Capítulo 4

Espacios Vectoriales

4.1. Definiciones y ejemplos

Definición 4.1 *Sea V un conjunto y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Diremos que V es un* espacio vectorial *sobre $\mathbb{K}$ o un* $\mathbb{K}$–espacio vectorial, *si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *En V existe una Ley de Composición Interna (L.C.I.), que llamamos suma y que denotamos por $+$, que asocia a cada par de elementos $\vec{u}, \vec{v} \in V$, otro elemento $\vec{u} + \vec{v} \in V$, y que cumple las siguientes propiedades:*

   a*) Asociativa:*
   $$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \Longrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

   b*) Conmutativa:*
   $$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$$

   c*) Elemento Neutro:*
   $$\exists\, \vec{0}_V \in V \;:\; \vec{u} + \vec{0}_V = \vec{0}_V + \vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in V.$$

   Por simplicidad denotaremos a ese elemento sin el subíndice: $\vec{0}_V = \vec{0}$.

   d*) Elementos Opuestos:*
   $$\forall \vec{u} \in V \Rightarrow \exists \vec{v} \in V \;:\; \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$$

   En este caso se escribirá $\vec{v} = -\vec{u}$.

   Con estas propiedades el conjunto V tiene estructura de Grupo Abeliano para la operación suma de vectores.

2. *En V existe una Ley de Composición Externa (L.C.E.), que llamamos producto por escalares y denotamos por $\cdot$, tal que $\forall \vec{u} \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, se le asigna otro elemento $\lambda \cdot \vec{v} \in V$, que cumple las siguientes propiedades:*

   a*) Pseudodistributivas:*
   $$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V; \forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$
   $$\forall \vec{v} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$$

   b*) Pseudoasociativa:*
   $$\forall \vec{v} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

c) *Pseudoelemento Neutro: Si* $1 \in \mathbb{K}$*, es el elemento neutro para la multiplicación en el cuerpo* $\mathbb{K}$*, entonces*

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{u}, \quad \forall \vec{v} \in V$$

Por simplicidad podemos prescindir del símbolo $\cdot$ *para esta operación:* $\lambda \cdot v = \lambda v$

Los elementos de V se denominan *vectores*, mientras que los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ son los *escalares*. Diremos que la terna $(V, +, \cdot)$ tiene estructura de *espacio vectorial*.

Ejemplo 4.1 *El conjunto* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial si definimos la suma y producto de la forma usual.*

1. *Suma de vectores: Dados* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *con* $\vec{u} = (x_1, y_1)$ *y* $\vec{v} = (x_2, y_2)$*, entonces*

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

2. *Producto por escalares: Dados* $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ *con* $\vec{u} = (x_1, y_1)$*, entonces*

$$\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 4.2 *Podemos hacer una extensión a la dimensión* n*. El conjunto* $V = \mathbb{R}^n$ *es un* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial con la suma y producto definidos como*

1. *Suma de vectores: Dados* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *con* $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$*, entonces*

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

2. *Producto por escalares: Dados* $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ *con* $u = (x_1, \ldots, x_n)$*, entonces*

$$\lambda u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Ejemplo 4.3 *El conjunto* $V = \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ *definido como el conjunto de todos los polinomios de grado* ≤ 2 *sobre* $\mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial con las operaciones suma y producto por un real definidas como*

1. *Suma de polinomios: Dados* $p, q \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ *con* $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *y* $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$*, entonces*

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$$

2. *Producto por escalares: Dados* $\lambda \in \mathbb{R}, p(x) \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ *con* $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$*, entonces*

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$$

Ejemplo 4.4 *El conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre un intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial.*

Ejemplo 4.5 *El conjunto* $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ *de las matrices de dimensión* $m \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*.*

Proposición 4.1 *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial. Se cumple:*

1. $$\forall \vec{v} \in V \Longrightarrow 0 \cdot v = \vec{0}$$

2. $$\forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

3. $$Si\ \lambda \cdot \vec{v} = 0\ y\ \vec{v} \neq \vec{0} \Longrightarrow \lambda = 0$$

4. $$Si\ \lambda \vec{v} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0\ o\ \vec{v} = \vec{0}$$

5. $$Si\ \lambda \vec{v} = \lambda \vec{u}\ y\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$$

6. $$Si\ \lambda \vec{v} = \mu \vec{v}\ y\ \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$$

4.2. Subespacios vectoriales

Definición 4.2 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Dado $W \subseteq V$, diremos que W es un* subespacio vectorial *de V, y se denota por $W \leq V$, si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$.
2. $\forall \vec{u} \in W; \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in W$.

