Capítulo 5

Espacios Vectoriales Euclídeos

5.1. Producto escalar

Definición 5.1 *Un* producto escalar *sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, V, es una aplicación definida de $V \times V$ en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\langle \quad \rangle$*

$$\begin{array}{rccc} \langle \quad \rangle : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \rightsquigarrow & \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \end{array}$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. *Bilinealidad:* $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   a) $\langle \vec{u} + \vec{v}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle$

   b) $\langle \vec{u}; \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle$

   c) $\langle \alpha \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}; \alpha \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$

2. *Simetría:* $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle$

3. *Definida positiva:* $\forall \vec{u} \in V; u \neq 0 \Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle > 0$

Definición 5.2 *El par $(V, \langle \rangle)$ se denomina* espacio vectorial euclídeo.

Definición 5.3 *En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, definimos el* producto escalar euclídeo de $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *como*

$$\langle \vec{x}; \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Siendo $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Ejemplo 5.1 *Sobre el espacio vectorial real $\mathcal{L}^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b f(x)^2 dx < \infty\}$ definimos el siguiente operador*

$$\langle f \ ; g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

que define a $\mathcal{L}^2([a,b])$ como espacio vectorial euclídeo.

Por ejemplo si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 + 2$ sobre $[0,1]$, entonces

$$\langle f \ ; g \rangle = \int_0^1 x(x^2+2) dx = \int_0^1 \left(x^3 + 2x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{4}.$$

Ejemplo 5.2 *En el espacio vectorial real* $\mathbb{R}^3$ *definimos* $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle_P$ *para cada par de vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ *como*

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle_P = x_1 x_2 + 5 y_1 y_2 + 2 z_1 z_2,$$

siendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$*. El operador* $\langle \quad \rangle_P$ *así definido, es un producto escalar y el par* $\left(\mathbb{R}^3; \langle \quad \rangle_P\right)$ *es un espacio vectorial euclídeo.*

Proposición 5.1 *Sea* $(V, \langle \quad \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo. Entonces*

$$\forall \vec{v} \in V \Rightarrow \left\langle \vec{v}; \vec{0} \right\rangle = 0$$

Demostración: Sea $\vec{v} \in V$. Como V es un espacio vectorial, el vector $\vec{v}$ tiene opuesto, $-\vec{v}$, de forma que $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$. Por tanto aplicando la propiedad 1.a (bilinealidad):

$$\left\langle \vec{v}; \vec{0} \right\rangle = \langle \vec{v}; \vec{v} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle = 0.$$

5.2. Norma asociada a un producto escalar

Definición 5.4 *Sea* $(V, \langle \quad \rangle)$*, un espacio vectorial euclídeo y sea* $\vec{v} \in V$*. Llamamos* norma *(módulo o longitud) del vector* $\vec{v}$ *asociada al producto escalar* $\langle \quad \rangle$*, al número real no negativo definido por*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}; \vec{v} \rangle}$$

Si $\|\vec{v}\| = 1$ *entonces* $\vec{v}$ *es un* vector unitario*. Notar que si* $\|\vec{v}\| \neq 0$*, entonces* $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ *es un vector unitario.*

Definición 5.5 *Para* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\langle \quad \rangle$ *el producto escalar euclídeo, definimos la* norma euclídea *de* $\vec{x}$ *como*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ejemplo 5.3 *Si* $\vec{v} = (2, -3, 0) \in \mathbb{R}^3$*, entonces su norma euclídea es*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}.$$

mientras que $\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{13}} = (\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{-3}{\sqrt{13}}, 0)$ *es un vector unitario.*

Ejemplo 5.4 *Consideremos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *junto con el siguiente producto escalar: dado* $\vec{u} = (x_1, y_1)$*,* $\vec{v} = (x_2, y_2)$

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle_p = 4 x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 - 2 x_1 y_2 - 2 x_2 y_1.$$

Para este producto escalar, la norma de un vector $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *está definida como*

$$\|\vec{v}\|_p = \sqrt{\langle \vec{v}; \vec{v} \rangle_p} = \sqrt{4x^2 + 2y^2 - 4xy}.$$

Por ejemplo, la norma del vector $\vec{v} = (2, 1)$ *para el producto escalar* $\langle ; \rangle_p$ *es*

$$\|(2, 1)\|_p = \sqrt{4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{10}$$

Proposición 5.2 *La norma* $\|\cdot\|$ *cumple las siguientes propiedades:*

1. *$\forall \vec{v} \in V \Longrightarrow \|\vec{v}\| \geq 0$, además $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$*

2. *Desigualdad Cauchy-Schwarz*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Longrightarrow |\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

3. *Desigualdad triangular:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Longrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Demostración:

1. Por la definición, está claro que $\|\vec{v}\| \geq 0$. Además

$$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \vec{v}; \vec{v} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

2. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces tomando el vector $\lambda\vec{u} - \mu\vec{v}$, se cumple

$$\langle \lambda\vec{u} - \mu\vec{v}; \lambda\vec{u} - \mu\vec{v} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle - 2\lambda\mu \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \mu^2 \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle \geq 0$$

donde hemos utilizado las propiedades de bilinealidad y positividad del producto escalar. Si tomamos ahora los siguientes valores concretos para λ y μ

$$\lambda = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \, ; \; \mu = \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle$$

La expresión se transforma en

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle - 2 \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle^2 \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle \geq 0$$

simplificamos dividiendo por $\langle u; u \rangle$

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 - 2 \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 + \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle \geq 0 \Longleftrightarrow -\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 + \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle \geq 0$$

De donde

$$\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle \geq \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2 \Longleftrightarrow \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \geq \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2$$

y tomando la raíz cuadrada a ambos lados, obtenemos la desigualdad buscada

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \geq \sqrt{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle^2} = |\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle|.$$

3. Para demostrar la desigualdad triangular haremos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz demostrada en el apartado anterior. Tomemos $\vec{u}, \vec{v} \in V$, entonces

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}; \vec{u} + \vec{v} \rangle$$

Usando bilinealiad

$$\langle \vec{u} + \vec{v}; \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle + 2 \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \,,$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$

$$\|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2 \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Hemos obtenido

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

y tomando raíces cuadradas, teniendo en cuenta que ambos valores son positivos, obtenemos el resultado buscado

$$0 \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)$$

Definición 5.6 *Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$, con $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y puesto que $\|\vec{u}\| \neq 0$ y $\|\vec{v}\| \neq 0$, obtenemos*

$$| \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Longleftrightarrow \frac{| \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle |}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

de donde se deduce

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1.$$

Ahora podemos asegurar que $\exists^{\circ} \theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \tag{5.1}$$

El valor θ es el ángulo *entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y podemos poner:*

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Ejemplo 5.5 *Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (2, -2)$ y $\vec{v} = (0, 3)$ de $\mathbb{R}^2$, usando la norma euclídea.*

Solución: Usamos la ecuación (5.1)

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle (2, -2); (0, 3) \rangle = (2 \cdot 0) + (-2 \cdot 3) = -6$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle (2, -2); (2, -2) \rangle} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle (0, 3); (0, 3) \rangle} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{-6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De donde se obtiene $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Definición 5.7 *Sea $(V; \langle \quad \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ definimos* distancia *de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ como:*

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

5.3. Ortogonalidad

Definición 5.8 *Sea $(V; \langle \quad \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Diremos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son* ortogonales *(o perpendiculares) entre sí, y lo indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$, cuando*

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = 0$$

Un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ se dice ortogonal $\Longleftrightarrow \vec{v}_j \perp \vec{v}_k;\ \forall j \neq k$
Un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ se dice ortonormal $\Longleftrightarrow \vec{v}_j \perp \vec{v}_k;\ \forall j \neq k$ y $\langle \vec{v}_j; \vec{v}_j \rangle = 1;\ \forall j$.

