parámetro y por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2 + \operatorname{sen} y}.$$

Mientras que para la derivada respecto variable y, es x el que adquiere ahora el papel de parámetro:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y e^{x^2 + \operatorname{sen} y}$$

Ejemplo 14.5 *Calcularemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Para la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(x^2 + y^2\right) - 2x(xy)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Mientras que para la variable y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^2 + y^2\right) - 2y(xy)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Ejemplo 14.6 *Calculemos las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Supongamos $(x,y) \neq (0,0)$, para la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2\left(x^2 + y^2\right) - 2x\left(x^3\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

mientras que para la variable y, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2yx^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Para el punto $(0,0)$, *es necesario utilizar la definición mediante límites:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3}{t^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0^3}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

Observación 14.2 *A diferencia del caso de funciones reales de una variable, una función* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *puede tener derivadas parciales en un punto y sin embargo, no ser continua en ese punto.*

Ejemplo 14.7 *Vamos a comprobar que la función* $f(x,y)$ *definida como*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$, *pero no es continua en dicho punto.*

Calculamos las derivadas parciales en $(0,0)$, *usando la definición por límites*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t\cdot 0}{t^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot t}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0.$$

Ambos límites existen y son finitos, y podemos decir que la función $f(x,y)$ *tiene derivadas parciales en el punto* $(0,0)$ *con valores*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Comprobaremos ahora que $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$, *para ello vamos a calcular el límite de la función en* $(0,0)$ *usando coordenadas polares*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad\Longrightarrow\quad x=r\cos\theta, y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad=\quad \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{r^2\cos^2\theta+r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

El límite depende de θ *y por tanto no existe y la función no es continua en ese punto.*

14.2. Derivadas parciales sucesivas

Definición 14.3 *Sea* $f : A\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *con* A *un conjunto abierto. Supongamos que* f *tiene derivadas parciales respecto a las variables* x_k *en todos los puntos de* A, *entonces, podemos definir la función* derivada parcial respecto a x_k

$$\begin{array}{rlll}\frac{\partial f}{\partial x_k}: & A\subseteq\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{x})=f_{x_k}(\overrightarrow{x})\end{array}$$

Al ser una función de varias variables es suceptible de ser derivable de nuevo respecto de x_k *o también respecto de otra variable distinta. Estas derivadas se denominan* derivadas parciales segundas, o de segundo orden (o de orden 2) *de* f *respecto de* x_k *y* x_j

$$f_{x_k x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Notar que el orden de derivación es de izquierda a derecha.

Del mismo modo, podemos extender el concepto como sigue:

Definición 14.4 *Se llama* derivada parcial de orden k *respecto de las coordenadas* $i_1, \ldots, i_k$ *a la función*

$$f_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}\right)$$

Diremos que $f \in \mathcal{C}^k(A)$ *si admite derivadas parciales de orden* k *en todas las variables y son continuas.*

Ejemplo 14.8 *Para encontrar las derivadas parciales de orden* 2 *de*

$$f(x,y) = x^2 y + y^3,$$

primero derivamos respecto de cada variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

Y cada derivada parcial obtenida, que vuelve a ser una función en las variables x *e* y*, se vuelve a derivar respecto de cada variable*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y \end{cases}$$

Observemos en este caso que ocurre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Este resultado se puede extender mediante el siguiente teorema.

Teorema 14.1 (Teorema de Schwarz o de Clairaut) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* A *un conjunto abierto y* $f \in \mathcal{C}^1(A)$*. Supongamos que existe la derivada parcial de segundo orden respecto de* x_j *y* x_k*,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ *y es continuas en* $\overrightarrow{a} \in A \Longrightarrow$ *Existe la derivada parcial de 2º orden respecto de* x_k *y* x_j*,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ *y además*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

La hipótesis de continuidad del teorema es esencial. Por ejemplo si tenemos la función

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Veamos que no se cumple el teorema de Schwarz. Primero calculamos las derivadas parciales primeras para puntos $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^5-xy^4-4y^2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Y ahora en $(0,0)$, usando para ello la definición por límites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot0\dfrac{t^2-0^2}{t^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0\cdot t\dfrac{0^2-t^2}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0$$

Por último, vamos a calcular las derivadas parciales cruzadas en $(0,0)$, usando también la definición por límites

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{-t^5}{t^4}}{t}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{-t^5}{t^4}}{t}=1$$

¿Por qué no coinciden? La respuesta es sencilla, hay una hipótesis que falla y es la de la continuidad, vamos a comprobarlo. Si tomamos la derivada parcial segunda cruzada para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\left(x^4-5y^4+12x^2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^4y-y^5+4x^2y^3\right)4y\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

y tomamos límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\lim_{y\to0}\frac{-y^6}{\left(y^2\right)^3}=-1,$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(10x^2y^2+x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^6}{\left(x^2\right)^3}=1,$$

nos dan valores distintos, por tanto el límite no existe, lo que hace que esta derivada parcial no sea continua y no se puede aplicar el Teorema de Clairaut.

