Capítulo 6

Aplicaciones lineales

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Una* aplicación lineal *entre V y W es una aplicación f*

$$f : V \longrightarrow W$$

que cumple con los siguientes requisitos:

1. *Suma:*
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

2. *Producto por escalares:*
$$\forall \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

Una aplicación lineal también se denomina homomorfismo *y si $V = W$ entonces f es un* endomorfismo.

Definición 6.2 *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, a la expresión $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$ se denomina* expresión analítica de f.

Ejemplo 6.1 *La aplicación*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida como

$$f(x, y, z) = (2x + 3y, 2y - 3z)$$

es una aplicación lineal.

Solución: Veamos que cumple las dos propiedades

1. Suma: Tomamos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Por una parte sumaremos los dos vectores
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
y por otra calculamos la imagen de cada uno de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$
$$f(\vec{u}) = (2x_1 + 3y_1, 2y_1 - 3z_1)$$
$$f(\vec{v}) = (2x_2 + 3y_2, 2y_2 - 3z_2)$$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2), 2(y_1+y_2)-3(z_1+z_2))$$

Las coordenadas son números reales, por tanto podemos utilizar la propiedad distributiva

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = ((2x_1+2x_2)+(3y_1+3y_2), (2y_1+2y_2)-(3z_1+3z_2))$$

y reordenando

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= (2x_1+3y_1+2x_2+3y_2, 2y_1-3z_1+2y_2-3z_2) \\ &= (2x_1+3y_1, 2y_1-3z_1)+(2x_2+3y_2, 2y_2-3z_2) \\ &= f(\vec{u})+f(\vec{v}). \end{aligned}$$

2. Producto por un escalar: Tomamos $\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, por una parte

$$\alpha\vec{u} = \alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

y si ahora calculamos la imagen de $\vec{u}$ y de $\alpha\vec{u}$

$$f(\vec{u}) = f(x,y,z) = (2x+3y, 2y-3z)$$

$$f(\alpha\vec{u}) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x+3\alpha y, 2\alpha y-3\alpha z)$$

teniendo en cuenta que las componentes son números reales y podemos aplicar la propiedad distributiva (factor común)

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{u}) &= (\alpha(2x+3y), \alpha(2y-3z)) \\ &= \alpha(2x+3y, 2y-3z) \\ &= \alpha f(\vec{u}). \end{aligned}$$

Proposición 6.1 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y $f: V \longrightarrow W$ una aplicación cualquiera, entonces*

$$f \textit{ es una aplicación lineal } \Longleftrightarrow \forall\vec{u},\vec{v}\in V \textit{ y } \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$$

Demostración: La demostración de la implicación directa " $\Rightarrow$ "es muy sencilla usando la definición de aplicación lineal y que V es un espacio vectorial.

La demostración del recíproco " $\Leftarrow$ " se hace tomando los valores $\alpha=1$ y $\beta=1$ para demostrar la primera propiedad y los valores $\alpha=1$ y $\beta=0$ para la segunda.

Ejemplo 6.2 *La aplicación $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (-x+5y, 2x, 0)$ es lineal.*

Solución: Tomemos $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow \vec{u}=(x_1,y_1), \vec{v}=(x_2,y_2)$, entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) &= f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)) = f(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2) = f(x_3,y_3) \\ &= (-x_3+5y_3, 2x_3, 0) = (-(\alpha x_1+\beta x_2)+5(\alpha y_1+\beta y_2), 2(\alpha x_1+\beta x_2), 0) \end{aligned}$$

y agrupando términos en cada coordenada sacando factor común el escalar correspondiente tendremos

$$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = (\alpha(-x_1+5y_1)+\beta(-x_2+5y_2), \alpha 2x_1+\beta 2x_2, 0)$$

que puede ponerse como

$$\begin{aligned}(\alpha(-x_1+5y_1)+\beta(-x_2+5y_2), \alpha 2x_1+\beta 2x_2) &= \alpha(-x_1+5y_1, 2x_1, 0)+\beta(-x_2+5y_2, 2x_2, 0)\\ &= \alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2).\end{aligned}$$

Ejemplo 6.3 *La aplicación $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(2,x-y)$ no es lineal puesto que*

$$f(0,0)=(2,0)\neq(0,0)$$

Ejemplo 6.4 *La aplicación $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(xy,2x)$ no es lineal puesto que aunque*

$$f(0,0)=(0,0)$$

si tomamos, por ejemplo, $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,1)$ entonces

$$f(\vec{u}+\vec{v})=f((2,3)+(1,1))=f(3,4)=(3\cdot 4, 2\cdot 3)=(12,6)$$

pero

$$f(\vec{u})+f(\vec{v})=f(2,3)+f(1,1)=(2\cdot 3,2\cdot 2)+(1\cdot 1,2\cdot 1)=(6,4)+(1,2)=(7,6)$$

y por tanto no se cumple la primera propiedad de la linealidad ya que

$$f(\vec{u}+\vec{v})\neq f(\vec{u})+f(\vec{v})$$

Ejemplo 6.5 *La aplicación $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=-2x+3y$ es lineal puesto que si $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow\vec{u}=(x_1,y_1),\vec{v}=(x_2,y_2)$ y tenemos*

$$\begin{aligned}f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) &= f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))=f(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)=f(x_3,y_3)\\ &= -2x_3+3y_3=-2(\alpha x_1+\beta x_2)+3(\alpha y_1+\beta y_2)\end{aligned}$$

agrupando términos y sacando factor común el escalar correspondiente obtenemos

$$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha(-2x_1+3y_1)+\beta(-2x_2+3y_2)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2).$$

Ejemplo 6.6 *Sea el conjunto $V=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [a,b]\}=\mathcal{C}([a,b])$, entonces la aplicación $I:V\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como*

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

es una aplicación lineal.

