Capítulo 3

Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

3.1. Matrices

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ será un cuerpo, que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sus elementos son los *escalares.*.

Definición 3.1 *Se llama matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ a una aplicación del tipo*

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{K},$$

de forma que a cada pareja de números naturales (i, j) con $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se le asocia un elemento del cuerpo, esto es, la imagen del par (i, j) mediante la aplicación A es un elemento de $\mathbb{K}$, por simplicidad, denominaremos a esta imagen a_{ij}.

Mediante la notación usual para aplicaciones diremos que $A(i, j) = a_{ij}$ y se dice que a_{ij} es el elemento (i, j) de la matriz A Representaremos a dicha matriz como

$$A = (a_{ij}).$$

La forma usual de representar matrices es ordenando las imágenes en filas y columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y diremos que la matriz A tiene m filas y n columnas o que es de dimensió $m \times n$.

La fila *i está formada por las imágenes de los elementos $A(i, k)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ y se expresa como A^i.*

La columna *j está formada por las imágenes de los elementos $A(k, j)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ y se expresa como A_j.*

Los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$, se denominan escalares.

Definición 3.2 *Definimos $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ como el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$.*

Si $m = 1 \Rightarrow A \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$, se dice que A es una matriz fila.

Si $n = 1 \Rightarrow A \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, se dice que A es una matriz columna.

Si $m = n \Rightarrow A \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, *se dice que* A *es una matriz* Cuadrada. *En este caso el conjunto de las matrices cuadradas se expresará como*

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}).$$

Ejemplo 3.1 *Son ejemplos de matrices las siguientes, se indica en cada caso la dimensión y el cuerpo donde están definidas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2+3i & 3-i \\ 4+3i & -4-i \\ 2-2i & -2+3i \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$$

Definición 3.3 *Dada* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, *definimos los siguientes conceptos:*

- Diagonal principal: *Son los elementos de la forma* a_{ii} *con* $i \in \{1, \ldots, \text{mín}\{m,n\}\}$.

  En el caso de una matriz cuadrada, donde $m = n$, *la diagonal principal está definida por*

  $$\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}.$$

- Traza de una matriz: *Es por definición la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,*

  $$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{\text{mín}\{m,n\}} a_{ii}$$

  y para una matriz cuadrada

  $$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii.}$$

Definición 3.4 *La* Matriz identidad *está definida como*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede definir como

$$I_n = (\delta_{ij})$$

usando la llamada función delta de Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Con esta caracterización es posible definir la matriz identidad para cualquier dimensión, por ejemplo

$$I_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$I_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad es un ejemplo de las llamadas matrices diagonales que definimos a continuación.

Definición 3.5 *Una matriz es* diagonal *si cumple*

$$a_{ij} = 0;\ \forall i \neq j$$

Es decir los elementos de la matriz que no están en la diagonal principal son 0*, a veces se suele expresar como,*

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

Definición 3.6 *La matriz* nula *es la que tiene todos sus valores iguales al elemento neutro del cuerpo* $\mathbb{K}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3.7 *Una matriz* triangular superior T *es aquella que cumple*

$$T = (t_{ij}) \Rightarrow t_{ij} = 0;\ \forall i > j$$

es decir, tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 3.8 *Una matriz* triangular inferior T *es aquella que cumple*

$$T = (t_{ij}) \Rightarrow t_{ij} = 0;\ \forall i < j$$

es decir, tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.2 *Calcularemos la traza de cada una de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2+3i & 3-i \\ 4+3i & -4-i \\ 2-2i & -2+3i \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i & 4 \\ -1 & 1+i & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

Se indica en cada caso la diagonal principal

$$(1, -1, 4) \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) = 1 + (-1) + 4 = 4$$

$$(2+3i, -4-i) \Rightarrow \mathrm{Tr}(B) = (2+3i) + (-4-i) = -2+2i$$

$$(1, 1+i, 4) \Rightarrow \mathrm{Tr}(C) = 1 + (1+i) + 4 = 6+i$$

Definición 3.9 *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos su* opuesta *que representamos por $-A = (b_{ij})$ a una matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuyos elementos están definidos como*

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

Es decir, los elementos de $-A$, se obtienen cambiando el signo a todos los elementos de A.