Proposición 4.2 *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Si W es subespacio vectorial de V, entonces $(W, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.*

Proposición 4.3 (Caracterización de subespacio) *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, $W \subseteq V$, entonces:*

$$W \text{ es un subespacio vectorial de } V \Longleftrightarrow (\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \text{ y } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W)$$

Ejemplo 4.6 *Dado el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ y consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$, vamos a demostrar que es un subespacio vectorial de W. Para ello comprobaremos que se cumplen las propiedades descritas en la definición.*

1. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ *entonces*

$$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W \Longrightarrow x_1 + y_1 = 0$$

$$\vec{w}_2 = (x_2, y_2)) \in W \Longrightarrow x_2 + y_2 = 0$$

Si calculamos $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$$

con

$$x_3 + y_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

y por tanto $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

2. $\vec{w} \in W$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *entonces*

$$\vec{w} = (x, y) \in W \Longrightarrow x + y = 0$$

Si calculamos $\lambda\vec{w}$

$$\lambda\vec{w} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

con

$$x_3 + y_3 = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda(0) = 0$$

y por tanto $\lambda\vec{w} \in W$.

Ejemplo 4.7 *Dado el* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^2$*, el conjunto* $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\right\}$ *no es un subespacio vectorial de* W*. Comprobemos que no se cumple alguna de las propiedades descritas en la definición.*

1. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ *entonces*

$$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W \Longrightarrow x_1 + y_1 = 1$$

$$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W \Longrightarrow x_2 + y_2 = 1$$

Si calculamos $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$$

con

$$x_3 + y_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

y por tanto $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \notin W$*, y deducimos que* W *no es subespacio vectorial de* V*.*

Ejemplo 4.8 *Dado el* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^2$*, el conjunto* $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}$ *no es un subespacio vectorial de* W*. Comprobemos que no se cumple alguna de las propiedades descritas en la definición.*

1. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ *entonces*

$$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W \Longrightarrow y_1 = x_1^2$$

$$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W \Longrightarrow y_2 = x_2^2$$

Si calculamos $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$$

con

$$x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = y_1 + y_2 + 2x_1x_2 = y_3 + 2x_1x_2$$

por tanto si $2x_1x_2 \neq 0$ *se cumplirá*

$$y_3 + 2x_1x_2 \neq y_3 = y_1 + y_2$$

y por tanto $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \notin W$*, y deducimos que* W *no es subespacio vectorial de* V*.*

Definición 4.3 *Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, asociados a V hay dos subespacios llamados* subespacios triviales *que son $W = V$, que se denomina* subespacio total, *y $W = \left\{\vec{0}\right\}$, que se denomina* subespacio nulo.

Proposición 4.4 *Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, $W \subseteq V$, entonces:*

$$W \text{ es un subespacio vectorial de } V \Rightarrow \vec{0} \in W$$

Demostración: La demostración es directa, puesto que si $\vec{w} \in W$, como W es un subespacio vectorial, entonces también $-\vec{w} \in W$ y por tanto $(\vec{w}) + (-\vec{w}) = \vec{0} \in W$.

La última de las propiedades es una condición necesaria para que un subconjunto de un espacio vectorial sea un subespacio vectorial, es decir, si $W \subset V$ y $\vec{0} \notin W$, entonces W no puede ser subespacio vectorial de V.

Por ejemplo, podemos observar el conjunto $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1\right\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, porque no cumple la condición necesaria ya que el vector nulo de $\mathbb{R}^2$ no está contenido en W ya que $\vec{0} = (0,0) \Rightarrow 0+0=0 \neq 1$.

4.3. Sistemas de vectores

Definición 4.4 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Un* sistema de vectores *es una colección finita de vectores de V*

$$S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

donde algún $\vec{v}_i$ puede ser igual a algún $\vec{v}_j$ con $i \neq j$, es decir, puede haber vectores repetidos, por eso no se denomina conjunto de vectores.

Definición 4.5 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, sea $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores. Una* combinación lineal *de dichos vectores es una expresión de la forma*

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$$

con $\alpha_k \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 4.9 *Sea $\vec{v}_1 = (0,1,2)$, $\vec{v}_2 = (3,0,1) \Longrightarrow \alpha\,(0,1,2) + \beta\,(3,0,1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha+\beta)$.*

Ejemplo 4.10 *Sea $S = \{(0,1,2);(3,0,1)\}$ un sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$, vamos a comprobar si el vector $\vec{v} = (-3,2,3)$ es combinación lineal de los vectores de S. Para ello trataremos de encontrar dos escalares α y β de forma que podamos expresar el vector $\vec{v}$ como*

$$\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Leftrightarrow (-3,2,3) = \alpha\,(0,1,2) + \beta\,(3,0,1) = (3\beta, \alpha, 2\alpha+\beta)$$

o de forma equivalente igualando coordenada a coordenada

$$\begin{aligned} 3\beta &= -3 \\ \alpha &= 2 \\ 2\alpha + 3 &= 3 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que $\alpha = 2$ y $\beta = -1$, y comprobamos que estos valores también cumplen la tercera ecuación, luego $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores de S.,

Ejemplo 4.11 *Sea $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores. Cualquier vector $\vec{v}_j$ de S se puede expresar como combinación lineal de sus elementos, simplemente hay que poner*

$$\vec{v}_j = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 1 \cdot \vec{v}_j + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_k$$