Solución: Utilizaremos la caracterización de funciones lineales de la proposición 6.1. En este caso los vectores de V son funciones continuas, por tanto, consideremos $f,g\in V$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y calculamos la imagen de $\alpha f+\beta g$

$$I(\alpha f+\beta g)=\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx$$

como sabemos de las propiedades de la integral

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \int_a^b \alpha f(x)\, dx + \int_a^b \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx = \alpha I(f) + \beta I(g)$$

luego I es lineal sobre de V en $\mathbb{R}$.

Teorema 6.2 *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Elemento neutro:*
$$f\left(\vec{0}_V\right) = \vec{0}_W$$
2. *Subespacios vectoriales:*
$$\text{Si } S \leqslant V \Longrightarrow f(S) \leqslant W$$
3. *Composición de aplicaciones: Si $g : W \longrightarrow U$, es otra aplicación lineal, siendo U otro $\mathbb{K}$–espacio vectorial, entonces la composición*
$$g \circ f : V \longrightarrow U$$
también es una aplicación lineal.
4. *Aplicación inversa:*
$$\text{Si } T \leqslant W \Longrightarrow f^{-1}(T) \leqslant V$$
5. *Biyección: Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es una aplicación lineal biyectiva.*

Demostración: Las demostraciones hacen uso de las propiedades de las aplicaciones lineal. En la primera propiedad se ha utilizado el subíndice de forma puntual, para indicar que el primer elemento neutro corresponde al espacio vectorial inicial V, mientras que el segundo corresponde al elemento neutro del espacio vectorial final W.

1. Para $\vec{v} \in V$ y $0 \in \mathbb{K}$ sabemos que
$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V$$
utilizando ahora que f es lineal
$$f\left(\vec{0}_V\right) = f(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot f(\vec{v}) = \vec{0}_W$$
por ser W un espacio vectorial.
2. Supongamos que $S \leqslant V$, hay que demostrar que el conjunto $f(S)$ es un subespacio vectorial de W. Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in f(S)$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Por la definición de $f(S)$, existirán $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2 \in S$ tal que
$$f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$$
y
$$f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$$
Como S es un subespacio vectorial de V, entonces
$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \in S$$
y por tanto
$$f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \in f(S)$$

pero como f es lineal

$$f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha f(\vec{v}_1)+\beta f(\vec{v}_2)\in f(S)$$

es decir

$$\alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2\in f(S)$$

lo que prueba que $f(S)$ es un subespacio vectorial de W.

3. Hay que comprobar que la aplicación $h=g\circ f$ es lineal. Sean $\vec{u},\vec{v}\in V$ y sean $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, entonces usando la definición de función compuesta

$$h(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=(g\circ f)(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=g(f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}))$$

pero como f es una aplicación lineal

$$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$$

y por tanto

$$g(f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}))=g(\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v}))$$

Pero g también es lineal entonces

$$g(\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v}))=\alpha g(f(\vec{u}))+\beta g(f(\vec{v}))=\alpha((g\circ f)(\vec{u}))+\beta((g\circ f)(\vec{v}))=\alpha h(\vec{u})+\beta h(\vec{v})$$

luego h también es lineal.

4. Supongamos que $T\leqslant W$, hay que demostrar que el conjunto $f^{-1}(T)$ es subespacio vectorial de V. Para ello tenemos en cuenta que T es subespacio vectorial de W y por ello contiene el elemento nulo, es decir $0_W\in T$. Usando el apartado 1 sabemos que

$$f\left(\vec{0}_V\right)=\vec{0}_W$$

luego

$$\vec{0}_V\in f^{-1}(T)$$

Si $f^{-1}(T)$ sólo contuviera al elemento $\vec{0}_V$, entonces por definición, $f^{-1}(T)$ sería el subespacio vectorial nulo y por tanto un subespacio vectorial de V. Si $f^{-1}(T)$ tuviera más de un elemento, es decir, si existieran $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ tal que $f(\vec{v}_1),f(\vec{v}_2)\in T$, entonces si $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ y calculando $f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)$, teniendo en cuenta que f es lineal

$$f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha f(\vec{v}_1)+\beta f(\vec{v}_2)$$

Ahora bien, como $f(\vec{v}_1),f(\vec{v}_2)\in T$ y T es subespacio vectorial de W, entonces

$$f(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha f(\vec{v}_1)+\beta f(\vec{v}_2)\in T$$

y por tanto

$$\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2\in f^{-1}(T)$$

lo que prueba que $f^{-1}(T)$ es un subespacio vectorial de V.