Ejemplo 3.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix} \Longrightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -2 & -3-i \end{pmatrix}$$

Definición 3.10 *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos su* transpuesta *que representamos por $A^T = (b_{ij})$ a una matriz de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ cuyos elementos son están definidos como*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Se intercambian filas y columnas: las filas de $A^\intercal$ son las columnas de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

notar que

$$\mathrm{diag}(A) = \mathrm{diag}\left(A^T\right)$$

Definición 3.11 *Una matriz se dice* simétrica $\Longleftrightarrow$ *$A^T = A$, es decir, la matriz coincide con su transpuesta.*

Ejemplo 3.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 3+i \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definición 3.12 *Una matriz A se dice* antisimétrica $\Longleftrightarrow$ *$A^\intercal = -A$, es decir, la opuesta de la matriz coincide con su transpuesta.*

Ejemplo 3.6 *La matriz A definida por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

es simétrica, mientras que B definida por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

es antisimétrica.

Definición 3.13 *Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, una submatriz es una aplicación*

$$B : \{m_1, m_2, \ldots, m_p\} \times \{n_1, n_2, \ldots, n_q\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde

$$\begin{aligned} \{m_1, m_2, \ldots, m_p\} &\subseteq \{1, 2, \ldots, m\} \\ \{n_1, n_2, \ldots, n_q\} &\subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

y con

$$B(m_i, n_j) = a_{m_i n_j}$$

De donde se deduce que una submatriz B de una matriz A, es una matriz que se obtiene al obtener los elementos de p filas de A y q columnas de A.

Ejemplo 3.7 *Sea la matriz $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 6 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & 5 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

que como recordamos, es una aplicación de la forma

$$A : \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definimos una submatriz A_1 como la aplicación

$$A_1 : \{1, 3, 4\} \times \{1, 3\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

en este caso

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

3.2. Operaciones con matrices

Definición 3.14 *Sea* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*, definimos su* suma, $C = A + B = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*, como la matriz cuyos elementos* c_{ij} *están definidos como*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Notar que todas las matrices tienen las mismas dimensiones.

Ejemplo 3.8 *Vamos a calcular* $A + B$*, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Sumando elemento a elemento

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.1 $(M_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ *es un grupo abeliano.*

Proposición 3.2 (Propiedades de la suma de con matrices) *La suma de matrices tiene las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa:* $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Longrightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$.
2. *Conmutativa:* $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Longrightarrow A + B = B + A$.
3. *Elemento neutro: Es la matriz nula* $O = (c_{ij})$ *con* $c_{ij} = 0; \forall i, j$.
4. *Elemento opuesto:* $\forall A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Longrightarrow -A = (-a_{ij})$ *es su opuesta.*

Definición 3.15 (Producto por un escalar) *Sean* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$*, definimos el producto* αA *como la matriz*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ejemplo 3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \alpha = 3 \Longrightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.3 (Propiedades del producto de matrices y escalares) *: El producto de matrices por un escalar tiene las siguientes propiedades*

1. *Pseudodistributiva:*

$$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}); \forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B)$$

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}); \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

2. *Pseudoasociativa:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}); \forall \lambda, \mu \Longrightarrow (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
3. *Pseudoelemento neutro:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \Longrightarrow 1 \cdot A = A$

Definición 3.16 (Producto de Matrices) *Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}); B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, definimos el producto $A \cdot B = C \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$ como la matriz*

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right)$$

Ejemplo 3.10 *Calcularemos el producto de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

La fila (i, j) se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 3 \cdot 0 & 9 \\ 2 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.11 *Dadas las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Calculamos los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Con este ejemplo se comprueba que el producto de matrices no es conmutativo.