Ejemplo 4.12 *Sea $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores. El vector nulo $\vec{0} \in V$ es combinación lineal de los elementos de S, simplemente hay que poner*

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_k$$

Definición 4.6 *Dado $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores del $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Definimos el subespacio engendrado por S, y lo expresamos como* $\operatorname{span}(S)$, $\mathcal{L}(S)$ *o* $\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}\rangle$ *al conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden hacer son sus vectores, es decir,*

$$\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}\rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j \mid \alpha_j \in \mathbb{K} \right\} = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k \mid \alpha_j \in \mathbb{K}\}$$

Ejemplo 4.13 *Sea $\mathbb{R}^3$ y consideremos $S = \{(2,0,3)\,; (-1,1,0)\}$, entonces el subespacio engendrado por S sería*

$$\langle S\rangle = \langle\{(2,0,3)\,; (-1,1,0)\}\rangle = \{\alpha\,(2,0,3) + \beta\,(-1,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(2\alpha - \beta, \beta, 3\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 4.5 *Dado $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores del $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Se cumple:*

$$\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}\rangle \ \textit{es un subepacio vectorial de } V$$

Demostración: La demostración es trivial utilizando la definición de $\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}\rangle$ y la caracterización de subespacios vectoriales.

Definición 4.7 *Dado $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores del $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Diremos que S es un* sistema generador de $V \Longleftrightarrow$

$$\langle S\rangle = V$$

Ejemplo 4.14 *Vamos a comprobar si el sistema de vectores $S = \{(1,2)\,; (-1,1)\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Para ello hay que comprobar si cualquier vector $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\vec{u} \in \langle S\rangle$, es decir $\vec{u}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $(1,2)$ y $(-1,1)$:*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha\,(1,2) + \beta\,(-1,1) = (\alpha - \beta, 2\alpha + \beta)$$

es decir se debe cumplir el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \alpha - \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{array}\right\}$$

como la matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene como determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

y por tanto rango 2, el sistema siempre tiene solución con

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{x+y}{3} \\ \beta &= -\frac{2x+y}{3}\end{aligned}$$

y podemos decir que S es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.15 *Vamos a comprobar si el sistema de vectores $S = \{(1,3)\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Para ello, como en el ejemplo anterior, hay que comprobar si cualquier vector $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, se cumple $\vec{u} \in \langle S \rangle$, es decir $\vec{u}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $(1,3)$:*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha\,(1,3) = (\alpha, 3\alpha)$$

pero en este caso el vector $(1,1) \in \mathbb{R}^2$, pero está claro que no está $\langle S \rangle$. Notar en este caso que la matriz de coefientes es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

que tiene rango $1 < 2$.

Proposición 4.6 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y sea $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores y sea $W = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle$*

1. $$\vec{v}_k \in W$$

2. *El subespacio vectorial engendrado W permanece invariante si realizamos cualquiera de las operaciones elementales o de Gauss siguientes:*

   a) *Cambiar el orden de los vectores:*

   $$\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle$$

   b) *Multiplicar un vector por un escalar no nulo:*

   $$\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle$$

   c) *Añadir a un vector un múltiplo de otro:*

   $$\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle = \langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle$$

   d) *Eliminar o añadir un vector que es combinación lineal de los demás:*

   $$\langle \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \ldots, \vec{v}_k\} \rangle = \left\langle \left\{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_k, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j \right\} \right\rangle$$

Ejemplo 4.16 *Dado el sistema de vectores*

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,2,0,-1) \\ \vec{v}_2 = (0,-1,3,0) \\ \vec{v}_3 = (2,4,0,-2) \\ \vec{v}_4 = (2,3,3,-2) \\ \vec{v}_5 = (0,0,0,0) \\ \vec{v}_6 = (1,0,6,-1) \end{array} \right\}$$

Vamos a encontrar el mínimo número de vectores necesario para construir el subespacio vectorial

$$W = \langle S \rangle .$$

Como el vector nulo $\vec{v}_5$ se puede poner como combinación lineal de los demás vectores, podemos eliminarlo gracias a la propiedad 2.d de la proposición anterior. Además

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1$$

luego el sistema S engendra el mismo subespacio que el sistema

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,2,0,-1) \\ \vec{v}_2 = (0,-1,3,0) \\ \vec{v}_4 = (2,3,3,-2) \\ \vec{v}_6 = (1,0,6,-1) \end{array} \right\}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \vec{v}_4 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v}_6 &= \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \end{aligned}$$

y por tanto se puede generar el mismo subespacio vectorial utilizando el sistema

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,2,0,-1) \\ \vec{v}_2 = (0,-1,3,0) \end{array} \right\}$$

Estos vectores son linealmente independientes, puesto que si suponemos

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \Longrightarrow \alpha\,(1,2,0,-1) + \beta\,(0,-1,3,0) = \vec{0} \Longrightarrow (\alpha, 2\alpha-\beta, 3\beta, -\alpha) = \vec{0}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ 2\alpha - \beta &= 0 \\ 3\beta &= 0 \\ -\alpha &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = 0$. Luego

$$W = \langle S \rangle = \langle S_2 \rangle = \langle \{(1,2,0,-1)\,;(0,-1,3,0)\} \rangle$$