5. Supongamos que $f : V \longrightarrow W$ es lineal y biyectiva. Vamos a comprobar que $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es lineal, para ello tomamos $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, como f es sobreyectiva, deben existir $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, de modo que

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= f(\vec{v}_1) \Rightarrow \vec{v}_1 = f^{-1}(\vec{w}_1) \\ \vec{w}_2 &= f(\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_2 = f^{-1}(\vec{w}_2) \end{aligned}$$

Tomemos ahora dos escalares del cuerpo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Como W es un espacio vectorial y $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, entonces

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W$$

Al ser f sobreyectiva existirá $\vec{v}_3 \in V$ tal que

$$f(\vec{v}_3) = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2.$$

Por otra parte como f es lineal

$$f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2,$$

es decir, se cumple

$$f(\vec{v}_3) = f(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2)$$

pero como f también es inyectiva, entonces

$$\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$$

o de forma equivalente

$$f^{-1}(\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha f^{-1}(\vec{w}_1) + \beta f^{-1}(\vec{w}_2)$$

Luego f es lineal.

Proposición 6.3 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m, respectivamente. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de V y sea $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\} \in W$ un sistema de vectores de W, entonces existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ que cumple*

$$f(\vec{v}_k) = \vec{w}_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Demostración: Definimos f de la siguiente forma. Dado $\vec{v} \in V$, al ser B una base, este vector se podrá poner como combinación lineal de los vectores de B, es decir, deben existir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tales que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$$

definimos $f(\vec{v})$ como

$$f(\vec{v}) = \alpha_1\vec{w}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n$$

Está claro que $f(\vec{v}) \in W$, ya que es combinación lineal de los vectores de S que están en W. Vamos a comprobar ahora que f, definida de esta forma es lineal. Para ello consideremos $\vec{u}, \vec{v} \in V$, como B es una base entonces existen escalares β_k y α_k tales que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n \\ \vec{v} &= \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \end{aligned}$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, calcularemos la imagen del vector $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, para ello tenemos que expresar este vector como combinación lineal de los elementos de B

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\left(\beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n\right) + \mu\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n\right)$$

agrupando cada vector

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \left(\lambda\beta_1 + \mu\alpha_1\right)\vec{v}_1 + \cdots + \left(\lambda\beta_n + \mu\alpha_n\right)\vec{v}_n$$

luego por la definición de f

$$f\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right) = \left(\lambda\beta_1 + \mu\alpha_1\right)\vec{w}_1 + \cdots + \left(\lambda\beta_n + \mu\alpha_n\right)\vec{w}_n$$

o usando las propiedades asociativa y distributiva

$$\left(\lambda\beta_1 + \mu\alpha_1\right)\vec{w}_1 + \cdots + \left(\lambda\beta_n + \mu\alpha_n\right)\vec{w}_n = \lambda\left(\beta_1\vec{w}_1 + \cdots + \beta_n\vec{w}_n\right) + \mu\left(\alpha_1\vec{w}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n\right) = \lambda f\left(\vec{u}\right) + \mu f\left(\vec{v}\right)$$

luego f es lineal.

Demostraremos ahora su unicidad. Supongamos que la aplicación no es única, es decir, existe otra aplicación lineal $g : V \longrightarrow W$ que cumple $g\left(\vec{v}_k\right) = \vec{w}_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Dado cualquier $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \in V$, por linealidad de g se verifica

$$\begin{aligned} g\left(\vec{v}\right) &= g\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n\right) \\ &= \alpha_1 g\left(\vec{v}_1\right) + \cdots + \alpha_n g\left(\vec{v}_n\right) \\ &= \alpha_1\vec{w}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{w}_n \end{aligned}$$

pero este valor coincide con $f\left(\vec{v}\right)$, luego $g\left(\vec{v}\right) = f\left(\vec{v}\right)\ \forall\vec{v} \in V$.

Del teorema 6.3 se deduce que una aplicación lineal f está completamente determinada por las imágenes de los vectores de una base del conjunto inicial.

Ejemplo 6.7 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación que cumple:*

1. *f es lineal*
2. *$f\left(1,1\right) = \left(1,-1\right)$ y $f\left(1,0\right) = \left(3,2\right)$.*

Calcula el valor de $f\left(5,2\right)$.

Solución: Por una parte, el teorema 6.3 indica que cualquier aplicación lineal está caracterizada por las imágenes de los vectores de una base y podemos comprobar que $B = \{(1,1);(1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Si expresamos el vector $(5,2)$ en la base B, es decir, encontramos las coordenadas del vector en la base B

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{array}\right.$$

por tanto como f es lineal, podemos poner

$$f\left(5,2\right) = f\left(2\left(1,1\right) + 3\left(1,0\right)\right) = 2f\left(1,1\right) + 3f\left(1,0\right) = 2\cdot\left(1,-1\right) + 3\cdot\left(3,2\right) = \left(2,-2\right) + \left(9,6\right) = \left(11,4\right).$$

Ejemplo 6.8 *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una aplicación que cumple*

$$\begin{array}{rcl} f(-2,1) & = & (1,0,1) \\ & & y \\ f(-1,0) & = & (2,-1,1) \end{array}$$

Determina la expresión analítica de f*.*

Solución: El objetivo del ejemplo es encontrar $f(x,y)$ para cualquier vector $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Como $B=\{(-2,1),(-1,0)\}$ es una base, cualquier vector $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tendrá coordenadas respecto de ella

$$(x,y)=\alpha(-2,1)+\beta(-1,0)=(-2\alpha-\beta,\alpha)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=-2\alpha-\beta \\ \\ y=\alpha \end{array}\right.$$

por tanto

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & y \\ \\ \beta & = & -x-2\alpha=-x-2y \end{array}$$

y calculamos $f(x,y)$ teniendo en cuenta que f es lineal

$$f(x,y)=f(\alpha(-2,1)+\beta(-1,0))=\alpha f(-2,1)+\beta f(-1,0)=\alpha(1,0,1)+\beta(2,-1,1)$$

y en términos de x e y obtenemos la expresión buscada

$$f(x,y)=y(1,0,1)+(-x-2y)(2,-1,1)=(y,0,y)+(-2x-4y,x+2y,-x-2y)=(-2x-3y,x+2y,-x-y).$$