Proposición 3.4 (Propiedades del producto de matrices) *El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}); C \in M_{p\times q}(\mathbb{K}) \Longrightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. *Producto por escalares:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}); \alpha \in \mathbb{K} \Longrightarrow \alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$.
3. *Distributivas:* $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), C \in M_{n\times p}(\mathbb{K}), D \in M_{q\times m}(\mathbb{K})$;

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$D \cdot (A + B) = D \cdot A + D \cdot B$$

4. *Elemento nulo:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$;

$$0_{p\times m} \cdot A_{m\times n} = 0_{p\times n}$$

$$A_{m\times n} \cdot 0_{n\times q} = 0_{m\times q}$$

5. *Elemento neutro:* $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$;

$$I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

$$A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A_{m\times n}$$

Definición 3.17 (Producto escalar de Matrices) *Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos el producto escalar de dos matrices como*

$$A : B = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Se puede demostrar que

$$A : B = \mathrm{Tr}\left(A^T.B\right)$$

Teorema 3.5 *El conjunto $(M_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ de las matrices cuadradas de dimensión n es un anillo no conmutativo.*

3.3. Rango. Matrices inversas

Definición 3.18 (Matrices escalonadas) *Una matriz A se dice* escalonada *si cada fila tiene más ceros de izquierda a derecha que la fila anterior.*

Ejemplo 3.12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 3.1 (Método de escalonamiento de Gauss) *Consiste en hacer tres tipos diferentes de operaciones, llamadas* operaciones elementales*, sobre las filas de una matriz para conseguir transformarla en una matriz escalonada. Suponiendo que F_i representa la fila i–ésima de A, estas operaciones son:*

1. *Cambiar el orden de 2 filas $F_i \longleftrightarrow F_j$.*

2. *Multiplicar una fila por una escalar no nulo $\alpha \in \mathbb{K}$; $\alpha \neq 0$: $F_i \longleftrightarrow \alpha F_j$.*

3. *Sumar a una fila, otra fila multiplicada por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$: $F_i \longleftrightarrow F_i + \alpha F_j$.*

Ejemplo 3.13 *Vamos a escalonar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indican en cada paso las operaciones elementales empleadas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1' = F_2 \\ F_2' = F_1 \\ F_3' = F_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1'' = F_1' \\ F_2' = F_2' - 2F_1' \\ F_3' = F_3' + F_1' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_3'' + F_2'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.14 *Vamos a escalonar la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 14 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Se indican en cada paso las operaciones elementales empleadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 14 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 3F_1 \\ F_3' = F_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F'' = F_1' \\ F_2'' = F_3' \\ F_3'' = F_2' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3.19 (Rango) *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama* rango *de A y expresamos por $r(A)$, al número de filas no nulas que resultan después de escalonar la matriz.*

Ejemplo 3.15 *Vamos a calcular el rango de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para ello usamos operaciones elementales para obtener la matriz escalonada correspondiente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1' = F_2 \\ F_2' = F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' - 2F_1' \\ F_3'' = F_3' - F_1' \\ F_4'' = F_4' - 2F_1' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_4'' \\ F_4''' = F_3'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1^{iv} = F_1''' \\ F_2^{iv} = F_2''' \\ F_3^{iv} = F_3 + F_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay tres filas no nulas, luego $r(A) = 3$.

Ejemplo 3.16 *Hallar el rango de la matriz* A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & - & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1' \longleftrightarrow F_1 \\ F_2' \longleftrightarrow F_2 + F_1 \\ F_3' \longleftrightarrow F_3 + F_1 \\ F_4' \longleftrightarrow F_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1'' \longleftrightarrow F_1' \\ F_2'' \longleftrightarrow F_3' \\ F_3'' \longleftrightarrow F_2' \\ F_4'' \longleftrightarrow F_4' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1''' \longleftrightarrow F_1'' \\ F_2''' \longleftrightarrow F_2'' \\ F_3''' \longleftrightarrow F_3'' - 3F_2' \\ F_4'' \longleftrightarrow F_4'' - F_2'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1^{iv} \longleftrightarrow F_1''' \\ F_2^{iv} \longleftrightarrow F_2''' \\ F_3^{iv} \longleftrightarrow \frac{1}{12} F_3''' \\ F_4^{iv} \longleftrightarrow \frac{1}{2} F_4''' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1^{v} \longleftrightarrow F_1^{iv} \\ F_2^{v} \longleftrightarrow F_2^{iv} \\ F_3^{v} \longleftrightarrow F_3^{iv} \\ F_4^{v} \longleftrightarrow F_4^{iv} - F_3^{iv} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por tanto, podemos decir que

$$r\,(A) = 4$$

Definición 3.20 (Inversa de una matriz) *La matriz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *se dice* invertible, inversible *o que tiene inversa* $\Longleftrightarrow$

$$\exists^{\circ} B \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n$$

La matriz B*, que es única, y es la llamada* matriz inversa *de* A *y la representamos como* A^{-1}.