Un sistema ortonormal se puede definir mediante la función *delta de Kronecker*, δ_{jk}, que recordemos, está definida como

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

de este modo

$$S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\} \text{ es ortonormal} \Longleftrightarrow \langle \vec{v}_j ; \vec{v}_k \rangle = \delta_{jk}$$

Ejemplo 5.6 *El sistema* $S = \{\vec{v}_1 = (1, 2, -3, 0); \vec{v}_2 = (0, 0, 0, 1); \vec{v}_3 = (0, 3, 2, 0)\}$ *es un sistema ortogonal.*

Solución: Vamos a comprobar la ortogonalidad de los vectores entre sí:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_1 ; \vec{v}_2 \rangle &= \langle (1, 2, -3, 0); (0, 0, 0, 1) \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \\
\langle \vec{v}_1 ; \vec{v}_3 \rangle &= \langle (1, 2, -3, 0); (0, 3, 2, 0) \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \\
\langle \vec{v}_2 ; \vec{v}_3 \rangle &= \langle (0, 0, 0, 1); (0, 3, 2, 0) \rangle = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7 *Los vectores* $\vec{u} = (2, 1)$ *y* $\vec{v} = (1, 3)$ *son ortogonales para el producto escalar definido como*

$$\langle (x_1, y_1); (x_2, y_2) \rangle_p = 4x_1x_2 + 2y_1y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2.$$

Solución: Sustituyendo directamente

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle_p = \langle (2, 1); (1, 3) \rangle_p = 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 + 6 - 2 - 12 = 0.$$

Sin embargo, podemos comprobar que no son ortogonales si consideramos el producto euclídeo sobre $\mathbb{R}^2$puesto que

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle (2, 1); (1, 3) \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

Proposición 5.3 *Sea* $(V; \langle \quad \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo con* $\dim(V) = n$*, se cumple:*

1. *Un sistema formado por un sólo vector, es un sistema ortogonal.*
2. *La base canónica de* $\mathbb{R}^n$*;* $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0); \ldots; \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$*, es una base ortornormal para el producto escalar euclídeo.*
3. *Un sistema ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*
4. *Un sistema ortonormal de vectores es linealmente independiente.*
5. *La ortogonalidad se conserva mediante combinaciones lineales, así si* $\vec{u} \perp \vec{v}$ *entonces* $\vec{u} \perp \alpha\vec{v}$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
6. *Si* $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una base ortogonal (b.o.) entonces* $B = \{\frac{\vec{v}_1}{\|v_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_n}{\|v_n\|}\}$ *es una base ortonormal (b.o.n).*
7. *Si* $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una base ortogonal entonces* $B' = \{\alpha_1\vec{v}_1, \alpha_2\vec{v}_2, \ldots, \alpha_n\vec{v}_n\}$ *con* $\alpha_j \neq 0$; $\forall \alpha_j \in \mathbb{R}$ *es una base ortogonal.*

Demostración:

1. Se establece de esta forma.

2. Resultado trivial, sólo hay que usar la definición de producto escalar euclídeo sobre los vectores de la base canónica.

3. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ con $\vec{v}_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, m$ y supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tal que
$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = 0$$
tomando un vector $\vec{v}_k$ cualquiera, entonces
$$\langle \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m; \vec{v}_k\rangle = \langle 0; \vec{v}_k\rangle = 0.$$
Usando bilinealidad
$$\alpha_1\langle\vec{v}_1; \vec{v}_k\rangle + \alpha_2\langle\vec{v}_2; \vec{v}_k\rangle + \cdots + \alpha_m\langle\vec{v}_m; \vec{v}_k\rangle = 0$$
y como los vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son ortogonales entre sí, entonces
$$\langle\vec{v}_j; \vec{v}_k\rangle = 0;\ \forall j \neq k,$$
quedando sólo el término k-ésimo
$$\alpha_k\langle\vec{v}_k; \vec{v}_k\rangle = 0,$$
pero $\langle\vec{v}_k; \vec{v}_k\rangle \neq 0$ porque los vectores de B son no nulos, y por tanto debe ocurrir $\alpha_k = 0$ para cualquier k y se deduce que los vectores son linealmente independientes.

4. Si suponemos que el sistema de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ es ortonormal, entonces $\|\vec{v}_k\| = 1 \neq 0$ y por tanto ninguno puede ser nulo, así que tendremos un sistema ortogonal de vectores no nulos y aplicando el apartado anterior se deduce que es un sistema linealmente independiente.

5. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces se cumple $\langle\vec{u}; \vec{v}\rangle = 0$, si tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$ y se aplicad bilinealidad
$$\langle\vec{u}; \alpha\vec{v}\rangle = \alpha\langle\vec{u}; \vec{v}\rangle = 0 \Longrightarrow u \perp \alpha v.$$

6. Son ortogonales
$$\left\langle \frac{\vec{v}_j}{\|\vec{v}_j\|}; \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{v}_j\| \cdot \|\vec{v}_k\|}\langle\vec{v}_j; \vec{v}_k\rangle = 0$$
y tienen norma unitaria
$$\|\frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}\| = \frac{1}{\|\vec{v}_k\|}\|\vec{v}_k\| = 1$$
Por el apartado 4, es un sistema linealmente independiente y como tiene n vectores, es una base.

7. B en un sistema ortogonal y por tanto $\vec{v}_j \perp \vec{v}_k \Longrightarrow \langle\vec{v}_j;\ \vec{v}_k\rangle = 0$, usando bilinealidad
$$\langle\alpha_j\vec{v}_j; \alpha_k\vec{v}_k\rangle = \alpha_j\alpha_k\langle\vec{v}_j; \vec{v}_k\rangle = 0,$$
por tanto B' es un sistema ortogonal.

   Como B es una base entonces $\vec{v}_j \neq 0;\ \forall j$, como además $\alpha_j \neq 0$ los vectores de B' son no nulos, así que por apartado 3 B' es un sistema libre y como hay n vectores, también será una base.

5.3.1. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V, espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim(V) = n$. El objetivo de esta sección es construir una nueva base $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ que sea ortogonal. Para ello seguiremos los pasos que a continuación se describen:

1. Tomamos $\vec{w}_1 = \vec{u}_1$ como el primer elemento de B'.

2. Definimos $\vec{w}_2$ como
$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \alpha_{21}\vec{w}_1,$$
y elegimos $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$; de forma que $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_1$, es decir
$$\langle \vec{w}_1; \vec{w}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{w}_1; \vec{u}_2 + \alpha_{21}\vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{w}_1; \vec{u}_2 \rangle + \alpha_{21}\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\langle \vec{w}_1; \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle}$$

3. Definimos $\vec{w}_3$ como
$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2,$$
y elegimos $\alpha_{31}, \alpha_{32} \in \mathbb{R}$; de forma que $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_1$ y $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_2$, es decir
$$\langle \vec{w}_1; \vec{w}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{w}_1; \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{w}_1; \vec{u}_3 \rangle + \alpha_{31}\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle + \alpha_{32}\langle \vec{w}_1; \vec{w}_2 \rangle = 0.$$
Como se ha construido el vector $\vec{w}_2$ para que ocurra $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2 \Rightarrow \langle \vec{w}_1; w_2 \rangle = 0$ y la ecuación anterior queda
$$\langle \vec{w}_1; \vec{u}_3 \rangle + \alpha_{31}\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{\langle \vec{w}_1; \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle}.$$
Procedemos de forma análoga para obtener el valor de α_{32}
$$\langle \vec{w}_2; \vec{w}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{w}_2; \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{w}_2; \vec{u}_3 \rangle + \alpha_{31}\langle \vec{w}_2; \vec{w}_1 \rangle + \alpha_{32}\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle = 0,$$
como $\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2 \Rightarrow \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_1 \rangle = 0$ y la ecuación anterior queda
$$\langle \vec{w}_2; \vec{u}_3 \rangle + \alpha_{31}\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{\langle \vec{w}_2; \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle}.$$