Definición 14.5 *Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Supongamos que existe $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a})$. Llamamos gradiente de f en $\overrightarrow{a}$ y se expresa como $\nabla f(\overrightarrow{a})$ al vector definido por*

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})\right)$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada direccional y el gradiente de una función en un punto, se puede comprobar que

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = \langle \nabla f(\overrightarrow{a}); v\rangle = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v}$$

siendo $\langle ; \rangle$ el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$.

Definición 14.6 *Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^2(A)$, definimos la* matriz Hessiana *de f en $\overrightarrow{a}$, a la matriz de $M_{n\times n}(R)$ definida por*

$$Hf(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

se denomina Hessiano *o* determinante Herssiano *de f en $\overrightarrow{a}$*

$$\det(Hf(\overrightarrow{a})) = |Hf(\overrightarrow{a})|.$$

Se llama menor Hessiano *de f de orden k en $\overrightarrow{a}$, $\Delta_k f(\overrightarrow{a})$ a*

$$\Delta_k f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

14.3. Diferencial de una función en un punto

Hemos visto que el hecho de que una función escalar tenga derivadas parciales, no implica que la función sea continua. Sin embargo, podemos definir una propiedad que sí implique esta condición: la diferenciabilidad.

Definición 14.7 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Diremos que f es diferenciable en $a \Longleftrightarrow \exists \quad L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con L una aplicación lineal tal que se cumple*

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f(\overrightarrow{a}) - L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|} = 0$$

siendo $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ y donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea, asociada al producto euclídeo en $\mathbb{R}^n$.

Si se cambia $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}$, el límite también puede reescribirse como

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - L(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\|} = 0$$

La aplicación lineal L, se denomina la diferencial de f *en $\overrightarrow{x}$ y escribiremos*

$$L\left(\overrightarrow{h}\right) = df(\overrightarrow{a}) \cdot h = \left\langle df(\overrightarrow{a}); \overrightarrow{h}\right\rangle$$

Observación 14.3 *La diferencial es más "fuerte", por exigente, que la derivada direccional, ya que en este caso el límite en un punto se toma siguiendo una dirección determinada, mientras que para la diferencial esto no ocurre.*

Observación 14.4 *En el caso $n = 1$, la diferencial de una función en un punto $a \in \mathbb{R}$, coincide con la derivada de la función $f'(a)$ en ese punto*

$$f'(a) = df(a)$$

puesto que si f es derivable en un punto a, entonces el siguiente límite existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

de forma que pasando el límite a la izquierda

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

y agrupando en un único denominador

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

podemos comprobar que

$$L(h) = f'(a)\,h,$$

que es una aplicación lineal.

Proposición 14.2 *La diferencial de una función f en un punto $df(\overrightarrow{a})$, si existe, es única.*

Teorema 14.3 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$.*

$$f \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \Longrightarrow f \text{ es continua en } \overrightarrow{a}$$

Teorema 14.4 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Si f es diferenciable en $\overrightarrow{a} \Rightarrow$ Existen las derivadas direccionales de f en $\overrightarrow{a}$ para cualquier vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ y además*

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v}$$

Proof. Sea $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ y supongamos que $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, en caso contrario se toma $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$. Como f es diferenciable en $\overrightarrow{a}$, entonces

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f(\overrightarrow{a}) - df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{h}}{\|h\|} = 0$$

de donde se deduce que

$$f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - f(\overrightarrow{a}) - df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{h} = \alpha\left(\overrightarrow{h}\right)\left\|\overrightarrow{h}\right\|$$

con

$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\|\to\infty} \alpha\left(\overrightarrow{h}\right) = 0$$