Proposición 3.6 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *es invertible* $\Longleftrightarrow r(A) = n$

Observación 3.2 (Método para el cálculo de la inversa) *Consiste en escribir*

$$(A \mid I_{n\times n})$$

y hacer operaciones elementales hasta obtener la matriz identidad a la izquierda, entonces a la derecha se obtendrá A^{-1} *, es decir*

$$(A \mid I_{n\times n}) \Longrightarrow (I_{n\times n} \mid A)\,.$$

Para ello realizamos los siguientes pasos:

1. *Hacemos* 0 *debajo de la diagonal principal de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.*
2. *Convertimos los elementos de la diagonal principal en valores unitarios* (1)*.*
3. *Hacemos* 0*, por encima de la diagonal principal, de derecha a izquierda y de abajo a arriba.*

Ejemplo 3.17 *Vamos a calcular la inversa de la matriz* A *definida por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Para ello construímos la matriz extendida, incluyendo la matriz identidad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_2' \\ F_3'' = F_3' + 2F_2' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = -F_2'' \\ F_3''' = -F_3'' \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1^{iv} = F_1''' - F_3''' \\ F_2^{iv} = F_2''' - 2F_3''' \\ F_3^{iv} = F_3''' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

De este modo

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -6 & 2 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

3.4. Determinantes

Definición 3.21 *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, si $n \in \{1,2,3\}$, se llama* determinante *de A, y expresamos como $|A| = \det(A)$ al escalar definido como*

1. *Para $n = 1$*
$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11},$$
es decir, es el único valor que tiene la matriz.

2. *Si $n = 2$*
$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. *Si $n = 3$*
$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

¿Qué ocurre para $n \geq 4$? Para estos valores vamos a dar una definición recursiva del valor del determinante y para ello necesitamos dar una serie de definiciones.

Definición 3.22 *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, se llama* menor de A, *al determinante de cualquier submatriz cuadrada de A.*

Definición 3.23 *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, se llama* menor complementario del elemento a_{ij} *de la matriz A, al determinante de la submatriz que se obtiene quitando la fila i y la columna j de A.*

Definición 3.24 *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, se llama* adjunto del elemento a_{ij} *de la matriz A, y lo expresamos como A_{ij}, al menor complementario de a_{ij} multiplicado por el valor $(-1)^{i+j}$.*

Ejemplo 3.18 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{31} y a_{21}. Calculamos en primer lugar el menor complementario de a_{31}, para ello tenemos que eliminar la fila 3 y la columna 1 de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculamos el determinante de la matriz resultante utilizando la definición dada para el caso $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - (5) \cdot (-3) = 15$$

mientras que el adjunto sería

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot 15 = 15$$

Para el elemento a_{21}, repetimos el mismo proceso, en este caso tenemos que eliminar la fila 2 y la columna 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

por tanto el menor será

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -9$$

y el adjunto

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^3 (-9) = 9$$

Definición 3.25 (Definición recursiva de determinantes) *Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

para cualquier fila i o también

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

para cualquier columna k.

Es decir, se fija la fila o columna y se utilizan los adjuntos de los elementos de esa fila o columna.

Podemos comprobar como esta definición es coeherente con los valores indicados para los casos $n = 2$ y $n = 3$. Tomamos para ello una matriz 3×3 de forma general

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular su determinante mediante este método, vamos a elegir, por ejemplo, la primera fila, entonces, por la definición que hemos dado

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{4} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

y usando la definición de determinante para una matriz 2×2

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}
$$

y reagrupando términos obtenemos el mismo valor que el dado en la definición de determinante.