4. Si tenemos $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}\}$ con $(k-1) < n$, el siguiente vector de la base ortonormal, $\vec{w}_k$, se construye como
$$\vec{w}_k = \vec{u}_k + \alpha_{k1}\vec{w}_1 + \alpha_{k2}\vec{w}_2 + \cdots + \alpha_{k,k-1}\vec{w}_{k-1},$$
donde los parámetros α_{kj} se eligen de forma que $\vec{w}_k \perp \vec{w}_j;\ \forall j < k$
$$\langle \vec{w}_j; \vec{w}_k \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{w}_j; \vec{u}_k + \alpha_{k1}\vec{w}_1 + \alpha_{k2}\vec{w}_2 + \cdots + \alpha_{k,k-1}\vec{w}_{k-1} \rangle =$$
$$\langle \vec{w}_j; \vec{u}_k \rangle + \alpha_{k1}\langle \vec{w}_j; \vec{w}_1 \rangle + \alpha_{k2}\langle \vec{w}_j; \vec{w}_2 \rangle + \cdots + \alpha_{k,k-1}\langle \vec{w}_j; \vec{w}_{k-1} \rangle = 0$$
Como se cumple que $\vec{w}_j \perp \vec{w}_i;\ \forall i, j < k$, es decir $\langle \vec{w}_j; \vec{w}_i \rangle = 0;\ \forall i \neq j$, la ecuación queda:
$$\langle \vec{w}_j; \vec{u}_k \rangle + \alpha_{kj}\langle \vec{w}_j; \vec{w}_j \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_{kj} = -\frac{\langle \vec{w}_j; \vec{u}_k \rangle}{\langle \vec{w}_j; \vec{w}_j \rangle}$$

A partir de la base B' podemos obtener una base ortonormal B''dividiendo cada vector por su correspondiente norma asociada al producto escalar utilizado:

$$B'' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = \left\{ \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}, \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \ldots \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|} \right\}$$

Ejemplo 5.8 *Sea el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *y sea* $B = \{\vec{u}_1 = (1,1,1); \vec{u}_2 = (2,1,0); \vec{u}_3 = (1,0,0)\}$ *una sistema de vectores. Resuelve los siguientes apartados:*

1. *Demuestra que* B *es una base de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Encuentra una base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$*.*

Demostración:

1. Para demostrar que B es una base sólo hay que comprobar que los 3 vectores son linealmente independientes entre sí, lo que lleva a comprobar que el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores de B tiene rango máximo.

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Es fácil comprobar que $\det(M_B) = -1 \neq 0$ y como consecuencia la matriz está formada por vectores linealmente independientes.

2. Usamos el método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal.

   a) Tomamos $\vec{w}_1 = \vec{u}_1 = (1,1,1)$ como el primer elemento de B'.

   b) Definimos $\vec{w}_2$ como
   $$\vec{w}_2 = u_2 + \alpha_{21}\vec{w}_1 = (2,1,0) + \alpha_{21}(1,1,1)$$
   y elegimos $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$; de forma que $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_1$, en este caso
   $$\alpha_{21} = -\frac{\langle \vec{w}_1; \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle} = -\frac{\langle (1,1,1); (2,1,0) \rangle}{\langle (1,1,1); (1,1,1) \rangle} = -\frac{3}{3} = -1$$
   De donde $\vec{w}_2 = (2,1,0) - 1 \cdot (1,1,1) = (1,0,-1)$.

   c) Definimos $\vec{w}_3$ como
   $$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \alpha_{31}\vec{w}_1 + \alpha_{32}\vec{w}_2 = (1,0,0) + \alpha_{31}(1,1,1) + \alpha_{32}(1,0,-1)$$
   y se calculan $\alpha_{31}, \alpha_{32} \in \mathbb{R}$; de forma que $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_1$ y $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_2$, en este caso
   $$\alpha_{31} = -\frac{\langle \vec{w}_1; \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle} = -\frac{\langle (1,1,1); (1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,1); (1,1,1) \rangle} = -\frac{1}{3}$$
   $$\alpha_{32} = -\frac{\langle \vec{w}_2; \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle} = -\frac{\langle (1,0,-1); (1,0,0) \rangle}{\langle (1,0,-1); (1,0,-1) \rangle} = -\frac{1}{2}$$
   En este caso $\vec{w}_3 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

Por simplicidad tomaremos el vector $6\cdot\vec{w}_3 = (1,-2,1)$, que como hemos visto en la proposición 5.3 también es ortogonal a los anteriores. La base ortogonal sería

$$B' = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}.$$

Para encontrar una b.o.n. a partir de B', dividimos cada vector por sus respectivas normas

$$\|\vec{w}_1\| = \sqrt{\langle\vec{w}_1;\ \vec{w}_1\rangle} = \sqrt{\langle(1,1,1);\ (1,1,1)\rangle} = \sqrt{3},$$

$$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{\langle\vec{w}_2;\ \vec{w}_2\rangle} = \sqrt{\langle(1,0,-1);\ (1,0,-1)\rangle} = \sqrt{2},$$

$$\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\langle\vec{w}_3;\ \vec{w}_3\rangle} = \sqrt{\langle(1,-2,1);\ (1,-2,1)\rangle} = \sqrt{6}.$$

Siendo la b.o.n

$$B'' = \{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})\}.$$

Ejemplo 5.9 *Encuentra una base ortonormal del subespacio vectorial U definido por:*

$$U = \{(x,y) \mid x-2y=0\} \leqslant \mathbb{R}^2$$

Demostración: Como no se indica nada en el enunciado del problema suponemos que se usa el producto escalar euclídeo. Usando la ecuación implícita $x-2y=0$, obtenemos $x=2y$. Tomando $y=\alpha$, los vectores de U son de la forma $(2\alpha,\alpha)$, y por $B=\{(2,1)\}$ será una base de U.

Como B está formada por un único vector, entonces es una base ortogonal. Para encontrar la b.o.n. dividimos ese vector por su norma $\|(2,1)\| = \sqrt{5}$ y $B' = \{(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})\}$ es la base ortonormal buscada.

Ejemplo 5.10 *Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido como*

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+3t=0; y+z+2t=0\}$$

Encuentra una base ortonormal para W.

Demostración: Como no se indica nada en el enunciado, supondremos que estamos utilizando el producto escalar euclídeo. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de W a partir de sus ecuaciones implícitas

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z+3t=0 \\ y+z+2t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=z-3t \\ y=-z-2t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=\lambda \\ t=\mu \\ x=\lambda-3\mu-y \\ y=-\lambda-2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=\lambda \\ t=\mu \\ x=2\lambda-\mu \\ y=-\lambda-2\mu \end{array}\right\}$$

Luego $(x,y,z,y) \in W \Longleftrightarrow$

$$(x,y,z,t) = (2\lambda-\mu,-\lambda-2\mu,\lambda,\mu) = \lambda(2,-1,1,0)+\mu(-1,-2,0,1).$$

Se obtiene así una base de W: $B = \{(2,-1,1,0);(-1,-2,0,1)\}$. Podemos comprobar que esta base ya es ortorgonal, puesto que

$$\langle(2,-1,1,0);\ (-1,-2,0,1)\rangle = 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1\cdot 0+0\cdot 0 = 0$$

La base ortonormal buscada se obtiene dividiendo cada vector de B por su respectiva norma:

$$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,0,1)\right\}.$$

Ejemplo 5.11 *Usando el producto escalar* $\langle\ \ \rangle_p$ *en* $\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$\langle(x_1,y_1);\ (x_2,y_2)\rangle_p = 4x_1x_2 + 2y_1y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2,$$

y cuya norma es

$$\|(x,y)\|_p = \sqrt{4x^2+2y^2-4xy},$$

encuentra una b.o.n. a partir de la base $B = \{\vec{u}_1 : (2,0); \vec{u}_2 : (-1,1)\}$.