Ejemplo 4.17 *Dado el sistema de vectores de* $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,0) \\ \vec{v}_2 = (0,1) \\ \vec{v}_3 = (1,1) \end{array} \right\}$$

Entonces podemos comprobar como

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

luego el sistema S *engendra el mismo subespacio que el sistema*

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,0) \\ \vec{v}_2 = (0,1) \end{array} \right\}$$

4.4. Dependencia e independencia lineal

Definición 4.8 *Dado* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ *un sistema de vectores, diremos que es* libre *o que* los vectores que lo forman son linealmente independientes $\Longleftrightarrow$

$$\left(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}\right) \Longrightarrow \alpha_j = 0;\ \forall j$$

En caso contrario S *es* ligado *o se dice que* los vectores son linealmente dependientes. *En este caso se podría encontar un valores* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *con al menos un* $\alpha_k \neq 0$ *tal que*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Ejemplo 4.18 *Estudiaremos la dependencia lineal del siguiente sistema de vectores de* $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}_1 = (1,-1) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \\ \vec{v}_3 = (1,1) \end{array} \right\}$$

Para ello vamos a suponer que existe α_1, α_2 *y* α_3 *tal que*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1) + \alpha_2 (-1,1) + \alpha_3 (1,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0)$$

es decir

$$\left. \begin{array}{r} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Para encontrar una solución, sumamos ambas ecuaciones

$$2\alpha_3 = 0$$

lo que implica $\alpha_3 = 0$ *y por tanto las dos ecuaciones se transforman en*

$$\left. \begin{array}{r} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Las dos ecuaciones son equivalentes y tienen por solución

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Eso indica que podemos tomar cualquier terna de la forma $(\alpha, \alpha, 0)$*, por ejemplo, si tomamos* $\alpha = 1 \neq 0$*, obtenemos una combinación lineal*

$$1 \cdot (1, -1) + 1 \cdot (-1, 1) + 0 \cdot (1, 1) = (0, 0)$$

que nos da el vector nulo y no todos los escalares son nulos, lo que nos indica que el sistema el linealmente dependiente.

Ejemplo 4.19 *Estudiaremos la dependencia lineal del siguiente sistema de vectores de* $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 3, 4) \\ \vec{v}_2 = (1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

Para ello vamos a suponer que existe α_1*y* α_2 *tal que*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (0, 3, 4) + \alpha_2 (1, 2, 3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 4\alpha_1 + 3\alpha_2) = (0, 0, 0)$$

es decir

$$\left. \begin{array}{r} \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación obtenemos $\alpha_2 = 0$ *y al sustituir en las otras nos conduce a* $\alpha_1 = 0$*. Por tanto, cualquier combinación lineal de los vectores de* S *que conduzca al vector nulo, implica que los escalares utilizados tienen que ser nulos y el sistema* S *es libre.*

Proposición 4.7 *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial, se cumple*

1. *Un sistema escalonado es linealmente independiente* $\Longleftrightarrow$ *No tiene filas nulas.*
2. *Las transformaciones de Gauss conservan la dependencia o independencia lineal de un sistema.*
3. *Todo sistema que contenga al vector nulo* $\vec{0}$ *es linealmente dependiente.*
4. *Todo sistema que contenga un vector repetido es linealmente dependiente.*
5. *Un sistema formado por un sólo vector* $S = \{\vec{v}_1\}$ *es linelamente dependiente* $\Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$*.*
6. *Un sistema formado por dos vectores* $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ *es linealmente dependiente* $\Longleftrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$*.*
7. *Un sistema* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es linealmente dependiente* $\Longleftrightarrow \exists\ \vec{v}_k$ *que es una combinación lineal del resto.*
8. *Todo sistema que contenga un sistema linealmente dependiente es linealmente dependiente.*
9. *Todo sistema de vectores que esté incluido en un sistema de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.*
10. *Si un sistema es linealmente dependiente, entonces las combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores del sistema son únicas.*

En general para determinar si un sistema de vectores es linealmente independiente o no, usaremos las dos primeras propiedades de la lista. De modo que escalonamos, mediante operaciones elementales, la matriz formada por los vectores del sistema. El sistema será linealmente dependiente si el rango de la matriz es menor que el número de vectores.