Ejemplo 3.19 *En la siguiente matriz elegimos la segunda columna puesto que como tenemos que multiplicar por el elemento correspondiente anulará el correspondiente sumando*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & \boxed{0} & -4 \\ -2 & \boxed{0} & 1 \\ -5 & \boxed{-2} & -4 \end{vmatrix} &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -2(3 \cdot 1 - (-4)(-2)) = -2 \cdot (3 - 8) = -10.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.7 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y sean* $F_1, \ldots, F_n$ *sus filas, el determinante de* A *cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si* $F_j = F_j' + F_j'' \Longrightarrow \det(F_1, \ldots, F_j, \ldots F_n) = \det\left(F_1, \ldots, F_j', \ldots F_n\right) + \det\left(F_1, \ldots, F_j'', \ldots F_n\right)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \Longrightarrow \det(F_1, \ldots, \alpha F_j, \ldots F_n) = \alpha \det(F_1, \ldots, F_j, \ldots F_n)$.
3. $\det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_j, \ldots F_n) = -\det(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_i, \ldots F_n)$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \Longrightarrow \det(F_1, \ldots, F_i + \alpha F_j, \ldots F_n) = \det(F_1, \ldots, F_i, \ldots F_n)$ *con* $i \neq j$.
5. A *es invertible* $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$ *y en este caso* $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$
6. *Si* A *es triangular superior o inferior* $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
7. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$
8. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Las propiedades 1 *al* 4 *correspondientes a operaciones en filas, también se cumplen para columnas.*

3.4.1. Cálculo de la inversa y el rango usando determinantes.

Proposición 3.8 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces:*

1. *El rango de A es el orden del mayor menor no nulo.*
2. *A es invertible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$ y en este caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{Adj} A)^T$$

siendo $\operatorname{Adj} A$, *la* matriz adjunta *formada por los adjuntos de cada elemento, es decir,*

$$\operatorname{Adj} A = (b_{ij}) = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Ejemplo 3.20 *Calcula el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

primero vamos a simplificar los cálculos, escalonando la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1' = F_1 \\ F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 \\ F_4' = F_4 - F_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1'' = F_1' \\ F_2'' = F_4' \\ F_3''' = F_3'' \\ F_4'' = F_2' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1''' = F_1'' \\ F_2''' = F_2'' \\ F_3''' = F_3'' - 2F_2'' \\ F_4''' = F_4'' + 3F_2'' \end{array} \right\} \Leftrightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1^{iv} = F_1''' \\ F_2^{iv} = F_2''' \\ F_3^{iv} = F_2''' \\ F_4^{iv} = F_4''' + F_3''' \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

que es una matriz triangular inferior

$$\det(A) = -(1) \cdot (1) \cdot (2) \cdot (-3) = 6$$

Si lo hacemos por adjuntos, en este caso elegimos la primera columna

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -54 - 2(-16) - (-28) = 6.$$

3.5. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.26 *En forma matricial, un* sistema de ecuaciones lineal *es de la forma*

$$Ax = b$$

donde A es una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamada matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna llamado vector de incógnitas

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y $b \in \mathbb{R}^m$ es un vector columna, llamada término independiente

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

En forma de ecuaciones, un sistema sería

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineal como el anterior consiste en encontrar los valores del cuerpo $\mathbb{K}$ por los que podemos sustituir las incógnitas de forma que las ecuaciones se transformen en identidades.

Definición 3.27 *Dado el sistema*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Diremos que el sistema es compatible determinado (SCD) $\Longleftrightarrow$ *El sistema tiene una única solución.*

Diremos que el sistema se dice compatible indeterminado (SCI) $\Longleftrightarrow$ *El sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones dependen de parámetros.*

El sistema se dice que incompatible (SI) $\Longleftrightarrow$ *El sistema no tiene solución.*

El sistema se dice que es homogéneo $\Longleftrightarrow b = 0 \Longleftrightarrow b_i = 0$*;* $\forall i = 1, \ldots, m$.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Notar que un sistema homogéneo siempre tiene como solución el vector nulo.