Solución: Usamos el método de Gram-Schmidt:

1. Tomamos $\vec{w}_1 = \vec{u}_1 = (2,0)$ como el primer elemento de B'.

2. Definimos $\vec{w}_2$ como

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \alpha_{21}\vec{w}_1 = (-1,1) + \alpha_{21}(2,0),$$

eligiendo $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ de forma que $\vec{w}_2$ sea ortogonal a $\vec{w}_1$ para el producto escalar $\langle\ \ \rangle_p$, es decir,

$$\langle\vec{w}_1;\vec{w}_2\rangle_p = \langle\vec{w}_1;\vec{u}_2+\alpha_{21}\vec{w}_1\rangle_p = \langle\vec{w}_1;\vec{u}_2\rangle_p + \alpha_{21}\langle\vec{w}_1;\vec{w}_1\rangle_p = 0$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_{21} &= -\frac{\langle\vec{w}_1;\vec{u}_2\rangle_p}{\langle\vec{w}_1;\vec{w}_1\rangle_p} = -\frac{\langle(2,0);(-1,1\rangle_p}{\|(2,0)\|_p^2} \\ &= -\frac{4\cdot 2\cdot(-1)+2\cdot 0\cdot 1-2\cdot 2\cdot 1-2\cdot 0\cdot(-1)}{4\cdot 2^2+2\cdot 0^2-4\cdot 2\cdot 0} = -\frac{-12}{16} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Y el vector $\vec{w}_2$ sería

$$\vec{w}_2 = (-1,1)+\alpha_{21}(2,0) = (-1,1)+\frac{3}{4}(2,0) = \left(\frac{1}{2},1\right)$$

La base ortogonal es

$$B' = \{(2,0);(\frac{1}{2},1)\}$$

Para encontrar la base ortonormal divididimos cada vector de B por su correspondiente norma $\|\cdot\|_p$:

$$\|\vec{w}_1\|_p = \sqrt{\langle\vec{w}_1;\ \vec{w}_1\rangle_p} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\|\vec{w}_2\|_p = \sqrt{\langle\vec{w}_2;\ \vec{w}_2\rangle_p} = \sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot 1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = \sqrt{1} = 1.$$

La base ortornormal será

$$B'' = \left\{\frac{1}{4}\,(2,0));\left(\frac{1}{2},1\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2},0\right);\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}.$$

5.4. Subespacio ortogonal

Definición 5.9 *Sea* $(V; \langle\ \ \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo y sea* $W \leqslant V$*. Definimos el subespacio ortogonal a* W*, que denotamos por* $W^{\perp}$*, al conjunto definido como*

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \perp \vec{w};\ \forall \vec{w} \in W\} = \{\vec{v} \in V \mid \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle = 0;\ \forall \vec{w} \in W\}$$

La definición implica que $W^{\perp}$, el subespacio ortogonal de un subespacio vectorial W, está formado por los vectores del espacio vectorial V que son ortogonales a todos los vectores de W.

Teorema 5.4 *Sea* V *un espacio vectorial euclídeo sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $W \leqslant V \Longrightarrow$

$$W^{\perp} \leqslant V.$$

Demostración:
Dado $\vec{u}, \vec{v} \in W^{\perp}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomemos $\vec{w} \in W$, entonces se cumple $\langle \vec{u}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle = 0$, por tanto

$$\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}; \vec{w} \rangle = \alpha\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \beta\langle \vec{w}; \vec{v} \rangle = 0;$$

luego $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W^{\perp}$ y por tanto $W^{\perp} \leqslant V$.

Teorema 5.5 *Sea* $(V; \langle\ \ \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo y sea* $W \leqslant V$*. Si* $B = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ *es una base de* W*, entonces se cumple*

$$\vec{v} \in W^{\perp} \Longleftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Demostración:

$\Longrightarrow$

$$\vec{v} \in W^{\perp} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w};\ \forall v \in W;\ \text{como } \vec{w}_j \in W\ \forall j = 1, \ldots, m \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, \ldots, m$$

$\Longleftarrow$ Sea B base de W, como $\vec{w} \in W$, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{w}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{w}_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\vec{w}_j.$$

Veamos que $\vec{v} \perp \vec{w}$

$$\langle \vec{v}; \vec{w} \rangle = \left\langle \vec{v}; \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\vec{w}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle \vec{v}; \vec{w}_j \rangle,$$

por hipótesis $\vec{v} \perp \vec{w}_j$, $\forall j = 1, \ldots, m \Rightarrow \langle \vec{v}; \vec{w}_j \rangle = 0; \forall j = 1, \ldots, m$ y todos los sumandos en el sumatorio son nulos, de donde se obtiene

$$\langle \vec{v}; \vec{w} \rangle = 0$$

El teorema implica que para comprobar si un vector $\vec{v}$ está en el conjunto $W^{\perp}$, sólo hay que probar que $\vec{v}$ es ortogonal a los elementos de una base de W, no es necesario probarlo para todos los vectores del subespacio W.

Ejemplo 5.12 *Dado* $W = \langle \{\vec{w}_1 = (1, -2, 0, 3)\,; \vec{w}_2 = (-3, 0, 2, 0)\,; \vec{w}_3 = (5, 0, -1, 0)\} \rangle \leqslant \mathbb{R}^4$*. Encuentra una base de* $W^{\perp}$ *considerando el producto escalar euclídeo.*

Solución: Por el teorema 5.5 si $\vec{u} = (x, y, z, t) \in W^{\perp} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, 2, 3 \Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{w}_j \rangle = 0;\ \forall j = 1, 2, 3$, es decir

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_1 \rangle = \langle (x, y, z, t)\,; (1, -2, 0, 3) \rangle = x - 2y + 3t = 0 \qquad (1)$$

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_2 \rangle = \langle (x, y, z, t)\,; (-3, 0, 2, 0) \rangle = -3x + 2z = 0 \qquad (2)$$

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_3 \rangle = \langle (x, y, z, t)\,; (5, 0, -1, 0) \rangle = 5x - z = 0 \qquad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se obtiene $x = z = 0$. Para estos valores, la ecuación (1) nos proporciona $y = \frac{3}{2}t$, luego las ecuaciones paramétricas de $W^{\perp}$ son $(x, y, z, t) = \left(0, \frac{3}{2}\alpha, 0, \alpha\right)$ y $W^{\perp} = \left\langle \left\{ \left(0, \frac{3}{2}, 0, 1\right) \right\} \right\rangle$.

Ejemplo 5.13 *Dado* $W = \langle \{ \vec{w}_1 = (-3, 2, 1)\,; \vec{w}_2 = (2, 0, -1) \} \rangle \leqslant \mathbb{R}^3$. *Encuentra una base de* $W^{\perp}$ *considerando el producto escalar euclídeo.*

Solución: Por el teorema 5.5 si $\vec{u} = (x, y, z) \in W^{\perp} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, 2 \Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{w}_j \rangle = 0;\ \forall j = 1, 2$, es decir

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_1 \rangle = \langle (x, y, z)\,; (-3, 2, 1) \rangle = -3x + 2y + z = 0 \qquad (1)$$

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_2 \rangle = \langle (x, y, z)\,; (2, 0, -1) \rangle = 2x - z = 0 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se obtiene $z = 2x$ y sustituyendo en la ecuación (1) nos proporciona $y = \frac{1}{2}x$, y las ecuaciones paramétricas de $W^{\perp}$ son $(x, y, z) = \left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha, 2\alpha\right)$ y $W^{\perp} = \langle \{ (2, 1, 4) \} \rangle$.