Si ahora tomamos $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{v}$, entonces cuando $t \to 0 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{h} \right\| \to 0$ y por tanto se cumple

$$f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a}) - df(\overrightarrow{a}) \cdot t\overrightarrow{v} = \alpha(t\overrightarrow{v}) \|t\overrightarrow{v}\|$$

es decir

$$f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \cdot t\overrightarrow{v} + \alpha(t\overrightarrow{v}) \|t\overrightarrow{v}\|$$

y dividiendo por t

$$\frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha(t\overrightarrow{v}) \frac{\|t\overrightarrow{v}\|}{t}$$

y tomando límites cuando $t \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} &= \lim_{t\to 0} df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha(t\overrightarrow{v}) \frac{\|t\overrightarrow{v}\|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} + \alpha(t\overrightarrow{v}) \|\overrightarrow{v}\| \frac{|t|}{t} \\ & \lim_{t\to 0} df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\| \lim_{t\to 0} \alpha(t\overrightarrow{v}) \frac{|t|}{t} \end{aligned}$$

está claro que

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t\overrightarrow{v}) = 0$$

por otra parte $\frac{|t|}{t}$ está acotado ya que sólo toma valores -1 y 1, por tanto

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t\overrightarrow{v}) \frac{|t|}{t} = 0$$

y se cumpliría

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v}$$

pero el primer límite, es la definición de derivada direccional, luego se cumple

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v}$$

■

14.3.1. Relación entre las derivadas parciales y la derivada direccional

Del apartado anterior se deduce que si f es diferenciable en $\overrightarrow{a}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{e_k} \quad k = 1, \ldots, n$$

Como además si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\{\overrightarrow{e_k}\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$v = v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n}$$

lo que nos conduce a

$$D_{\overrightarrow{v}} f(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{v} = df(\overrightarrow{a})(v_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + v_n\overrightarrow{e_n})$$

y siendo $df\left(\overrightarrow{a}\right)$ una función lineal, se cumple

$$\begin{aligned} df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+v_n\overrightarrow{e_n}\right) &= df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_1\overrightarrow{e_1}\right)+\cdots+df\left(\overrightarrow{a}\right)\left(v_n\overrightarrow{e_n}\right) \\ &= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right)+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right) \end{aligned}$$

y con la definición de gradiente

$$df\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}.$$

Teniendo en cuenta el resultado del teorema obtendremos

$$D_{\overrightarrow{v}}f\left(\overrightarrow{a}\right)=df\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}$$

Ejemplo 14.9 *Vamos a calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=xy$ en el punto $\overrightarrow{a}=(1,1)$ en la dirección $\overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Para ello, sólo necesitamos calcular el gradiente*

$$\nabla f(x,y)=(y,x),$$

evaluar este gradiente en el punto $\overrightarrow{a}=(1,1)$

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)=\nabla f(1,1)=(1,1),$$

y realizar el producto escalar entre este vector y el vector $\overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v}=(1,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Expresión general de la diferencial de una función

Consideremos la función identidad restringida a la k–ésima coordenada, es decir, definimos $g_k(x_1,\ldots,x_n)$ como

$$g_k(x_1,\ldots,x_n)=x_k,$$

que cómo sólo depende de x_k, y para simplificar, podemos poner

$$dg_k(x_1,\ldots,x_n)=dx_k$$

con esta notación y usando las relaciones entre la diferencial y el gradiente

$$dx_k\left(\overrightarrow{v}\right)=dg\left(\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{v}=v_1\frac{\partial g_k}{\partial x_1}+\ldots+v_1\frac{\partial g_k}{\partial x_n}=v_k$$

Finalmente podemos poner:

$$\begin{aligned} df\left(\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{v} &= v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right)+\cdots+v_1\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overrightarrow{a}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overrightarrow{a}\right)dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \end{aligned}$$

El recíproco se cumple con continuidad.

Proposición 14.5 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Si f admite todas las derivadas parciales y son continuas en $\overrightarrow{a} \Rightarrow f$ es diferenciable en $\overrightarrow{a}$.*

Proposición 14.6 *Sea $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Con f y g es diferenciable en $\overrightarrow{a}$.*

1. *La función $f \pm g$ es diferenciable y*
$$d(f \pm g)(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a}) \pm dg(\overrightarrow{a}).$$
2. *La función $f \cdot g$ es diferenciable y*
$$d(f \cdot g)(\overrightarrow{a}) = df(\overrightarrow{a})\, g(\overrightarrow{a}) + dg(\overrightarrow{a})\, f(\overrightarrow{a}).$$
3. *Si $g(\overrightarrow{a}) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable y*
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\overrightarrow{a}) = \frac{g(\overrightarrow{a})\, df(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{a})\, dg(\overrightarrow{a})}{g(\overrightarrow{a})^2}.$$

Podemos extender el concepto de diferenciabilidad a funciones en campos vectoriales.

Definición 14.8 *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. F es diferenciable en $\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \exists\ L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, una aplicación lineal tal que*
$$\lim_{\left\|\overrightarrow{h}\right\| \to 0} \frac{F\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h}\right) - F(\overrightarrow{a}) - L\left(\overrightarrow{h}\right)}{\left\|\overrightarrow{h}\right\|} = \overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^m.$$
Como antes pondremos
$$L \equiv dF(\overrightarrow{a}),$$
que en este caso sería una matriz.