Ejemplo 4.20 *Vamos a comprobar si el sistema de* $\mathbb{R}^5$ *definido como*

$$S = \{\vec{v}_1 = (1,2,3,4,5)\,; \vec{v}_2 = (0,2,3,4,5)\,; \vec{v}_3 = (-1,0,0,0,0)\,; \vec{v}_4 = (-3,0,0,4,1)\,; \vec{v}_5 = (0,0,0,8,2)\}$$

es o no linealmente independiente. Para ello colocamos los vectores, por columnas, en forma matricial, en el orden que creamos conveniente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

vemos inmediatamente que la segunda y tercera fila son proporcionales, por tanto el rango no puede ser 5 *y el sistema es linealmente dependiente.*

Ejemplo 4.21 *Vamos a comprobar si el sistema de* $\mathbb{R}^4$ *definido como*

$$S = \{\vec{v}_1 = (-1,0,1,1)\,; \vec{v}_2 = (1,0,3,2)\,; \vec{v}_3 = (2,1,-1,0)\}$$

es o no linealmente independiente. Para ello colocamos los vectores, por columnas, en forma matricial, en el orden que creamos conveniente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalamos la matriz correspondiente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3' = F_3 + F_1 \\ F_4' = F_4 + F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2'' = F_3' \\ F_3'' = F_2' \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_4''' = F_4'' - \frac{3}{4} F_2'' \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_4'''' = F_4''' - \frac{5}{4} F_3'' \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que la matriz formada por los vectores tiene rango 3 *que coincide con el número de vectores del sistema y por lo tanto es un sistema linealmente independiente.*

4.5. Base y dimensión de un espacio vectorial

Definición 4.9 *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*–éspacio vectorial y sea* S *un sistema de vectores,* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$*, entonces*

$$S \textit{ es una } \text{base} \textit{ de } V \Longleftrightarrow S \textit{ es libre y } \langle S \rangle = V$$

Ejemplo 4.22 *Por ejemplo, una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es la llamada base canónica, definida como*

$$C = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$$

siendo

$$\vec{e}_k = \left(0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, \ldots, 0\right)$$

puesto que cualquier vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se obtiene

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

y por tanto es un sistema generador, mientras que por otra parte si

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = (0, \ldots, 0) \Longleftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \Longleftrightarrow \alpha_k = 0$$

luego es un sistema libre, así que por definición es una base.

Ejemplo 4.23 *Vamos a comprobar que el sistema $S = \{(1,3)\,;(2,-3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Para ello hay que comprobar que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de esos dos vectores*

$$(x,y) = \alpha\,(1,3) + \beta\,(2,-3) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha - 3\beta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \alpha + 2\beta \\ y = 3\alpha - 2\beta \end{array} \right.$$

Tenemos un sistema lineal con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0$$

y por tanto el sistema será compatible determinado para cualquier (x,y) que puede expresarse, por tanto, como combinación lineal de los vectores de S. Obviamente también serán linealmente independientes puesto que para el vector $(0,0)$ la única solución es $\alpha = \beta = 0$.

Ejemplo 4.24 *En el espacio $\mathcal{P}_3\,[\mathbb{R}]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3, el sistema*

$$B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

es una base.

Teorema 4.8 (Teorema de la base) *Sea V un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial $\Rightarrow$ Existe $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, sistema de vectores que es base de V, además todas las bases tienen el mismo número de elementos; a dicho número se le llama dimensión, $\dim(V)$.*

La dimensión de un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial puede ser finita, como en el caso de $\mathbb{R}^n$ o infinita como en el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales

$$\mathbb{P}\,[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_o \mid a_k \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$$

Observación 4.1 *El subespacio nulo $0 = \left\{\vec{0}\right\}$ no tiene bases.*

Proposición 4.9 *Sea V un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial con* $\dim(V) = n$ *y sea* $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ *un sistema de vectores:*

1. *Si $\langle S \rangle = V \Longrightarrow \exists B$ base de V tal que $B \subseteq S$. Se cumple $n \leq k$.*
2. *Si S es libre $\Longrightarrow \exists B$ base de V tal que $S \subseteq B$. Se cumple $n \geq k$.*
3. *Si $k = n \Longrightarrow S$ es una base $\Longleftrightarrow \langle S \rangle = V \Longleftrightarrow S$ es libre.*

Proposición 4.10 *Sea V un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial con* $\dim(V) = n$ *y sea $W \leq V$ un subespacio vectorial suyo. Entonces*

$$\dim(U) \leq \dim(V)$$

De hecho

$$\dim(U) = \dim(V) \Leftrightarrow U = V.$$

Definición 4.10 *Sea V un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial y $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ un sistema de vectores, definimos el rango del sistema, $r(S)$ a la dimensión del subespacio engendrado por los vectores de S.*

En $\mathbb{R}^n$ es lo mismo que el rango de la matriz cuyas filas (o columnas) son esos vectores.