Ejemplo 5.14 *Dado* $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y - z = 0 \right\}$. *Encuentra una base de* $W^{\perp}$ *considerando el producto escalar euclídeo.*

Solución: En este caso, si utilizamos la definición de ortogonal de un subespacio vectorial obtenemos directamente una base de $W^{\perp}$, el conjunto W está definido mediante la ecuación implícita $-x + 2y - z = 0$, que se puede expresar como el producto escalar de los vectores (x, y, z) y $(-1, 2, -1)$

$$-x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot x + 2 \cdot y - 1 \cdot z = 0 \Leftrightarrow \langle (x, y, z)\,; (-1, 2, -1) \rangle = 0$$

luego

$$W^{\perp} = \langle \{ (-1, 2, -1) \} \rangle$$

Ejemplo 5.15 *Dado* $W = \langle \{ \vec{w}_1 = (1, 3, -2)\,; \vec{w}_2 = (-1, 0, 3) \} \rangle \leqslant \mathbb{R}^3$. *Encuentra una base de* $W^{\perp}$ *considerando el siguiente producto escalar:*

$$\langle (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) \rangle_P = x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 + 4 z_1 z_2.$$

Solución: Por el teorema 5.5 si $\vec{u} = (x, y, z) \in W^{\perp} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, 2 \Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{w}_j \rangle_P = 0;\ \forall j = 1, 2$, es decir

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_1 \rangle_P = \langle (x, y, z)\,; (-3, 2, 1) \rangle_P = -3x + 4y + 4z = 0 \qquad (1)$$

$$\langle \vec{u}; \vec{w}_2 \rangle_P = \langle (x, y, z)\,; (2, 0, -1) \rangle_P = 2x - 4z = 0 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se obtiene $z = \frac{x}{2}$ y sustituyendo en la ecuación (1) nos proporciona $y = \frac{1}{4}x$, luego las ecuaciones paramétricas de $W^{\perp}$ son $(x, y, z) = \left(\alpha, \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2}\alpha\right)$ y $W^{\perp} = \langle \{ (4, 1, 2) \} \rangle$.

Teorema 5.6 *Sea $(V;\langle\quad\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V \Rightarrow$*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Demostración: Vamos a comprobar que cualquier elemento $\vec{v} \in V$ se puede poner como suma de un elemento $\vec{v}_1 \in W$ y de otro elemento de $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$. Para ello consideramos $B = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ una base ortogonal de W (siempre es posible obtener una base de este tipo mediante el método de Gram-Schmidt). Definiremos el elemento $\vec{v}_1$ como

$$\vec{v}_1 = \frac{\langle\vec{v};\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1;\vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 + \ldots + \frac{\langle\vec{v};\vec{w}_m\rangle}{\langle\vec{w}_m;\vec{w}_m\rangle}\vec{w}_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\vec{v};\vec{w}_k\rangle}{\langle\vec{w}_k;\vec{w}_k\rangle}\vec{w}_k$$

y por tanto

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1.$$

Está claro que $\vec{v}_1 \in W$ ya que se ha construido como una combinación lineal de los elementos de la base B de W. Ahora comprobaremos que $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$, para ello y utilizando el teorema 5.5 sólo es necesario comprobar que $\vec{v}_2 \perp \vec{w}_j;\ \forall j = 1, \ldots, m$.

$$\langle\vec{v}_2;\vec{w}_j\rangle = \langle\vec{v}-\vec{v}_1;\vec{w}_j\rangle = \left\langle \vec{v} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\vec{v};\vec{w}_k\rangle}{\langle\vec{w}_k;\vec{w}_k\rangle}\vec{w}_k;\vec{w}_j \right\rangle$$

Usando bilinealidad

$$\left\langle \vec{v} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\vec{v};\vec{w}_k\rangle}{\langle\vec{w}_k;\vec{w}_k\rangle}\vec{w}_k;\vec{w}_j \right\rangle = \langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle - \sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\vec{v};\vec{w}_k\rangle}{\langle\vec{w}_k;\vec{w}_k\rangle}\langle\vec{w}_k;\vec{w}_j\rangle$$

B es una base ortogonal $\Rightarrow \langle\vec{w}_k;\vec{w}_j\rangle = 0;\ \forall j \neq k$, luego en el sumatorio sólo queda un término no nulo, el correspondiente al valor $k = j$

$$\langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle - \sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\vec{v};\vec{w}_k\rangle}{\langle\vec{w}_k;\vec{w}_k\rangle}\langle\vec{w}_k;\vec{w}_j\rangle = \langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle - \frac{\langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle}{\langle\vec{w}_j;\vec{w}_j\rangle}\langle\vec{w}_j;\vec{w}_j\rangle = \langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle - \langle\vec{v};\vec{w}_j\rangle = 0,$$

y queda probado que $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$.

1. La suma es directa, puesto que si $\vec{w} \in W \cap W^{\perp}$, entonces como $\vec{w} \in W$ y $\vec{w} \in W^{\perp}$, debe ocurrir $\langle\vec{w};\vec{w}\rangle = 0$ y por las propiedades del producto escalar esto implica que debe ser el vector nulo.

5.5. Proyección ortogonal

Definición 5.10 *Sea $(V;\langle\quad\rangle)$, espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V$. Como $V = W \oplus W^{\perp}$ entonces $\exists \vec{v}_1 \in W, \vec{v}_2 \in W^{\perp}$ tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. El vector $\vec{v}_1 \in W$ se define como la* proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W *(o también* proyección ortogonal de $\vec{v}$ de base W*).*

Teorema 5.7 *Sea $\vec{v} \in V$, con $(V;\langle\quad\rangle)$ espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V$, entonces la proyección ortogonal de base W es única.*

Demostración: Supongamos que $\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in W$ son proyecciones ortogonales de $\vec{v} \in V$ de base W. Esto implica que $\exists \vec{v}_2, \vec{w}_2 \in W^{\perp}$ tales que

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

por tanto debe cumplirse

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{w}_1 = \vec{v}_2 - \vec{w}_2$$

pero $\vec{v}_1 - \vec{w}_1 \in W$, mientras que $\vec{v}_2 - \vec{w}_2 \in W^{\perp}$, así que

$$\vec{v}_1 - \vec{w}_1 = \vec{v}_2 - \vec{w}_2 \in W \cap W^{\perp} \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{w}_1 = \vec{v}_2 - \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 - \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{w}_1 \\ \\ \vec{v}_2 - \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{w}_2 \end{cases}$$

Definición 5.11 *Sea $(V; \langle \quad \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V$. Dado $\vec{v} \in V$, llamamos* distancia *de $\vec{v}$ a W a*

$$d\left(\vec{v}, W\right) = \text{mín}\left\{d\left(\vec{v}, \vec{w}\right) : \vec{w} \in W\right\}$$

Teniendo en cuenta la definición de la distancia entre dos vectores, también podemos poner:

$$d\left(\vec{v}, W\right) = \text{mín}\left\{\|\vec{w} - \vec{v}\| : \vec{w} \in W\right\}$$

Teorema 5.8 *Sea $(V; \langle \quad \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V$. Dado $\vec{v} \in V$ entonces se cumple*

$$d(\vec{v}, W) = d(\vec{v}, \vec{v}_1) = \|\vec{v} - \vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|,$$

siendo $\vec{v}_1$ la proyección ortogonal de $\vec{v}$ de base W y siendo $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$.