Proposición 14.7 *Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con A un conjunto abierto y $\overrightarrow{a} \in A$. Si $F = (f_1, \ldots, f_m)$*
$$F \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \Longleftrightarrow f_k \text{ es diferenciable en } \overrightarrow{a} \text{ como campo escalar, } k = 1, \ldots, m$$
La diferencial viene dada por la llamada matriz Jacobiana, *que escribimos JF o ∇F*
$$dF(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overrightarrow{a})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

Cuando la matriz Jacobiana es cuadrada, su determinante recibe el nombre de Jacobiano.

Ejemplo 14.10 *Dado el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*
$$F(x, y, z) = \left(x + y + z, x^2 - yz + z^2, xyz\right)$$
entonces
$$JF = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & -z & 2z - y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Ejemplo 14.11 *Dado el campo vectorial* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$F(x, y) = \left(x^2 - y, 0, \operatorname{sen}(xy), e^{2y}\right)$$

entonces

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & 2e^{2y} \end{pmatrix}$$

14.3.2. Teoremas importantes

Teorema 14.8 (Teorema de la función compuesta - Regla de la Cadena) *Sea* $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*;* $G : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, con* U *y* V *abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente. Si* F *es diferenciable en* $\overrightarrow{a} \in U$ *y* G *diferenciable en* $F(\overrightarrow{a}) \in V \Rightarrow G \circ F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, es diferenciable en* $\overrightarrow{a}$ *y además*

$$d(G \circ F)(\overrightarrow{a}) = dG(F(\overrightarrow{a}))\, dF(\overrightarrow{a})$$

que es una aplicación lineal de R^n *en* R^p*.*

Usando la matrices Jacobianas

$$J(G \circ F)(\overrightarrow{a}) = JG(F(\overrightarrow{a}))\, JF(\overrightarrow{a})$$

que es un producto de matrices.

En particular si $p = 1 \Rightarrow J(G \circ F)(\overrightarrow{a})$ *es un vector columna cuyos elementos son*

$$\frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_k}(F(\overrightarrow{a}))\, \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}), \quad k = 1, \ldots, m$$

siendo f_j *la componente* j*–ésima del campo vectorial* F*.*

Ejemplo 14.12 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *con* $f(x, y, z) = \left(x^2 z - 3\cos y, 3 - zy\right)$ *y sea* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(u, v) = ue^{-5v}$*. Calcularemos el valor de* $J(g \circ f)(x, y, z)$*.*

Vamos a obtener el resultado de dos formas distintas. La primera es a través del teorema de la función compuesta. Para ello necesitamos las matrices Jacobianas de cada una de las funciones

$$Jf = \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$$

$$Jg(u, v) = \left(e^{-5v}, -5ue^{-5v}\right)$$

por el teorema de la función compuesta, tendremos

$$J(g \circ f)(x, y, z) = Jg(f(x, y, z))\, Jf(x, y, z)$$

es decir

$$\begin{aligned} Jg(f(x,y,z))\, Jf(x,y,z) &= Jg\left(\left(\underbrace{x^2 z - 3\cos y}_{u}, \underbrace{3 - zy}_{v}\right)\right) Jf(x,y,z) \\ &= \left(e^{-5(3-zy)}, -5\left(x^2 z - 3\cos y\right) e^{-5(3-zy)}\right) \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix} \\ &= \Big(2xze^{-5(3-zy)}; 3\operatorname{sen} ye^{-5(3-zy)} + 5z\left(x^2 z - 3\cos y\right) e^{-5(3-zy)}, x^2 e^{-5(3-zy)} + 5y\,(x^2 z \end{aligned}$$

La otra forma es construir la función compuesta

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g\left(\underbrace{x^2z-3\cos y}_{u},\underbrace{3-zy}_{v}\right)\\ &= \left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-zy)}\end{aligned}$$

y calcular la matriz Jacobiana de esta función.

$$J(g\circ f) = \Big((2xz)\,e^{-5(3-zy)}, 3\,\mathrm{sen}\,ye^{-5(3-zy)} + 5z\left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-zy)}, x^2e^{-5(3-zy)} + 5y\left(x^2z-3\cos y\right)e^{-5(3-z$$

Ejemplo 14.13 *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *con* $f(x,y)=(2x+3y,3y-3)$ *y sea* $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *con* $f(u,v)=uv$. *Calcularemos el valor de* $J(g\circ f)(x,y,z)$.