Proposición 4.11 *El rango de $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ se conserva si*

1. *Quitamos un vector que es combinación lineal del resto.*
2. *Usando operaciones elementales de Gauss.*
3. *S es linealmente independiente $\Longleftrightarrow r(S) = k$*
4. *S es un sistema generador $\Longleftrightarrow r(S) = \dim(V)$*

4.5.1. Coordenadas respecto a una base

Sea V un $\mathbb{K}$–éspacio vectorial con $\dim(V)$ y sea $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, una base, entonces para $\vec{v} \in V$, como $\langle B \rangle = V$, entonces deben existir escalares $x_k \in \mathbb{K}$ tal que

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{v}_k$$

Como B es libre, estos valores x_k son únicos. En efecto si suponemos que existen otros valores $y_k \in \mathbb{K}$ para los que se cumple

$$\vec{v} = y_1\vec{v}_1 + \cdots + y_n\vec{v}_n$$

entonces, restando ambas expresiones

$$\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) - (y_1\vec{v}_1 + \cdots + y_n\vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow (x_1 - y_1)\vec{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{v}_n = \vec{0}$$

pero como $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, entonces es un sistema libre y por tanto todos los coeficientes deben ser nulos

$$(x_k - y_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = y_k$$

Estos valores x_k son las *coordenadas* de $\vec{v}$ en la base B, es decir

$$\vec{v}_B = (x_1, \ldots, x_n)_B$$

Ejemplo 4.25 *Sea* $B = \{(1, -3)\,;(0, 1)\}$ *y sea* $\vec{v} = (2, 5)$*, vamos a encontrar las coordenadas de* $\vec{v}$ *en la base* B

$$(2, 5) = x\,(1, -3) + y\,(0, 1) = (x, y - 3x)$$

de forma que

$$\begin{aligned} 2 &= x \\ 5 &= y - 3x \end{aligned}$$

sistema que tiene por solución

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 5 + 3x = 5 + 6 = 11 \end{aligned}$$

por tanto

$$(2, 5) = (2, 11)_B$$

Ejemplo 4.26 *El vector nulo tiene coordenadas* $(0, \ldots, 0)$ *en cualquier base.*

Ejemplo 4.27 *Las coordenadas de* v_k *en la base* $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *son* $\left(0, \ldots, \underset{k}{1}, \ldots, 0\right)$

Ejemplo 4.28 *En* $\mathbb{R}^n$ *si* C_n *es la base canónica, entonces*

$$\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \vec{v}_C$$

Ejemplo 4.29 *Sea* $B = \{(4, 3)\,;(-5, 0)\}$ *y sea* $\vec{v}_B = (3, -2)$*, vamos a encontrar las coordenadas de* $\vec{v}$ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v}_B = (3, -2)_B = 3\,(4, 3) - 2\,(-5, 0) = (22, 9) = \vec{v}_C = \vec{v}$$

4.5.2. Cambio de base

Sean $B_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ dos base de V, un $\mathbb{K}$–espacio vectorial con $\dim(V) = n$. Dado cualquier vector $\vec{v} \in V$, podemos expresar $\vec{v}$ en cualquiera de las dos bases por tanto, tenemos una expresión en la base B

$$\vec{v}_{B_1} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

y por otra parte también tendrá una expresión en la base B_2

$$\vec{v}_{B_2} = y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_n\vec{u}_n$$

En este apartado pretendemos relacionar las expresiones $\vec{v}_{B_1}$ y $\vec{v}_{B_2}$, para ello definiremos la llamada *matriz de cambio de base.*

Puesto que $\vec{v}_k \in V$ y B_2 es una base de V, estos vectores tendrán unas coordenadas respecto de esta base, es decir,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{11}\vec{u}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 &= a_{12}\vec{u}_1 + \cdots + a_{n2}\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= a_{1n}\vec{u}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{u}_n \end{aligned}$$

Si ahora tomamos las expresiones de $\vec{v}_{B_1}$ y $\vec{v}_{B_2}$, tendremos

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{B_1} &= x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = x_1\left(a_{11}\vec{u}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{u}_n\right) + \cdots + x_n\left(a_{1n}\vec{u}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{u}_n\right) \\
&= \left(x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n}\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x_1a_{n1} + \cdots + x_na_{nn}\right)\vec{u}_n \\
&= y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_n\vec{u}_n
\end{aligned}$$

Como las coordenadas son únicas

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n} \\ \vdots \\ y_n = x_1a_{n1} + \cdots + x_na_{nn} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definimos a la matriz de coeficientes como $M_{B_1\to B_2}$

$$M_{B_1\to B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\vec{v}_{B_2} = M_{B_1\to B_2}\vec{v}_{B_1}$$

Definición 4.11 *Se llama* matriz de cambio de base de B_1 *a* B_2 *y se expresa como*

$$M_{B_1\to B_2}$$

a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores B_1 *en la base* B_2.

Proposición 4.12 *Sea V, un $\mathbb{K}$–espacio vectorial con* $\dim(V) = n$.