6.2. Núcleo e Imagen

Definición 6.3 *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales y sea* $f:V\longrightarrow W$ *una aplicación lineal, definimos el* núcleo de f *(kernel),* $\ker(f)$ *al conjunto de* V *definido por*

$$\ker(f)=\left\{\vec{v}\in V \mid f(\vec{v})=\vec{0}\right\}$$

Recordemos que la imagen *de una aplicación* f*,* $\operatorname{Im}(f)$*, es el subconjunto de* W *definido por*

$$\operatorname{Im}(f)=\{\vec{w}\in W \mid \exists\vec{v}\in V: f(\vec{v})=\vec{w}\}$$

Teorema 6.4 *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales y* $f:V\longrightarrow W$ *una aplicación lineal* $\Longrightarrow \ker(f)$ *e* $\operatorname{Im}(f)$ *son subespacios vectoriales de* V *y* W*, respectivamente, es decir*

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & \leqslant & V \\ \\ \operatorname{Im}(f) & \leqslant & W \end{array}$$

Demostración: Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \ker(f)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, vamos a comprobar que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \ker(f)$

$$\vec{u}, \vec{v} \in \ker(f) \Longrightarrow f(\vec{u}) = f(\vec{v}) = \vec{0}$$

al ser f una aplicación lineal

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \ker(f)$$

Teniendo en cuenta que V es un subespacio vectorial en sí mismo y aplicando la propiedad 2 del teorema 6.2, se deduce directamente que $f(V) = \mathrm{Im}(f)$ es subespacio vectorial de W.

Observación 6.1 *A la dimensión de* $\mathrm{Im}(f)$ *se le denomina* rango de la aplicación lineal f.

Teorema 6.5 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un sistema generador de V entonces $f(B) = \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es un sistema generador de* $\mathrm{Im}(f)$.

Notar que se cumple $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$.

Demostración: Sea $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow \exists \vec{v} \in V$ tal que $f(\vec{v}) = \vec{w}$.
Como $v \in V \Longrightarrow \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tales que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$. Como f es lineal

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$$

y cada $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f)$ se puede poner como combinación lineal de los $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$, tal y como se quería demostrar.

Proposición 6.6 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente, y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces*

1. *f es inyectiva* $\Longleftrightarrow \ker(f) = \left\{\vec{0}\right\}$
2. *f es sobreyectiva* $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim W$
3. *Se cumple la llamada* ecuación de las dimensiones *para aplicaciones lineales*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

Demostración:

1. Supongamos que f es inyectiva. Si $\vec{v} \in \ker(f) \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0}$, pero al ser f es lineal también se cumplirá $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$, por tanto $f(\vec{v}) = f\left(\vec{0}\right)$, pero al ser inyectiva $\vec{v} = \vec{0}$.

   De forma recíproca, supongamos que $\ker(f) = \left\{\vec{0}\right\}$. Si $f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$ pero como f es lineal podemos poner $f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, es decir $\vec{u} - \vec{v} \in \ker(f)$ y por tanto $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$, que demustra que la aplicación es inyectiva.

2. Si f es sobreyectiva entonces $\mathrm{Im}(f) = W$ y por tanto $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim W$.

   Supongamos ahora que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim W$. Por el teorema 6.4 sabemos que $\mathrm{Im}(f) \leqslant W$, como ambos tienen la misma dimensión $\mathrm{Im}(f) = W$ y la función es sobreyectiva.

3. Por el teorema 6.4

$$\ker(f) \leqslant V \Rightarrow \dim(\ker(f)) \leq \dim(V)$$

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de V, por el teorema 6.5, el conjunto $f(B) = \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$ y de esta forma, también se cumple

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$$

Sea $r = \dim(\ker(f))$. Si $r = n = \dim(V)$, entonces $\ker(f) = V$ y f es la aplicación nula, $f \equiv \vec{0}$, puesto que es la única aplicación lineal tal que $f(\vec{v}) = \vec{0}$, $\forall \vec{v} \in V$, pero esto implica que $\mathrm{Im}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$ y por tanto $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$, confirmando la ecuación para este caso.

Supongamos que $r = 0$, entonces comprobaremos $f(B) = \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es una base, para ello solamente hay que probar que $f(B)$ es un sistema libre. Supongamos pues que existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$$

como f es lineal podemos poner

$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n)$$

y por tanto

$$f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n \in \ker f$$

como $r = 0 \Rightarrow \ker f = \left\{\vec{0}\right\}$, es decir

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Obtenemos una combinación lineal nula de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, pero como B es una base estos coeficientes deben ser nulos

$$\alpha_k = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

y hemos demostrado que $f(B)$ es un sistema de vectores linealmente independientes, como además es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, será una base de este subespacio y por tanto

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n,$$

siendo la ecuación de dimensiones cierta también en este caso.