Demostración: Sabemos que para $\vec{v} \in V$ y $W \leqslant V \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in W$ y $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$. Tenemos que comprobar que

$$d(\vec{v}, \vec{v}_1) \leq d(\vec{v}, \vec{w});\ \forall \vec{w} \in W,$$

desigualdad que es equivalente a probar que

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}\| \leq \|\vec{w} - \vec{v}\|;\ \forall \vec{w} \in W$$

es decir

$$\|\vec{v}_2\| \leq \|\vec{w} - \vec{v}\|;\ \forall \vec{w} \in W$$

Por comodidad, usaremos el cuadrado de la norma

$$\|\vec{v}_2\|^2 \leq \|\vec{w} - \vec{v}\|^2;\ \forall \vec{w} \in W,$$

que en términos del producto escalar sería

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \leq \langle \vec{w} - \vec{v}; \vec{w} - \vec{v} \rangle;\ \forall \vec{w} \in W,$$

Como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \leq \langle \vec{w} - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\,; \vec{w} - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \rangle;\ \forall \vec{w} \in W,$$

o reagrupando términos

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \leq \langle (\vec{w} - \vec{v}_1) + \vec{v}_2; (\vec{w} - \vec{v}_1) + \vec{v}_2 \rangle;\ \forall \vec{w} \in W,$$

Utilizando la bilinealidad del producto escalar tendremos

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \leq \langle (\vec{w} - \vec{v}_1)\,; (\vec{w} - \vec{v}_1) \rangle + \langle (\vec{w} - \vec{v}_1)\,; \vec{v}_2 \rangle + \langle \vec{v}_2; (\vec{w} - \vec{v}_1) \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle;\ \forall \vec{w} \in W,$$

Finalmente tenemos en cuenta que $\vec{w}, \vec{v}_1 \in W$, como W es un subespacio vectorial entonces $(\vec{w} - \vec{v}_1) \in W$ y como $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$, entonces $\langle \vec{v}_2; (\vec{w} - \vec{v}_1) \rangle = 0$ y por tanto

$$\langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \leq \langle (\vec{w} - \vec{v}_1)\,; (\vec{w} - \vec{v}_1) \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{v}_2 \rangle \Longleftrightarrow 0 \leq \langle (\vec{w} - \vec{v}_1)\,; (\vec{w} - \vec{v}_1) \rangle \Longleftrightarrow 0 \leq \|\vec{w} - \vec{v}_1\|^2;\ \forall \vec{w} \in W,$$

desigualdad esta última que es cierta por las propiedades de la norma.

5.5.1. Obtención de la proyección ortogonal

Sea $W \leqslant V$ y supongamos que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, con $B_1 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ una base del subespacio vectorial W. Como $V = W \oplus W^{\perp}$ entonces $\dim\left(W^{\perp}\right) = n - m$. Consideremos una base de $W^{\perp}$, $B_2 = \{\vec{w}_{m+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$, por tanto, $B = B_1 \cup B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m, \vec{w}_{m+1}, \ldots, \vec{w}_n\}$ será una base de V.

Sea $\vec{v} \in V$, entonces $\exists \vec{v}_1 \in W;\ \vec{v}_2 \in W^{\perp}$ tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Como $\vec{v}_1 \in W$, entonces será combinación lineal de los elementos de la base B_1, es decir

$$\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} : \vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{w}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{w}_m$$

mientras que como $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$, entonces será combinación lineal de los elementos de la base B_2, es decir,

$$\exists\ \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \vec{v}_2 = \alpha_{m+1} \vec{w}_{m+1} + \ldots + \alpha_n \vec{w}_n$$

así

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{w}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{w}_m + \alpha_{m+1} \vec{w}_{m+1} +, \ldots, \alpha_n \vec{w}_n$$

Si $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{w}_k = (\vec{w}_{1k}, \ldots, \vec{w}_{nk})\ \forall k$, entonces para encontrar $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 w_{11} + \alpha_2 w_{12} + \ldots + \alpha_n w_{1n} \\ x_2 &= \alpha_1 w_{21} + \alpha_2 w_{22} + \ldots + \alpha_n w_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_1 w_{n1} + \alpha_2 w_{n2} + \ldots + \alpha_n w_{nn} \end{aligned}$$

Sistema cuya solución nos dará los valores para los coeficientes α_k.

Si multiplicamos escalarmente el vector $\vec{v}$ por $\vec{w}_k \in W$

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_k \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}_k \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_k \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{w}_k \rangle$$

y se tiene en cuenta que $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$, tendremos

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_k \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_k \rangle = \langle \alpha_1 \vec{w}_1 + \ldots + \alpha_m \vec{w}_m; w_k \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_k \rangle + \ldots + \alpha_m \langle \vec{w}_m; \vec{w}_k \rangle$$

Si repetimos el proceso con cada vector de la base B_1 de W, obtendríamos el sistema

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle &= \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle + \ldots + \alpha_m \langle \vec{w}_m; \vec{w}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle &= \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_2 \rangle + \ldots + \alpha_m \langle \vec{w}_m; \vec{w}_2 \rangle \\ &\vdots \\ \langle \vec{v}; \vec{w}_m \rangle &= \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_m \rangle + \ldots + \alpha_m \langle \vec{w}_m; \vec{w}_m \rangle \end{aligned}$$

que nos daría un sistema para calcular los coeficientes de $\vec{v}_1$, el valor de $\vec{v}_2$ se obtiene teniendo en cuenta que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$.

Si la base B_1 de W fuese ortogonal (siempre la se puede conseguir utilizando el método de Gram-Schmidt), entonces $\langle \vec{w}_j; \vec{w}_k \rangle = 0;\ \forall j, k$ salvo para $j = k$ y el sistema se transforma en

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle \\
&\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle = \alpha_2 \langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle \\
&\vdots \\
&\langle \vec{v}; \vec{w}_m \rangle = \alpha_m \langle \vec{w}_m; \vec{w}_m \rangle
\end{aligned}$$

y despejando

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \\
&\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} \\
&\vdots \\
&\alpha_n = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_n \rangle}{\langle \vec{w}_n; \vec{w}_n \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_n \rangle}{\|\vec{w}_n\|^2}
\end{aligned}$$

Finalmente, si la base B_1 fuera ortonormal, entonces $\|\vec{w}_k\| = 1;\ \forall k = 1, \ldots, m$ y obtendremos los valores de los coeficientes directamente

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} = \langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle \\
&\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} = \langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle \\
&\vdots \\
&\alpha_n = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_n \rangle}{\langle \vec{w}_n; \vec{w}_n \rangle} = \frac{\langle \vec{v}; \vec{w}_n \rangle}{\|\vec{w}_n\|^2} = \langle \vec{v}; \vec{w}_n \rangle \\
&.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.16 *Dado el subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *definido como* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$, *encuentra la proyección ortogonal del vector* $\vec{v} = (6, -6, 10)$ *de base* W*, suponiendo el producto escalar euclídeo.*

Solución: Dado $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces $\exists \vec{v}_1 \in W; \exists \vec{v}_2 \in W^{\perp}$ tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Necesitaremos una base de W. Como W está descrito mediante una sola ecuación implícita, usamos dos parámetros para obtener sus ecuaciones paramétricas; de forma que si $y = \alpha$ y $z = \beta$ se obtiene $(x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(1, 1, 0) + \beta\,(1, 0, 1)$ y $B = \{\vec{w}_1 : (1, 1, 0);\ \vec{w}_2 : (1, 0, 1)\}$ es una base de W.