1. *Sean B_1 y B_2 dos base de V, entonces $M_{B_1\to B_2}$ es una matriz invertible y*

$$\left(M_{B_1\to B_2}\right)^{-1} = M_{B_2\to B_1}$$

2. *Sean B_1, B_2 y B_3 tres bases de V, entonces*

$$M_{B_1\to B_3} = M_{B_2\to B_3} \cdot M_{B_1\to B_2}$$

Proposición 4.13 *Supongamos* $V = \mathbb{R}^n$

1. *Si B es una base de $\mathbb{R}^n$ y C_n es la base canónica, entonces las columnas de $M_{B\to C}$ son los vectores de la base B.*

2. *Si B_1 y B_2 son bases de $\mathbb{R}^n$ y C_n es la base canónica, entonces podemos poner*

$$M_{B_1\to B_2} = M_{C_n\to B_2} \cdot M_{B_1\to C_n}$$

o teniendo en cuenta el apartado 1 *de la proposición anterior, podemos poner*

$$M_{B_1\to B_2} = \left(M_{B_2\to C_n}\right)^{-1} \cdot M_{B_1\to C_n}.$$

Ejemplo 4.30 *Sea* $V = \mathbb{R}^2$ *con*

$$B_1 = \{\vec{v}_1 = (1,2)\,;\vec{v}_2 = (2,-1)\}$$

$$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1,-3)\,;\vec{u}_2 = (0,-1)\}$$

Como B_2 *es una base de* $\mathbb{R}^2$*, los vectores de* B_1 *podrán expresarse como combinación lineal de los vectores de* B_2

$$\vec{v}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2$$

$$\vec{v}_2 = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2$$

es decir

$$\begin{array}{rcl} (1,2) & = & a_{11}\,(1,-3) + a_{21}\,(0,-1) = (a_{11}, -3a_{11} - a_{21}) \\ (2,-1) & = & a_{12}\,(1,-3) + a_{22}\,(0,-1) = (a_{11}, -3a_{11} - a_{21}) \end{array}$$

y en coordenadas. Para v_1

$$\left.\begin{array}{c} 1 = a_{11} \\ 2 = -3a_{11} - a_{21} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -5 \end{array}\right\}$$

mientras que para v_2

$$\left.\begin{array}{c} 2 = a_{11} \\ -1 = -3a_{11} - a_{21} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{22} = -5 \end{array}\right\}$$

por tanto la matriz de cambio de base es

$$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Si ahora tenemos un vector cualquiera espresado en la base B_1*, podemos encontrar su expresión en la base* B_2*, por ejemplo, si* $\vec{v}_B = (1,1)_B$*, podremos expresarlo en la base* B_2 *usando la matriz* $M_{B_1 \to B_2}$

$$\vec{v}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -5-5 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}_{B_2}$$

es decir

$$\vec{v}_{B_2} = (3,-10)$$

Podemos comprobar que son el mismo vector, utilizando su definición

$$\vec{v}_{B_1} = (1,1)_{B_1} = 1 \cdot (1,2) + 1 \cdot (2,-1) = (1,2) + (2,-1) = (3,1)$$

$$\vec{v}_{B_2} = (3,-10)_{B_2} = 3 \cdot (1,-3) + (-10) \cdot (0,-1) = (3,-9) + (0,10) = (3,1)$$

Ejemplo 4.31 *Consideremos en* $\mathbb{R}^3$ *la base canónica* C_3 *y la base* B *definida por*

$$B = \{(1,2,3)\,;(0,-1,3)\,;(0,0,-4)\}$$

entonces por la proposición anterior

$$M_{B \to C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.32 *Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *la base canónica* C_2 *y las bases* B_1 *y* B_2 *definidas por*

$$B_1 = \{(1,2)\,;(0,-1)\}$$

$$B_2 = \{(1,0)\,;(1,1)\}$$

entonces por la proposición anterior

$$M_{B_1\to B_2} = (M_{B_2\to C_2})^{-1}\cdot M_{B_1\to C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$M_{B_1\to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.6. Ecuaciones de los subespacios vectoriales

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y sea $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ una base de V. Sea $U\subseteq V$ un subespacio vectorial. Recordemos que U junto con las operaciones heredadas del espacio vectorial V, constituye en sí mismo un espacio vectorial y por tanto podemos asegurar que existe una base $B_U=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\}$.

Sea $\vec{v}\in V$ y supongamos que $\vec{v}\in U$ y eso implica que se puede poner como combinación lineal de los elementos de B_U

$$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_k\in K:\vec{v}=\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_k\vec{u}_k$$

como $\vec{v}\in V$

$$\vec{v}_B = x_1\vec{v}_1+\cdots+x_n\vec{v}_n$$

y como $\vec{u}_j\in V$, entonces

$$(\vec{u}_j)_B = a_{1j}\vec{v}_1+a_{2j}\vec{v}_2+\cdots+a_{nj}\vec{v}_n$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x_1\vec{v}_1+\cdots+x_n\vec{v}_n &= \alpha_1\left(a_{11}\vec{v}_1+a_{21}\vec{v}_2+\cdots+a_{n1}\vec{v}_n\right)+\cdots+\alpha_k\left(a_{1k}\vec{v}_1+a_{2k}\vec{v}_2+\cdots+a_{nk}\vec{v}_n\right) \\ &= \left(\alpha_1a_{11}+\cdots+\alpha_ka_{1k}\right)\vec{v}_1+\cdots+\left(\alpha_1a_{n1}+\cdots+\alpha_ka_{nk}\right)\vec{v}_n \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\left.\begin{array}{c} x_1=\alpha_1a_{11}+\cdots+\alpha_ka_{1k} \\ \vdots \\ x_n=\alpha_1a_{n1}+\cdots+\alpha_ka_{nk} \end{array}\right\}$$

o en forma de vectores

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_k\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

que son las llamadas *ecuaciones paramétricas* de U.