Como en el ejemplo anterio, vamos a obtener el resultado de dos formas distintas. La primera es a través del teorema de la función compuesta. Para ello necesitamos las matrices Jacobianas de cada una de las funciones

$$Jf = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Jg(u,v) = (v,u)$$

$$\begin{aligned}Jg(f(x,y,z))\,Jf(x,y,z) &= Jg\left(\left(\underbrace{2x+3y}_{u},\underbrace{3y-3}_{v}\right)\right)Jf(x,y,z)\\ &= (3y-3,2x+3y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3\end{pmatrix}\\ &= (6y-6,18y+6x-9)\end{aligned}$$

La otra forma es construir la función compuesta

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g\left(\underbrace{2x+3y}_{u},\underbrace{3y-3}_{v}\right)\\ &= (2x+3y)(3y-3)\end{aligned}$$

y calcular la Jacobiana de esta función.

$$J(g\circ f) = (2(3y-3), 3(3y-3)+3(2x+3y)) = (6y-6,18y+6x-9)$$

Teorema 14.9 (Teorema de la función inversa) *Sea* $F:A\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$; $F\in\mathcal{C}^q(A)$. *Supongamos* $\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n$ *y supongamos* $|JF(a)|\neq 0 \Rightarrow$

1. $\exists U_{\overrightarrow{a}}$ *tal que* $F:U_{\overrightarrow{a}}\longrightarrow F(U_{\overrightarrow{a}})$ *es una biyección.*

2. $F(U_{\overrightarrow{a}})$ *es un abierto.*

3. $\exists\ F^{-1}:F(U_{\overrightarrow{a}})\longrightarrow U_{\overrightarrow{a}}$ *con* $F^{-1}\in\mathcal{C}^q(A)$.

4. $\forall y \in F\left(U_{\overrightarrow{a}}\right) \Rightarrow \left(F^{-1}\right)' = \dfrac{1}{F'\left(F^{-1}(y)\right)}$.

$\dfrac{1}{F'\left(F^{-1}(y)\right)}$ *se refiere a la inversa de una matriz, es decir,* $JF^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right) = \left(JF\left(x_0\right)\right)^{-1}$

Ejemplo 14.14 *Vamos a buscar la derivada de la inversa de $f(x) = x^2$ utilizando el teorema de la función inversa. Sabemos que $y = x^2$, por tanto $x = \sqrt{y}$ de este modo*

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad y \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

notar que

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{x} = 1$$

O bien por otra forma

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'\left(\sqrt{y}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ejemplo 14.15 *Sea el cambio de coordenadas entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares*

$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{array}\right\}$$

Tenemos la función φ definida como

$$\begin{array}{ccc} [0,\infty[\times [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \rightsquigarrow & \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

de forma que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{array}\right.$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

es la matriz Jacobiana, podemos y por tanto

$$J\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar efectivamente que si usamos el cambio inverso, de cartesianas a polares

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} = \mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{r\cos\theta}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{array}\right.$$

Se usa para cambios de variables de ecuaciones en derivadas parciales.

Ejemplo 14.16 *Dada $u \equiv u(t,x)$ y la ecuación en derivadas parciales*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Vamos a calcular la expresión de la ecuación si hacemos el cambio

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & x + ct, \\ \\ \beta & = & x - ct. \end{array}$$

El objetivo es expresar la ecuación en derivadas parciales en términos de las variables α y β. El cambio de variables viene dado por la función:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t,x) & \rightsquigarrow & \varphi(t,x) = (\alpha,\beta) = (x+ct, x-ct) \end{array}$$

En primer lugar, debemos conocer si el cambio de coordenadas es válido.

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow |J\varphi| = -c - c = -2c \neq 0; \quad \forall c \neq 0$$

Luego si $c \neq 0$, el cambio es válido.

Para obtener la ecuación en las nuevas variables, hay que buscar la expresión de las derivadas parciales de (t,x) frente a las variables (α,β), haciendo uso de la regla de la cadena, puesto que

$$u(t,x) = u(\alpha(t,x), \beta(t,x))$$

tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial \alpha} - c\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial \alpha} - c\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) - c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) \\ &= c\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) - c\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) \\ &= c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}c - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}c\right) - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha}c - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}c\right) \\ &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \Longrightarrow c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0 \\ -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} &= 0 \end{aligned}$$

como $c \neq 0$*, o de lo contrario el cambio no es válido, tendremos:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

que es una ecuación bastante más sencilla que la inicial.