Finalmente, supongamos que $0 < r < n$. Sea $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ una base de $\ker(f)$. Como B_1 es un sistelam libre, podemos extenderlo con vectores $\{\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ para obtener una base de V, $B = B_1 \cup \{\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$. Por el teorema 6.5 $f(B)$ será un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, es decir

$$\forall \vec{w} \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \vec{w} = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_r f(\vec{v}_r) + \alpha_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$$

como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\} \in \ker f \Rightarrow f(\vec{v}_k) = 0$; $k = 1, \ldots, r$ y por tanto

$$\vec{w} = \alpha_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$$

es decir, cada vector $\vec{w} \in \operatorname{Im}(f)$ se puede poner como combinación lineal de $\{f(\vec{v}_{r+1}), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ que será un sistema generador de $\operatorname{Im}(f)$. Sólo falta por comprobar que $\{f(\vec{v}_{r+1}), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ son linealmente independientes. Si por el contrario, suponemos que existen escalares $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, con

$$\alpha_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$$

entonces por la linealidad de f

$$\alpha_{r+1} f(\vec{v}_{r+1}) \cdots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = f(\alpha_{r+1}\vec{v}_{r+1} \cdots + \alpha_n \vec{v}_n) = \vec{0}$$

y se deduce que

$$\alpha_{r+1}\vec{v}_{r+1} \cdots + \alpha_n \vec{v}_n \in \ker f$$

y siendo B_1 una base de $\ker f$, existirán $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$, tal que

$$\alpha_{r+1}\vec{v}_{r+1} \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \beta_1 \vec{v}_1 \cdots + \beta_r \vec{v}_r$$

o de forma equivalente

$$-\beta_1 \vec{v}_1 - \cdots - \beta_r \vec{v}_r + \alpha_{r+1}\vec{v}_{r+1} \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

pero B es una base de V, así que se debería cumplir que todos los escalares deben ser 0

$$\beta_k = 0;\ k = 1, \ldots, r \text{ y } \alpha_j = 0;\ j = r+1, \ldots, n$$

lo que indica que $\{f(\vec{v}_{r+1}), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ son linealmente independientes y por tanto al ser un sistema generador de $\operatorname{Im} f$, será una base de donde se deduce:

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = n - r.$$

Definición 6.4 *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal inyectiva se dice que es un* monomorfismo*, mientras que si es sobreyectiva es un* epimorfismo. *Si f es biyectiva entonces se denomina* isomorfismo *si $V \neq W$ o* automorfismo *si $V = W$.*

Ejemplo 6.9 *Clasifica la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como*

$$f(x, y) = (-x + 5y, 2x, 0)$$

Solución: Clasificar f es indicar si es inyectiva y/o sobreyectiva. Calculamos su núcleo

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-x + 5y, 2x, 0) = (0, 0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 5y = 0; 2x = 0; 0 = 0\right\} \\ &= \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

luego la aplicación f es inyectiva.

Si ahora tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $C_2 = \{\vec{e}_1 = (1,0)\,; \vec{e}_2 = (0,1)\}$, obtenemos un sistema generador de $\mathrm{Im}\,(f)$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= f(1,0) = (-1,2,0) \\ f(\vec{e}_2) &= f(0,1) = (5,0,0) \end{aligned}$$

El sistema $f(C_2) = \{(-1,2,0)\,;(5,0,0)\}$ es libre, por tanto será una base para $\mathrm{Im}\,(f)$, de este modo

$$\mathrm{Im}\,(f) = \langle \{(-1,2,0)\,;(5,0,0)\} \rangle \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}) = 2 \neq 3 = \dim(W)$$

y por tanto no es sobreyectiva.

También podríamos demostrar que no es sobreyectiva usando la ecuación de las dimensiones para aplicaciones lineales, en este caso $V = \mathbb{R}^2$, por tanto $\dim(V) = 2$

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) \Leftrightarrow 2 = 0 + \dim(\mathrm{Im})$$

de donde se deduce directamente que

$$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2 \neq 3.$$

Ejemplo 6.10 *Clasifica la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, *definida como*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_1 - x_4, 3x_3, 0, 5x_1 + x_5)$$

Solución: Calculamos su núcleo

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid (2x_1 - x_4, 3x_3, 0, 5x_1 + x_5) = (0,0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_4 = 0; 3x_3 = 0; 5x_1 + x_5 = 0\right\} \end{aligned}$$

Está claro que

$$x_3 = 0$$

y que

$$\begin{aligned} x_4 &= 2x_1 \\ x_5 &= -5x_1 \end{aligned}$$

no habiendo ninguna restricción para la coordenada x_2, así que si tomamos $x_1 = \alpha$ y $x_2 = \beta$, los vectores de $\ker f$ pueden definirse como

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (\alpha, \beta, 0, 2\alpha, -5\alpha) = \alpha\,(1,0,0,2,-5) + \beta\,(0,1,0,0,0)$$

y por tanto

$$\ker f = \langle \{(1,0,0,2,-5)\,;(0,1,0,0,0)\} \rangle \Rightarrow \dim(\ker f) = 2 \neq 0$$

la aplicación no es inyectiva.