Dos sistemas son equivalente *si y solo si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Proposición 3.9 *Consideremos el sistema $Ax = b$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces*

- *Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de multiplicar dicha ecuación por un escalar de $\mathbb{K}$ no nulo, el sistema obtenido es equivalente al primero.*
- *Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de sumar a esta ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar, el sistema obtenido es equivalente al primero.*

Teorema 3.10 (Rouché-Frobenius) *Consideremos el sistema $Ax = b$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $x \in \mathbb{K}^n$ y $b \in \mathbb{K}^m$ y sea $(A \mid b)$ la* matriz ampliada *que se obtiene añadiendo el vector columna b como nueva columna de la matriz A. Entonces:*

1. *El sistema es SCD $\Longleftrightarrow r(A) = r(A \mid b) = n$.*
2. *El sistema es SCI $\Longleftrightarrow r(A) = r(A \mid b) < n$, en este caso el número de parámetros es $n - r(A)$.*
3. *El sistema es incompatible $\Longleftrightarrow r(A) \neq r(A \mid b)$.*

3.5.1. Métodos de Resolución

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en escribir la matriz ampliada $(A \mid b)$ y hacer operaciones elementales hasta conseguir un sistema escalonado equivalente al anterior, que se resuelve fácilmente.

Ejemplo 3.21 *Dado el sistema*

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 5x - 3y + 10z = 2 \\ 2y - 5z = 3 \end{array}\right\}$$

Tomamos la matriz ampliada

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Procedemos a realizar su escalonamiento por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{F_2' = F_2 - 5F_1\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{F_3'' = F_3' - F_2'\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

De la última ecuación obtenemos una contradicción ya que $0 \cdot z = 6$, implicaría que $0 = 6$. El sistema es incompatible y no tiene solución.

Método de Cramer

Consideremos el sistema $Ax = b$ de orden n, es decir, $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces

- Si $r(A) = n$, el sistema es compatible determinado y cada solución viene dada por la siguiente expresión

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

  donde M_i es la matriz obtenida a partir de la matriz A cambiando la columna i–ésima por el término independiente.

- Si $r(A) = k < n$, entonces elegimos un menor no nulo de orden k cualquiera. Las incógnitas que no forman parte de este menor pasan al término independiente y se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 3.22 *Resuelve por Cramer el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ -x - y - 3z = -2 \end{array}\right\}$$

En este caso tendremos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

y el término independiente

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (3 - 2 + 3) - (-1 - 2 - 9) = 4 + 12 = 16$$

El determinante es no nulo y por tanto tiene rango máximo 3*, los valores para las variables serían*

$$x = \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{16} = 1$$

$$y = \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{16} = 1$$

$$z = \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{16} = 0$$

La solución es por tanto $(1, 1, 0)$.

Resuelve por Cramer el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - z = -1 \\ -2x + y + z = -5 \\ 4x - y - 3z = 3 \end{array}\right\}$$

En este caso tendremos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

y el término independiente

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-3 + 0 - 2) - (-4 - 1) = -5 + 5 = 0.$$

Luego el sistema no será compatible determinado. Si ahora tomamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Para comprobar que tiene rango dos, tomamos un menor de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

y sólo tendremos que comprobar si el menor de orden 3 que se forman con la columna de términos independientes tiene determinante nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 0 - 2) - (-4 + 5 + 0) = 1 - (1) = 0$$

y por tanto

$$r\left(A \mid b\right) = r\left(b\right) = 2 < 3$$

y el sistema será compatible indeterminado. Como $r\left(A\right) = r\left(A \mid b\right) = 2$, entonces la solución dependerá de un parámetro. Tomamos el menor no nulo anterior y el sistema será equivalente a

$$\left.\begin{array}{r} x - z = -1 \\ -2x + y + z = -5 \\ 4x - y - 3z = 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} x - z = -1 \\ -2x + y + z = -5 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = z - 1 \\ -2x + y = -\left(z+5\right) \end{array}\right\}$$

Y utilizaremos Cramer para resolverlo

$$x = \frac{\det\left(M_1\right)}{\det\left(A\right)} = \frac{\begin{vmatrix} (z-1) & 0 \\ -\left(z+5\right) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(z-1) - 0}{1} = z - 1$$

$$y = \frac{\det\left(M_1\right)}{\det\left(A\right)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (z-1) \\ -2 & -\left(z+5\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(z+5\right) + 2\left(z-1\right)}{1} = z - 7$$

tomando $z = \lambda$, la solución del sistema será

$$\left(\lambda - 1, \lambda - 7, \lambda\right)$$