Algunas veces las funciones están expresadas en forma implícita, es decir, mediante ecuaciones de la forma

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

como por ejemplo, la ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r = 1$, que viene dada por

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Y entonces podríamos pensar en si una o varias variables son función de las restantes, por ejemplo, en la ecuación de la circunferencia, podemos poner a x como función de y, del siguiente modo

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2},$$

o también podríamos poner a y en función de x, de este otro

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

De esta forma podríamos comprobar la derivabilidad de dicha expresión respecto de la variable correspondiente. Notar que en este caso hay dos posibles funciones y tenemos que quedarnos con una de las dos, para ello necesitaremos información adicional sobre las variables, necesitamos conocer el valor de la función en un punto. En el ejemplo de la circunferencia, si nos dicen que la función pasa por el punto $(0,1)$ entonces la elección para y debe ser $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

A veces no es sencillo o incluso imposible econtrar una expresión explícita de un variable respecto de otra, por ejemplo

$$x^4 + x^2 y^2 + y^3 + y^4 - 2 = 0,$$

no obstante, en estos casos, aún es posible conocer si una variable variable es derivable respecto de otra, sin tener que encontrar esa expresión explícita. El resultado que nos permite realizar esta afirmación es el teorema de la función implícita.

Teorema 14.10 (Teorema de la función implícita) *Sean* m *ecuaciones*

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0; \quad k = 1, \ldots, m$$

con $\varphi_k : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$*, funciones diferenciables en* A*, abierto de* $\mathbb{R}^n, m > 1$*. Si* $\overrightarrow{a} \in A$ *es un punto que cumple*

$$\varphi_k(\overrightarrow{a}) = 0; \quad k = 1, \ldots, m$$

y tal que el determinante definido como

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+1}}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n+m}}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+1}}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{n+m}}(\overrightarrow{a}) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces existe un entorno del punto $\overrightarrow{a}$, $U_{\overrightarrow{a}}$, tal que las variables $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ son funciones de las variables $x_1,\ldots,x_n$, de forma implícita mediante las expresiones de φ_k; $\quad k=1,\ldots,m$*. Además*

$$\frac{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = -\left(\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}\right)^{-1}\left(\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right)$$

Ejemplo 14.17 *Vamos a comprobar que la ecuación*

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

define a z como función implícita de (x,y) en un entorno del punto $(0,0,1)$. Y vamos a calcular las derivadas parciales hasta el segundo orden de z en el punto $(0,0)$.

En este caso tenemos

$$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

Por una parte

$$\varphi(0,0,1) = 0^2+0^2+1^2-1 = 1-1 = 0$$

y por otra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2z \Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$$

Luego z es función implícita de (x,y) en el entorno del punto $(0,0)$ y además $z(0,0)=1$.

Calculamos las derivadas parciales, derivando directamente sobre la ecuación, teniendo en cuenta que z es una función de x e y, es decir, $z \equiv z(x,y)$. Si derivamos respecto a x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z(x,y)^2-1\right) &= 0 \\ 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \Longrightarrow x+z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

y evaluando en el punto $(0,0)$

$$0+z(0,0)\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$$

Y si derivamos respecto a y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z(x,y)^2-1\right) &= 0 \\ 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \Longrightarrow y+z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

y evaluando en el punto $(0,0)$

$$0+z(0,0)\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Para las derivadas segundas tendremos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

y evaluando en $(0,0)$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\right)^2 + z(0,0)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$, *que hemos encontrado en el apartado anterior*

$$1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -1$$

Del mismo modo se calcula la derivada segunda respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y + z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

que en el punto $(0,0)$, *y usando que* $z(0,0) = 1$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$

$$1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -1$$

Finalmente buscaremos las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *y* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *que veremos que coinciden tal y como dice la tesis del teorema de Schwarz.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(y + z\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0
\end{aligned}$$

e igualando en $(0,0)$, *con*$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$ *y* $z(0,0) = 1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

Ejemplo 14.18 *Estudia si*

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 9
\end{aligned}$$

definen a z *e* y *como funciones implícitas de* x *en el punto* $(0,0,3)$. *En este caso las funciones implicadas son*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y,z) &= x + y + z - 3 \\
\varphi_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 9
\end{aligned}$$

1. *Primero comprobaremos que el punto en cuestión resuelve las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\varphi_1(0,0,3) &= 0+0+3-3=0\\ \varphi_2(0,0,3) &= x^2+y^2+z^2=0^2+0^2+3^2=9\end{aligned}$$

2. *En segundo lugar calculamos el determinantes Jacobiano de las funciones respecto de las variables dependientes (y, z)*

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2y & 2z\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}\right|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2y & 2z\end{vmatrix}=2z-2y$$

y por tanto

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}(0,0)\right|=2\cdot 3-2\cdot 0=6\neq 0$$