Usando la ecuación de dimensiones con $V = \mathbb{R}^5$ y $W = \mathbb{R}^4$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) - \dim(\ker f) = 5 - 2 = 3 \neq 4$$

luego tampoco es sobreyectiva. Para encontrar un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, usaremos la base canónica de $\mathbb{R}^5$

$$C_5 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\} \Rightarrow f(C_5) = \{(2,0,0,5);(0,0,0,0);(0,3,0,0);(0,0,0,1)\}$$

eliminando el vector nulo obtenemos una base de $\mathrm{Im}(f)$ ya que el resto de vectores son linealmente independientes entre sí:

$$\langle\{(2,0,0,5);(0,3,0,0);(0,0,0,1)\}\rangle = \mathrm{Im}\, f$$

Ejemplo 6.11 *Clasifica la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x,y) = 2x - 3y.$$

Solución: Calculamos su nucleo y su imagen

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{3}x\right\} \\
&= \left\{\left(x, \frac{2}{3}x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$\ker f = \left\langle \left\{ \left(1, \frac{2}{3}\right) \right\} \right\rangle = \langle\{(3,2)\}\rangle \Rightarrow \dim(\ker f) = 1 \neq 0$$

mientras que la imagen

$$\mathrm{Im}(f) = \langle\{f(1,0); f(0,1)\}\rangle = \langle\{2;-3\}\rangle = \mathbb{R} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 = \dim W$$

La aplicación es sobreyectiva, pero no inyectiva.

Ejemplo 6.12 *Clasifica la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *definida como*

$$f(x,y,z,t) = (x, 2x - y, 3x + 2y + 2z, 4x + y + 5z + 7t)$$

Solución: En este caso vamos a calcular primero la imagen de f, usando la base canónica de $\mathbb{R}^4$ para encontrar un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$

$$\begin{aligned}
f(1,0,0,0) &= (1,2,3,4) \\
f(0,1,0,0) &= (0,-1,2,1) \\
f(0,0,1,0) &= (0,0,2,5) \\
f(0,0,0,1) &= (0,0,0,7)
\end{aligned}$$

como vemos forman un sistema escalonado, así que podemos asegurar que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4$$

y por tanto

$$\dim(\ker f) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 4 = 0$$

La aplicación es biyectiva y como el espacio inicial y final es el mismo, la función f es un automorfismo.

Ejemplo 6.13 *Clasifica la aplicación lineal* $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *definida como*

$$f(z_1, z_2, z_3) = (2iz_1 - z_3, (3 - i) z_1 + z_2)$$

Solución: Calcularemos el núcleo de f

$$\ker f = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z_1, z_2, z_3) = 0\right\}$$

de este modo las ecuaciones implícitas del $\ker f$ son

$$\left.\begin{array}{r} 2iz_1 - z_3 = 0 \\ \\ (3-i) z_1 + z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z_3 = 2iz_1 \\ \\ z_2 = (i-3) z_1 \end{array}\right\}$$

de forma que si ponemos $z_1 = \alpha \in \mathbb{C}$

$$(z_1, z_2, z_3) = (\alpha, 2i\alpha, (i-3)\alpha) = \alpha(1, 2i, (i-3))$$

luego $\dim\ker f = 1$ y no es inyectiva. Utilizando la ecuación de dimensiones

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{C}^3 - \dim\ker f = 3 - 1 = 2$$

que es la dimensión de $\mathbb{C}^2$, luego f es sobreyectiva y una base de $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}^2$, será por ejemplo la base canónica.

6.3. Matriz asociada a una aplicación lineal

Consideremos una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ entre V y W, dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, respectivamente. Supongamos que $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V y que $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ es una base de W. Sea $\vec{v} \in V$ y sean $(x_1, \ldots, x_n)_B$ con $x_j \in \mathbb{K}$ sus coordenadas en la base B, es decir

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

Como $f(\vec{v}) \in W$, este vector tendrá unas coordenadas $(y_1, \ldots, y_m)_{B'}$ en la base B', con $y_k \in \mathbb{K}$, es decir

$$f(\vec{v}) = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m$$

de modo que podemos escribir

$$f(\vec{v}) = f(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m$$

Al ser f lineal, la igualdad anterior nos conduce a poner

$$x_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + x_n f(\vec{v}_n) = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m.$$

Finalmente como para cada $j = 1, \ldots, n$, $f(\vec{v}_j) \in W$, este vector tendrán una expresión en coordenadas respecto a la base B', es decir, existirán $a_{kj} \in \mathbb{K}$, de modo que

$$f(\vec{v}_j) = a_{1j}\vec{w}_1 + \cdots + a_{mj}\vec{w}_m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

y sustituyendo ahora en la expresión de $f(\vec{v})$

$$x_1(a_{11}\vec{w}_1 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{w}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m) = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m$$

reagrupando

$$(x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})\vec{w}_1 + \cdots + (x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn})\vec{w}_m = y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m$$

como las coordenadas en una base son únicas, podemos afirmar que

$$(x_1a_{k1} + \cdots + x_na_{kn}) = y_k; \qquad k = 1, \ldots, m$$

y en forma matricial podemos poner

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matriz en la expresión anterior es llamada *matriz asociada a f respecto de las bases B y B'* y sus columnas serían las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B expresadas en la base B'. Esta matriz se expresa como

$$M_{B\longrightarrow B'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(f(v_1)_{B'}, \ldots, f(v_n)_{B'}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

de forma que podemos poner

$$(f(\vec{v}))_{B'} = M_{B\longrightarrow B'}(f)\,\vec{v}_B$$

Observación 6.2 *Si $V = W$ y $B = B'$ entonces podemos simplificar la expresión y poner*

$$M_{B\longrightarrow B'}(f) = M_B(f)$$

Si $V = W$ y $f(\vec{v}) = \vec{v}$ es la aplicación identidad, entonces $M_{B\longrightarrow B'}(f)$ es la matriz de cambio de base