Usando los coeficientes de la ecuación implícita obtenemos una base de $W^{\perp}$, en este caso, $B' = \{\vec{w}_3 = (1,-1,-1)\}$.

$$\vec{v}_1 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1)$$

$$\vec{v}_2 \in W^{\perp} \Rightarrow \vec{v}_2 = \gamma(1,-1,-1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow (6,-6,10) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,-1,-1) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha-\gamma, \beta-\gamma)$$

Para encontrar los valores de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ hay que tener en cuenta que $\{\vec{v}_1, \vec{w}_1, \vec{w}_2\} \in W$ y $\{\vec{v}_2, \vec{w}_3\} \in W^{\perp}$, por tanto el producto escalar de cualquier elemento del primer conjunto y cualquier elemento del segundo conjunto es 0:

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}_2 \rangle = \langle v_1; \vec{w}_2 \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1; \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2; \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_2; \vec{w}_3 \rangle$$

Sustituyendo los valores correspondientes para cada vector

$$\langle (6,-6,10); (1,1,0) \rangle = \langle \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1); (1,1,0) \rangle = \alpha \langle (1,1,0); (1,1,0) \rangle + \beta \langle (1,0,1); (1,1,0) \rangle$$

$$\langle (6,-6,10); (1,0,1) \rangle = \langle \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1); (1,0,1) \rangle = \alpha \langle (1,1,0); (1,0,1) \rangle + \beta \langle (1,0,1); (1,0,1) \rangle$$

$$\langle (6,-6,10); (1,-1,-1) \rangle = \langle \gamma(1,-1,-1); (1,-1,-1) \rangle = \gamma \langle (1,-1,-1); (1,-1,-1) \rangle$$

Que nos conduce al siguiente sistema

$$0 = 2\alpha + \beta \qquad (1)$$

$$16 = \alpha + 2\beta \qquad (2)$$

$$2 = 3\gamma \qquad (3)$$

cuya solución es $\alpha = -\frac{16}{3}$, $\beta = \frac{32}{3}$ y $\gamma = \frac{2}{3}$, de forma que $\vec{v}_1 = (\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{32}{3})$ y $\vec{v}_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Ejemplo 5.17 *Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido como $W = \langle (2,0,-1); (6,0,1) \rangle$ y sea $\vec{v} = (2,-1,3)$. Calcula la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W.*

Solución: Los vectores $\vec{w}_1 = (2,0,-1)$ y $\vec{w}_2 = (6,0,1)$ forman una base de W, luego si $\vec{v}_1$ es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W, entonces

$$\vec{v}_1 = \alpha_1 (2,0,-1) + \alpha_2 (6,0,1)$$

y se debe cumplir

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{w}_2; \vec{w}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{v}; \vec{w}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1; \vec{w}_2 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{w}_2; \vec{w}_2 \rangle$$

es decir

$$\langle(2,-1,3);(2,0,-1)\rangle = \alpha_1\langle(2,0,-1);(2,0,-1)\rangle + \alpha_2\langle(2,0,-1);(6,0,1)\rangle$$

$$\langle(2,-1,3);\ (6,0,1)\rangle = \alpha_1\langle(2,0,-1);(6,0,1)\rangle + \alpha_2\langle(6,0,1);(6,0,1)\rangle$$

Usando el producto escalar euclídeo obtenemos el sistema

$$1 = 5\alpha_1 + 11\alpha_2$$

$$15 = 11\alpha_1 + 37\alpha_2$$

que tiene por solución $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 1$, y la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W será $\vec{v}_1 = -2 \cdot (2,0,-1) + 1 \cdot (6,0,1) = (2,0,3)$.

Otra forma de resolver el problema es obtener el valor de $\vec{v}_2$, la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $W^\perp$, para ello necesitamos una base de $W^\perp$. Usando la base de W se obtienen las ecuaciones implícitas de $W^\perp$

$$W^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0; \quad 6x + z = 0\right\}$$

De la primera ecuación se obtiene $z = 2x$ y usando la segunda obtenemos $x = 0$, por tanto el espacio $W^\perp$ se puede describir como

$$W^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0,y,0)\right\} = \langle(0,1,0)\rangle$$

Siendo $\vec{w}_3 = (0,1,0)$ base de $W^\perp$. Como $\vec{v}_2 \in W^\perp$, entonces $\vec{v}_2 = \alpha_3\vec{w}_3 = \alpha(0,1,0)$ y por tanto

$$\langle\vec{v};\vec{w}_3\rangle = \langle\vec{v}_1 + \vec{v}_2;\vec{w}_3\rangle = \langle\vec{v}_1;\vec{w}_3\rangle + \langle\vec{v}_2;\vec{w}_3\rangle$$

Como $\vec{v}_1 \in W; \vec{w}_3 \in W^\perp \Longrightarrow \langle\vec{v}_1;\vec{w}_3\rangle = 0$ y tendremos

$$\langle\vec{v};\vec{w}_3\rangle = \langle\vec{v}_2;\vec{w}_3\rangle = \langle\alpha_3\vec{w}_3;\vec{w}_3\rangle = \alpha_3\langle\vec{w}_3;\vec{w}_3\rangle$$

y por tanto

$$\alpha_3 = \frac{\langle\vec{v};\vec{w}_3\rangle}{\langle\vec{w}_3;\vec{w}_3\rangle} = \frac{\langle(2,-1,3);(0,1,0)\rangle}{\langle(0,1,0);(0,1,0)\rangle} = \frac{-1}{1} = -1,$$

Y por tanto $\vec{v}_2 = -1 \cdot (0,1,0) = (0,-1,0)$ y el valor de $\vec{v}_1$ sería

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2 = (2,-1,3) - (0,-1,0) = (2,0,3),$$

como antes.

Ejemplo 5.18 *Consideremos el espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar* $\langle\quad\rangle_P$ *definido como*

$$\langle(x_1,y_1,z_1);(x_2,y_2,z_2)\rangle_P = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 3z_1z_2$$

y sea el subespacio

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\right\}$$

Se pide:

1. *Hallar una base ortogonal de* W*.*

2. *Obtener la proyección ortogonal sobre* W *del vector* $v = (6,-6,-10)$ *utilizando el producto escalar* $\langle\ \ \rangle_P$

Solución:

1. De la definición de W tendremos $x = y + z$ y tomando $y = \alpha$ y $z = \beta$, obtenemos que los puntos de W son de la forma $(\alpha+\beta,\alpha,\beta) = \alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)$ y $\vec{w}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{w}_2 = (1,0,1)$ será una base de W. Ahora utilizaremos el método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal B' de W.

   a) Tomamos $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = (1,1,0)$ como el primer elemento de B'.

   b) Definimos $\vec{u}_2$ como
   $$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \alpha_{21}\vec{u}_1 = (1,0,1) + \alpha_{21}(1,1,0)$$
   y elegimos $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$; de forma que $\vec{u}_2 \perp_{P\vec{u}1}$ (el subíndice indica que los vectores son perpendiculares respecto al producto escalar $\langle;\ \rangle_P$, en este caso
   $$\alpha_{21} = -\frac{\langle\vec{w}_2;\vec{u}_1\rangle_P}{\langle\vec{u}_1;\vec{u}_1\rangle_P} = -\frac{\langle(1,0,1);(1,1,0)\rangle_P}{\langle(1,1,0);(1,1,0)\rangle_P} = -\frac{2\cdot1\cdot1+0\cdot1+3\cdot1\cdot0}{2\cdot1\cdot1+1\cdot1+3\cdot0\cdot0} = \frac{2}{3}$$
   De donde $\vec{u}_2 = (1,0,1) - \frac{2}{3}\cdot(1,1,0) = (\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$

   c) Por simplicidad tomaremos el vector $3\cdot\vec{u}_2 = (1,-2,3)$, que también es ortogonal a los anteriores respecto del producto escalar $\langle\ \ \rangle_P$. La base ortogonal será
   $$B' = \{(1,1,0),(1,-2,3)\}.$$