Luego la respuesta es sí. Vamos a calcular las derivadas primeras y segundas de y, z respecto de x, es decir, vamos a calcular y', z', y'', z'' en el punto $x=0$. Para ello derivamos directamente en las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z-3) &= 0\Leftrightarrow 1+y'+z'=0\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2-9\right) &= 0\Leftrightarrow 2x+2yy'+2zz'=0\Rightarrow x+yy'+zz'=0\end{aligned}$$

y evaluamos en $x=0$; hay que tener en cuenta que en el punto $(0,0,3)$, ocurre

$$\begin{aligned}y(0) &= 0\\ z(0) &= 3\end{aligned}$$

Y sustituyendo en las ecuaciones anteriores

$$\left.\begin{array}{c}1+y'(0)+z'(0)=0\\ \\ 2\cdot 0+2y(0)\,y'(0)+2z(0)\,z'(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}1+y'(0)+z'(0)=0\\ \\ 6z'(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}y'(0)=-1\\ \\ z'(0)=0\end{array}\right\}$$

Derivando de nuevo obtendremos las segundas derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x+y+z-3) &= 0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(1+y'+z'\right)=0\Rightarrow y''+z''=0\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+y^2+z^2-9\right) &= 0\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(x+yy'+zz'\right)=0\Rightarrow 1+\left(y'\right)^2+yy''+\left(z'\right)^2+zz''=0\end{aligned}$$

que junto con los datos obtenidos antes

$$\left.\begin{array}{c}y''(0)+z''(0)=0\\ \\ 1+(y'(0))^2+y(0)\,y''(0)+(z'(0))^2+z(0)\,z''(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}y''(0)+z''(0)=0\\ \\ 2+3z''(0)=0\end{array}\right\}$$

que tiene por solución

$$\begin{aligned}z''(0) &= -\frac{2}{3}\\ y''(0) &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Observación 14.5 *La hipótesis de que la derivada no se anule es fundamental, por ejemplo si tenemos la ecuación*

$$x^2 + y^2 = 1$$

vamos a ver que no define a función implítica en el punto $(1,0)$*. La función es* $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ *y por tanto la primera hipótesis se cumple ya que* $\varphi(1,0) = 1^2 + 0^2 - 1 = 0$*, mientras que para probar la segunda hipótesis necesitamos* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$*, pero* $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0) = 0$*, y vemos que no se cumple, de hecho la derivada* $y'(0)$ *no existe, si derivamos en la ecuación directamente*

$$2x + 2y(x)\, y'(x) = 0$$

y sustituimos en el punto $x = 0$*, sabiendo que* $y(0) = 0$*, obtendremos*

$$2 \cdot 1 + 2y(0)\, y'(0) = 0 \Rightarrow 2 = 0$$

lo que es imposible.

14.4. Operadores diferenciales

14.4.1. Gradiente

Hemos visto la definición del gradiente de una función escalar

$$\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

como

$$\nabla f \left(x_1, \ldots, x_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right)$$

que podemos extenderlo a funciones vectoriales

$$\begin{array}{rccl} F: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & F(\overrightarrow{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

que en este caso coincide con el Jacobiano

$$\nabla F(x_1, \ldots, x_n) = JF(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial fm}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

14.4.2. Divergencia

Sea

$$\begin{array}{rccl} F: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & F(\overrightarrow{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

un campo vectorial, definimos la *divergencia a*

$$\nabla \cdot F = \operatorname{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overrightarrow{a}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})$$

que podría ponerse como

$$\operatorname{div}(F) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right); (f_1, f_2, \cdots, f_n) \right\rangle$$

Por ejemplo la Ley de Gauss de un campo eléctrico viene dada por la ecuación

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

siendo $\overrightarrow{E}$ el campo eléctrico, ρ la densidad de carga y ε_0 la permisividad del vacío. Si el campo $\overrightarrow{E}$ es conservativo, entonces $\exists \phi \equiv \phi(x, y, z)$ potencial del campo tal que

$$\overrightarrow{E} = -\nabla \phi \Rightarrow \nabla \cdot \overrightarrow{E} = \nabla^2 \phi = \rho$$

14.4.3. Rotacional

Dado un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rccl} F: & A \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \end{array}$$

definimos el *rotacional de F* al campo vectorial

$$\nabla \times F = \operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \overrightarrow{k}$$

donde $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

En física las leyes de Faraday y de Ampère vienen dadas por un rotacional. La Ley de Farady

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

donde $\overrightarrow{B}$ es un campo magnético.