$$M_{B\longrightarrow B'}(f) = M_{B\longrightarrow B'}$$

Si $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ y $B = C_n$, $B' = C_m$ son las respectivas bases canónicas, entonces

$$(f(\vec{v}))_{B'} = M_{B\longrightarrow B'}(f)\,\vec{v}_B \Leftrightarrow (f(\vec{v}))_{C_m} = M_{C_n\longrightarrow C_m}(f)\,\vec{v}_{C_n} \Leftrightarrow f(\vec{v}) = M_{C_n\longrightarrow C_m}(f)\,\vec{v}$$

en este caso si $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ obtenemos la expresión analítica para f

$$f(x_1, \ldots, x_n) = M_{C_n\longrightarrow C_m}(f)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.14 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$*, definida como*

$$f(x, y) = (x - y, 0, 3x + 5y, 7y)$$

Obtened la matriz asociada a f *respecto de las bases canónicas.*

Solución: En este caso sólo es necesario calcular las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ mediante f

$$f(1, 0) = (1, 0, 3, 0)$$

$$f(0, 1) = (-1, 0, 5, 7)$$

de donde:

$$M_{C_2 \longrightarrow C_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.15 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida como*

$$f(x, y, z) = (x - 4y - z, 3x - y).$$

Sean $B = \{(1, 2, 3); (0, -1, 0); (3, -1, -2)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$ *y* C_2 *la base canónica de* $\mathbb{R}^2$*. Se pide obtener la matriz asociada a* f *respecto estas bases:* $M_{B \longrightarrow C_2}(f)$*.*

Solución: En este caso sólo es necesario calcular las imágenes de la base B mediante f

$$\begin{aligned} f(1, 2, 3) &= (-10, 1) \\ f(0, -1, 0) &= (4, 1) \\ f(3, -1, -2) &= (9, 10) \end{aligned}$$

de donde:

$$M_{B \longrightarrow C_2}(f) = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.16 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *cuya matriz respecto a* C_3 *es*

$$M_{C_3 \longrightarrow C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide obtener la expresión analítica para f*.*

Solución: Directamente, como la matriz está asociada a las bases canónicas de los espacios vectoriales

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2y + z \\ 3x + y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.17 *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida como*

$$f(x,y)=(x-y,x+2y).$$

Se pide hallar la matriz asociada a f *respecto de las bases* $B=\{(3,1);(-1,2)\}$ *y* $B'=\{(0,1);(1,-1)\}$.

Solución: Se pide el cálculo de $M_{B\longrightarrow B'}(f)$, para ello calculamos en primer lugar la imagen de B

$$\begin{aligned} f(3,1) &= (2,5) \\ f(-1,2) &= (-3,3) \end{aligned}$$

y ahora expresamos las imágenes en coordenadas respecto a B'

$$(2,5)=a_{11}(0,1)+a_{21}(1,-1)\Leftrightarrow(2,5)=(a_{21},a_{11}-a_{21})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} a_{11}=7 \\ a_{21}=2 \end{array}\right.$$

$$(-3,3)=a_{12}(0,1)+a_{22}(1,-1)\Leftrightarrow(-3,3)=(a_{22},a_{12}-a_{22})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} a_{12}=0 \\ a_{22}=-3 \end{array}\right.$$

de modo que

$$M_{B\longrightarrow B'}(f)=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.18 *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida como*

$$f(x,y)=(x-y,2y,3x-3y).$$

1. *Calcula* $M_{B\longrightarrow B'}(f)$ *con* $B=\{(2,1);(1,3)\}$ *y* $B'=\{(0,0,1);(1,0,1);(1,-1,0)\}$.
2. *Calcula* $(f(\vec{v}))_{B'}$ *siendo* $v_B=(-4,1)$.

Solución:

1. Se pide el cálculo de $M_{B\longrightarrow B'}(f)$, para ello calculamos en primer lugar la imagen de B

$$\begin{aligned} f(2,1) &= (1,2,3) \\ f(1,3) &= (-2,6,-6) \end{aligned}$$

y ahora expresamos las imágenes en coordenadas respecto a B'

$$(1,2,3)=a_{11}(0,0,1)+a_{21}(1,0,1)+a_{31}(1,-1,0)\Leftrightarrow(1,2,3)=(a_{21}+a_{31},-a_{31},a_{11}+a_{21})$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r} a_{21}+a_{31}=1 \\ -a_{31}=2 \\ a_{11}+a_{21}=3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a_{11}=0 \\ a_{21}=3 \\ a_{31}=-2 \end{array}\right.$$

$$(-2,6,-6)=a_{12}(0,0,1)+a_{22}(1,0,1)+a_{32}(1,-1,0)\Leftrightarrow(-2,6,-6)=(a_{22}+a_{32},-a_{32},a_{12}+a_{22})$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r} a_{22}+a_{32}=-2 \\ -a_{32}=6 \\ a_{12}+a_{22}=-6 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a_{12}=-10 \\ a_{22}=4 \\ a_{32}=-6 \end{array}\right.$$

de modo que

$$M_{B\longrightarrow B'}(f)=\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 3 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Usamos directamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 3 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego

$$(f(v_B))_{B'} = (-10, -8, 2)$$

Vamos a comprobar el resultado utilizando la expresión analítica de f. En primer lugar como $v = (-4, 1)_B$, entonces el vector será

$$v = -4 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (1, 3) = (-8, -4) + (1, 3) = (-7, -1)$$