2. Para obtener la proyección ortogonal sobre W del vector $\vec{v} = (6,-6,-10)$ utilizando el producto escalar $\langle\ \ \rangle_P$ hay que tener en cuenta que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 \in W$, la proyección ortogonal buscada y siendo B' una base de W y $\vec{v}_2 \in W^{\perp}$ entonces
   $$\vec{v}_1 = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$$
   Mientras que
   $$\langle\vec{v};\vec{u}_1\rangle_P = \langle\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{u}_1\rangle_P = \langle\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+v_2;\vec{u}_1\rangle_P = \alpha_1\langle\vec{u}_1;\vec{u}_1\rangle_P$$
   $$\langle\vec{v};\ \vec{u}_2\rangle_P = \langle\vec{v}_1+\vec{v}_2;\vec{u}_2\rangle_P = \langle\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+v_2;\vec{u}_2\rangle_P = \alpha_2\langle\vec{u}_2;\vec{u}_2\rangle_P$$
   Puesto que $\langle\vec{u}_1;\vec{u}_2\rangle_P = \langle\vec{u}_1;\vec{v}_2\rangle_P = \langle\vec{u}_2;\vec{v}_2\rangle_P = 0$. Los valores de α_1 y α_2 serán
   $$\alpha_1 = \frac{\langle\vec{v};\vec{u}_1\rangle_P}{\langle\vec{u}_1;\vec{u}_1\rangle_P} = \frac{\langle(6,-6,-10);(1,1,0)\rangle_P}{\langle(1,1,0);(1,1,0)\rangle_P} = \frac{6}{3} = 2$$
   $$\alpha_2 = \frac{\langle\vec{v};\vec{u}_2\rangle_P}{\langle\vec{u}_2;\vec{u}_2\rangle_P} = \frac{\langle(6,-6,-10);(1,-2,3)\rangle_P}{\langle(1,-2,3);(1,-2,3)\rangle_P} = \frac{-66}{33} = -2$$
   y la proyección buscada es
   $$\vec{v}_1 = 2\cdot(1,1,0) - 2\frac{1}{3}(1,-2,3) = (0,6,-6)$$

Otra forma de resolver el problema es encontrar una base del subespacio $W^{\perp}$, el ortogonal a W respecto a $\langle\quad\rangle_P$, cuyas ecuaciones se pueden obtener fácilmente a partir de la base de W:

$$\langle (x,y,z);(1,1,0\rangle_P = 0 \Longleftrightarrow 2x+y=0$$

$$\langle (x,y,z);(1,0,1\rangle_P = 0 \Longleftrightarrow 2x+3z=0$$

Claramente $y=-2x$ y $z=-\frac{2}{3}x$ y por tanto los vectores de $W^{\perp}$ son de la forma $(x,-2x,-\frac{2}{3}x) = x(1,-2,-\frac{2}{3})$ y $\left\{(1,-2,-\frac{2}{3})\right\}$ es una base o también, multiplicando por 3 una base será $\vec{w}_3=(3,-6,-2)$.

A partir de este vector se puede obtener la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $W^{\perp}$ que debe ser de la forma

$$\vec{v}_2 = \alpha_3\vec{w}_3 = \alpha_3(3,-6,-2)$$

y el valor de α_3 se obtendrá como

$$\alpha_3 = \frac{\langle \vec{v};\vec{w}_3\rangle_P}{\langle \vec{w}_3;\vec{w}_3\rangle_P} = \frac{\langle (6,-6,-10);(3,-6,-2)\rangle_P}{\langle (3,-6,-2);(3,-6,-2)\rangle_P} = \frac{132}{66} = 2$$

y por tanto $\vec{v}_2 = 2(3,-6,-2) = (6,-12,-4)$ y obtenemos $\vec{v}_1 = \vec{v}-\vec{v}_2 = (6,-6,-10)-(6,-12,-4) = (0,6,-6)$, como antes.

Teorema 5.9 *Sea $(V;\langle\quad\rangle)$ espacio vectorial euclídeo y sea $W \leqslant V$, entonces $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

Demostración: Haremos la demostración por doble inclusión. Por definición de subespacio ortogonal de un subespacio vectorial, tenemos

$$(W^{\perp})^{\perp} = \left\{\vec{u}\in V : \langle \vec{u};\ \vec{v}\rangle = 0;\ \forall \vec{v}\in W^{\perp}\right\}$$

Sea $\vec{w}\in W$, entonces por definición de $W^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{w};\ \vec{v}\rangle = 0;\ \forall\vec{v}\in W^{\perp}$y por tanto $\vec{w}\in (W^{\perp})^{\perp}$, de esta forma $W\subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

Supongamos ahora que $\vec{w}\in (W^{\perp})^{\perp}$, entonces como $\vec{w}\in V$, usando el teorema **??**, $\exists\vec{w}_1\in W$ y $\exists\vec{w}_2\in W^{\perp}$ tal que $\vec{w}=\vec{w}_1+\vec{w}_2$, de donde $\vec{w}_2 = \vec{w}-\vec{w}_1$, entonces

$$\langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_2\rangle = \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}-\vec{w}_1\rangle = \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}\rangle - \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_1\rangle$$

Como $\vec{w}_1\in W$ y $\vec{w}_2\in W^{\perp}$, que es su ortogonal entonces $\langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_1\rangle = 0$; por otra parte, como $\vec{w}_2\in W^{\perp}$ y $\vec{w}\in (W^{\perp})^{\perp}$, que es su ortogonal, entonces $\langle \vec{w}_2;\ \vec{w}\rangle = 0$; así que hemos probado que

$$\langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_2\rangle = \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}\rangle - \langle \vec{w}_2;\ \vec{w}_1\rangle = 0$$

Por las propiedades del producto escalar $\vec{w}_2=0$, es decir, $\vec{w}=\vec{w}_1\in W$, lo que prueba que $(W^{\perp})^{\perp}\in W$. Hemos probado que $W\subseteq (W^{\perp})^{\perp}$ y que $(W^{\perp})^{\perp}\subseteq W$ lo que implica que $(W^{\perp})^{\perp}=W$.

Definición 5.12 *Sea $(V;\langle\quad\rangle)$ espacio vectorial euclídeo y sea $W\leqslant V$. Dado $\vec{v}\in V$, sabemos que $\exists\vec{v}_1\in W, \vec{v}_2\in W^{\perp}$ tal que $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. Definimos ahora la* simetría ortogonal *de $\vec{v}$ de base W al vector $s(\vec{v})=\vec{v}_1-\vec{v}_2$.*

Ejemplo 5.19 *Dado el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ definido en el ejercicio 5.5.1, encuentra la simetría ortogonal del vector $\vec{v}=(6,-6,10)$ de base W.*

Solución: Hemos probado que el vector $\vec{v}$ se puede expresar como $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1\in W$ y $\vec{v}_2\in W^{\perp}$ con $\vec{v}_1 = \left(\frac{16}{3},-\frac{16}{3},\frac{32}{3}\right)$ y $\vec{v}_2 = \left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, la simetría ortogonal de v de base W que buscamos sería

$$s(\vec{v}) = \vec{v}_1-\vec{v}_2 = \left(\frac{16}{3},-\frac{16}{3},\frac{32}{3}\right) - \left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{14}{3},-\frac{14}{3},\frac{34}{3}\right)$$