Y la ley de Ampère

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

14.4.4. Laplaciano

Dado un campo escalar en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

definimos el *Laplaciano de f* a

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

El operador Laplaciano se utiliza para plantear la llamada ecuación de Laplace (también llamada ecuación del potencial) bidimensional homogénea que en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

donde $f(x,y)$ es un campo escalar. Vamos a caclular la expresión del gradiente en coordenadas polares. Para ello tenemos en cuenta que $x = r\cos\theta$ y que $y = r\operatorname{sen}\theta$ y que el cambio inverso nos da $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. Necesitaremos matriz jacobiana de este cambio

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r} = \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned}$$

Usando el teorema de la función compuesta tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

y para la derivada segunda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial r}{\partial x}\operatorname{sen}\theta}{r^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)r\cos\theta - (\mathrm{c}\cdots}{r^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} + 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} + 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{-\frac{\partial\theta}{\partial y}r\operatorname{sen}\theta - \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta}{r^2}\\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right)r\operatorname{sen}\theta - (\mathrm{s}}{r^2}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

Y ahora sustituimos en la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} + 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\right) +\\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\right)\\
\Rightarrow\quad &\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = 0
\end{aligned}
$$

De igual manera que se define el gradiente de un campo escalar, se define el gradiente de un campo vectorial que da como resultado la matriz Jacobiana (recordemos que no es otra cosa que calcular el gradiente de cada una de las componentes del campo vectorial y colocarlas por filas).

Ejemplo 14.19 *Calcula el gradiente de los siguientes campos vectoriales*

$$\vec{F}(x,y) = \left(x^2 - y^2, xy\right), \quad \vec{G}(x,y,z) = \left(x^2y^2, e^{xyz}, \operatorname{sen}(x+yz)\right).$$

Como hemos dicho, se calcula la Jacobiana de cada función

$$JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$JG = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y & 0 \\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ \cos(x+yz) & z\cos(x+yz) & y\cos(x+yz) \end{pmatrix}$$

También se define la *divergencia de un campo tensorial* (matriz cuyas entradas son funciones escalares) haciendo la divergencia de cada una de las filas de la matriz y colocando el resultado como un vector.

Ejemplo 14.20 *Calcula la divergencia de los siguientes tensores*

$$I = \begin{pmatrix} m\left(y^2+z^2\right) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m\left(x^2+z^2\right) & -myz \\ -mxz & -myz & m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} xyz & y & x^2+z^2 \\ xy & 0 & 1 \\ x^2+y^2 & z^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la definición de divergencia de campo tensorial

$$\begin{aligned} \nabla I &= \left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x}+\frac{\partial f_{12}}{\partial y}+\frac{\partial f_{13}}{\partial z}, \frac{\partial f_{21}}{\partial x}+\frac{\partial f_{22}}{\partial y}+\frac{\partial f_{23}}{\partial z}, \frac{\partial f_{31}}{\partial x}+\frac{\partial f_{32}}{\partial y}+\frac{\partial f_{33}}{\partial z}\right) \\ &= (0-mx-mx, -my+0-my, -mz-mz+0) \\ &= (-2mx, -2my-2mz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla A &= \left(\frac{\partial f_{11}}{\partial x}+\frac{\partial f_{12}}{\partial y}+\frac{\partial f_{13}}{\partial z}, \frac{\partial f_{21}}{\partial x}+\frac{\partial f_{22}}{\partial y}+\frac{\partial f_{23}}{\partial z}, \frac{\partial f_{31}}{\partial x}+\frac{\partial f_{32}}{\partial y}+\frac{\partial f_{33}}{\partial z}\right) \\ &= (yz+1+2z, y+0+0, 2x+0+0) \\ &= (1+yz+2z, y, 2x) \end{aligned}$$

Ejemplo 14.21 *Calcula el gradiente y la divergencia del gradiente del siguiente campo vectorial*

$$\vec{u}(x,y,z) = \left(\frac{M}{2EI}\left(z^2+\nu\left(x^2-y^2\right)\right), \frac{\nu M}{2EI}xy, -\frac{M}{2EI}xz\right),$$

donde ν, E, I son constantes. Hay que calcular $\nabla\vec{u}$ y $\nabla\cdot\nabla\vec{u}$.

1. Nota: el tensor I anterior es el tensor de inercia de una partícula de masa m situada en la posición (x,y,z), y el campo $\vec{u}$ representa el vector de desplazamientos de una barra cilíndrica que está encastrada en uno de sus extremos y sobre la que actúa una densidad de cargas M en el otro extremo. E, I son parámetros que indican el tipo de material del cilindro.