Utilizamos ahora la expresión analítica de f

$$f(v) = f(-7, -1) = (-6, -2, -18)$$

y finalmente expresamos este vector en la base B'

$$(-6, -2, -18) = \alpha (0, 0, 1) + \beta (1, 0, 1) + \gamma (1, -1, 0) \Leftrightarrow (-6, -2, -18) = (\beta + \gamma, -\gamma, \alpha + \beta)$$

de donde

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= -6 \\ -\gamma &= -2 \\ \alpha + \beta &= -18 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\gamma = 2$, que sustituimos en la primera para obtener $\beta = -8$ y finalmente de la última ecuación $\alpha = -10$, es decir, $(f(v))_{B'} = (-10, -8, 2)_{B'}$ como antes.

Proposición 6.7 *La matriz $M_{B \longrightarrow B'}(f)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sean B y B' bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, entonces, existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$M_{B \longrightarrow B'}(f) = A$$

2. *El rango de la matriz $M_{B \longrightarrow B'}(f)$ coincide con la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$*

$$r(M_{B \longrightarrow B'}(f)) = \dim(\mathrm{Im})$$

3. *Sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$, dos aplicaciones lineales con U, V y W, $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Sean B, B' y B'' bases de V, W y U,respectivamente, entonces se cumple*

$$M_{B \longrightarrow B''}(g \circ f) = M_{B' \longrightarrow B''}(g) \, M_{B \longrightarrow B'}(f)$$

4. *Sea $f : V \longrightarrow W$, con V y W, $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Sean B_1 y B_2 dos bases de V y B'_1 y B'_2 dos bases de W, entonces se cumple*

$$M_{B_2 \longrightarrow B'_2}(f) = M_{B'_1 \longrightarrow B'_2} \cdot M_{B_1 \longrightarrow B'_1}(f) \cdot M_{B_2 \longrightarrow B_1}$$

en particular si $B_1 = C_n$ y $B'_1 = C_m$

$$M_{B_2 \longrightarrow B'_2}(f) = M_{C_m \longrightarrow B'_2} \cdot M_{C_n \longrightarrow C_m}(f) \cdot M_{B_2 \longrightarrow C_n} = \left(M_{B'_2 \longrightarrow C_m} \right)^{-1} \cdot M_{C_n \longrightarrow C_m}(f) \cdot M_{B_2 \longrightarrow C_n}$$

5. *Sea $f : V \longrightarrow V$, con V un $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Sean B_1 y B_2 dos bases de V, entonces se cumple*

$$M_{B_2 \longrightarrow B_2}(f) = M_{B_1 \longrightarrow B_2} \cdot M_{B_1 \longrightarrow B_1}(f) \cdot M_{B_2 \longrightarrow B_1} = (M_{B_2 \longrightarrow B_1})^{-1} \cdot M_{B_1 \longrightarrow B_1}(f) \cdot M_{B_2 \longrightarrow B_1}$$

en particular si $B_1 = C_n$ y $B_2 = B$

$$M_{B \longrightarrow B}(f) = M_{C_n \longrightarrow B} \cdot M_{C_n \longrightarrow C_n}(f) \cdot M_{B \longrightarrow C_n} = (M_{B \longrightarrow C_n})^{-1} \cdot M_{C_n \longrightarrow C_n}(f) \cdot M_{B \longrightarrow C_n}$$

o de forma más simplificada

$$M_B(f) = (M_{B \longrightarrow C_n})^{-1} \cdot M_{C_n}(f) \cdot M_{B \longrightarrow C_n}$$

Definición 6.5 *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, diremos que A y B son* matrices semejantes*, sí y sólo si, existe una matriz $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertible, tal que*

$$Q^{-1}AQ = B$$

Notar que se si mutiplicamos a la izquierda por Q y a la derecha por Q^{-1} obtenemos

$$A = QBQ^{-1}$$

6.4. Endomorfismos con significado geométrico

Definición 6.6 *Una homotecia o cambio de escala de parámetro α en K^n sobre un espacio vectorial V, es una aplicación de V en V definida como*

$$h_\alpha(v) = \alpha v$$

Definición 6.7 *Dado $V = W_1 \oplus W_2$. Una proyección de base W_1 y dirección W_2 es una aplicación de V en V definida como*

$$p(v) = v_1$$

en particular si $W_1 = W$ y $W_2 = W^\perp$, la proyección se denomina ortogonal.

Definición 6.8 *Dado $V = W_1 \oplus W_2$. Una simetría de base W_1 y dirección W_2 es una aplicación de V en V definida como*

$$p(v) = v_1 - v_2$$

en particular si $W_1 = W$ y $W_2 = W^\perp$, la simetría se denomina ortogonal.

Definición 6.9 *Una rotación en el plano*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Una rotación en el espacio, dado $u = (x, y, z)$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta + x^2(1-\cos\theta) & xy(1-\cos\theta) - z\sin\theta & xz(1-\cos\theta) + y\sin\theta \\ xy(1-\cos\theta) + z\sin\theta & \cos\theta + y^2(1-\cos\theta) & yz(1-\cos\theta) - x\sin\theta \\ xz(1-\cos\theta) - y\sin\theta & yz(1-\cos\theta) + x\sin\theta & \cos\theta + z^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

notar que $R^T = R^{-1}$