Eliminando los parámetros $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ obtendremos ecuaciones en $x_1,\dots,x_n$ que son las llamadas *ecuaciones implícitas* de U.

Ejemplo 4.33 *Sea $V = R^3$, y consideremos C_3 la base canónica. Sea $U = \langle\{(1,0,3)\,;(-1,2,-2)\}\rangle$. Las ecuaciones paramétricas serían*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ 2\beta \\ 3\alpha-2\beta \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{rr} x = \alpha-\beta & \textit{(1)} \\ y = 2\beta & \textit{(2)} \\ z = 3\alpha-2\beta & \textit{(3)} \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones implícitas se obtienen operando sobre las ecuaciones paramétricas. De (2) obtenemos

$$\beta = \frac{y}{2}$$

y sustituyendo en (1) y (3)

$$\left.\begin{array}{rr} x = \alpha - \frac{y}{2} & \textit{(4)} \\ \\ z = 3\alpha - 2\frac{y}{2} = 3\alpha - y & \textit{(5)} \end{array}\right\}$$

Despejamos α de la ecuación (4)

$$\alpha = x + \frac{y}{2}$$

y sustituimos en (5)

$$z = 3\left(x + \frac{y}{2}\right) - y = 3x + 3\frac{y}{2} - y = 3x + \frac{1}{2}y$$

multiplicamos por 2

$$2z = 6x + y$$

o de forma equivalente

$$6x + y - 2z = 0$$

que es la ecuación implícita de U.

Ejemplo 4.34 *Sea $V = R^3$, y consideremos C_3 la base canónica. Sea $U = \langle\{(-2,4,1)\}\rangle$. Las ecuaciones paramétricas serían*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{rr} x = -2\alpha & \textit{(1)} \\ y = 4\alpha & \textit{(2)} \\ z = \alpha & \textit{(3)} \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones implícitas se obtienen operando sobre las ecuaciones paramétricas. Despejamos α de todas las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = -\frac{x}{2} \\ \alpha = \frac{y}{4} \\ \alpha = z \end{array}\right\}$$

De donde se deduce

$$\left.\begin{array}{rr} z = -\frac{x}{2} & \textit{(4)} \\ \\ z = \frac{y}{4} & \textit{(5)} \end{array}\right\}$$

que nos da dos ecuaciones implícitas para U

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2} + z = 0 \\ \\ \frac{y}{4} - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2z = 0 \\ \\ y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

4.7. Suma e intersección de subespacios

Sea V un K–espacio vectorial y sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Definimos la suma de subespacios como

$$U + W = \{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U; \vec{w} \in W\}$$

mientras que la intersección

$$U \cap W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in U; \vec{v} \in W\}$$

Teorema 4.14 *Sea V un K–espacio vectorial y sean U y W dos subespacios vectoriales de V*

1. *La suma $U + W$ y la intersección $U \cap W$ son subespacios vectoriales de V.*
2. *Las ecuaciones implícitas de U y las ecuaciones implícitas de W constituyen unas ecuaciones implícitas de $U \cap W$.*
3. *El sistema de vectores formado por una base de U y una base de W es un sistema generador de $U + W$.*
4. *Se cumple la ecuación de dimensiones*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

En el caso de que $U \cap W = \varnothing$,la suma se dice directa *y se expresa como*

$$U + W = U \oplus W.$$

Ejemplo 4.35 *Sea $V = \mathbb{R}^3$ y consideremos dos subespacios vectoriales de V, $U = \langle(1, 2, -1); (3, 1, 2)\rangle$ y $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\right\}$. Vamos a calcular $U + W$ y $U \cap W$. Vamos a construir las ecuaciones implícitas de U. Primero calculamos las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha + 2\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = \alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = -\alpha + 2\beta \end{array}\right\}$$

y conseguimos la implícita mediante escalonamiento

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & x \\ 0 & -5 & y - 2x \\ 0 & 5 & x + z \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & x \\ 0 & -5 & y - 2x \\ 0 & 0 & -x + y + z \end{array}\right)$$

si usamos la última ecuación, tendremos la ecuación implícita de U

$$-x + y + z = 0$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap W$ se obtienen usando las ecuaciones de U y W

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$2x + 2z = 0 \Rightarrow z = -x$$

y si restamos ambas ecuaciones

$$4x - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Si definimos $x = \alpha$, *entonces*

$$(\alpha, 2\alpha, -\alpha) = \alpha\,(1, 2, -1)$$

luego

$$U \cap W = \langle\{(1, 2, -1)\}\rangle$$

y usando la ecuación de dimensiones

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

luego

$$U + W = \mathbb{R}^3$$