Hoja 5 - Integración Numérica.

1.— Tenemos que calcular en cada punto, el número total de automóviles, es decir, la suma (Integral) en las 24 horas

Punto A: $I_A = \int_0^{24} f(x)\,dx$

Punto B: $I_B = \int_0^{24} g(x)\,dx$.

De f(x) y g(x) sólo conocemos los valores en instantes (nodos) de tiempo determinado, además éstos no están igualmente espaciados por lo que en este caso podemos usar la regla del ~~punto~~ trapecio. La integral en cada caso será

$$I_A = \sum_{k=0}^{11} \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \cdot \left(f(x_k) + f(x_{k+1}) \right) =$$

$$\left(\frac{2-0}{2}\right)\cdot\left(3+3\right) + \left(\frac{3-2}{2}\right)(5+3) + \left(\frac{6-3}{2}\right)(4+5) + \left(\frac{9-6}{2}\right)(5+4) +$$

$$\left(\frac{11-9}{2}\right)(6+5) + \left(\frac{14-11}{2}\right)(2+6) + \left(\frac{17-14}{2}\right)\cdot(1+2) + \left(\frac{18-17}{2}\right)(1+1) + \left(\frac{19-18}{2}\right)(3+1)$$

$$+ \left(\frac{20-19}{2}\right)(4+3) + \left(\frac{24-20}{2}\right)(6+4) =$$

$$I_A = 6 + 4 + \frac{27}{2} + \frac{27}{2} + 11 + 12 + \frac{9}{2} + 1 + 2 + \frac{7}{2} + 20$$

$$\boxed{I_A = 91}$$

Repetimos el proceso con I_B. : Notar que los intervalos temporales son los mismos

$$I_B = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) \cdot \left(g(x_k) + g(x_{k+1})\right)$$

$$1 \cdot (3+3) + \frac{1}{2}(5+3) + \frac{3}{2} \cdot (5+2) + \frac{3}{2}(2+1) + 1 \cdot (1+4) + \frac{3}{2}(4+3) +$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot (3+4) + \frac{1}{2}(4+6) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (6+1) + \frac{1}{2}(1+3) + 2 \cdot (3+6) =$$

$$I_B = 6 + 4 + \frac{21}{2} + \frac{9}{2} + 5 + \frac{21}{2} + \frac{21}{2} + 5 + \frac{7}{2} + 2 + 18 = 79.5.$$

$$\boxed{I_B = 79.5}$$

Obviamente deberíamos considerar $I_B \approx 80$.

2.- Los puntos son equidistantes con

$$\boxed{x_{k+1}-x_k=0.2=h}$$

Podemos usar la regla del trapecio o, como el número de nodos es impar, la regla de Simpson 1/3.

Regla trapecio Múltiple: $I=\frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$

$$I=\frac{0.2}{2}\cdot\left[f(1.8)+f(2.6)+2\cdot\left(f(2.0)+f(2.2)+f(2.4)\right)\right]$$

$$=\frac{0.2}{2}\cdot\left[3.12014+10.46675+2\cdot\left(4.42569+6.04241+8.03041\right)\right]$$

$$=\frac{0.2}{2}\cdot\left[50.584\right]=5.0584.$$

Regla de Simpson 1/3 Múltiple: $I=\frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+4\left(f(x_1)+f(x_3)\right)+2f(x_2)+f(x_4)\right]$

$$I=\frac{0.2}{3}\cdot\left[3.12014+4\left(4.42569+8.03041\right)+2\cdot6.04241+10.46675\right]$$

$$=\frac{0.2}{3}\cdot75.496=5.0331.$$

3.— Con los datos indicados, la función T es

$$T = \frac{\int_{0.308}^{0.478} T(r)\cdot r \cdot (0,7051)\, dr}{\int_{0.308}^{0.478} r\cdot (0,7051)\, dr} = \frac{\int_{0.308}^{0.478} r\cdot T(r)\, dr}{\int_{0.308}^{0.478} r\, dr}$$

Conocemos r y $T(r)$ $\Rightarrow$ Calculamos $r\cdot T(r)$, el integrando del ~~la~~ numerador

k	0	1	2	3	4	5
r_k	0.308	0.342	0.376	0.410	0.444	0.478
$T(r_k)$	640	885	1034	1140	1204	1239
$r_k\cdot T(r_k)$	197.12	302.67	388.78	467.40	534.58	592.24

Usando Trapecio $h = 0.034$.

$$D(r) = \frac{0.034}{2}\cdot\left[\underbrace{0.308}_{r_0} + \underbrace{0.478}_{r_5} + 2\underbrace{(0.342+0.376+0.410+0.444)}_{\sum_{k=1}^{4} r_k}\right]$$

$$= \frac{0,034}{2}\cdot 3,9300 = 0,066810$$

$$N(r) = \frac{0.034}{2}\left[\underbrace{197.12}_{0} + \underbrace{592.24}_{5} + 2\cdot(302,67+388,78+467,40+534,58)\right]$$

$$= \frac{0.034}{2}\cdot 4176.2 = 70.996$$

$$\boxed{T = \frac{70.996}{0.066810} = 1062.7}$$

Usando Simpson: Hay un número par de puntos, por tanto debemos usar una ~~iteración~~ aplicación de la regla de 3/8 y el resto la regla de 1/3, para cada una de las integrales

$$D(r) = S_{3/8}(x_0, x_1, x_2, x_3) + S_{1/3}(x_3, x_4, x_5) \Rightarrow$$

$$S_{3/8}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{3h}{8} \cdot \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right] = 0.036618$$

$$S_{1/3}(x_3, x_4, x_5) = h/3 \left[f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5) \right] = 0.030192.$$

$$D(r) = \left[0.036618 + 0.030192 \right] = 0.066810^{*}$$

*El resultado coincide con trapecio, puesto que ambas reglas son exactas para polinomios grado 1.

$$N(r) = S_{3/8} + S_{1/3} = 71.164.$$

$$S_{3/8} = \frac{3h}{8} \left[197{,}12 + 3 \cdot (302{,}67 + 388{,}78) + 467{,}40 \right] = 34.921$$

$$S_{1/3} = \frac{h}{3} \cdot \left[467{,}40 + 4 \cdot (534{,}58) + 592{,}24 \right] = 36.243$$

$$\boxed{T = \frac{71.164}{0.066810} = 1065.2}$$

4.— Son nodos equidistantes con $h=2$, $\{x_k\}_{k=0}^{10}$

Trapecio:

$$T = \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0) + f(x_{10}) + 2\cdot\sum_{k=1}^{9} f(x_k)\right] \Rightarrow$$

$$T = \left[f(0)+f(20) + 2\cdot\left(f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)+f(12)+f(14)+f(16)+f(18)\right)\right]$$

$$= \left[0+0+2\cdot\left(1{,}8+2{,}0+4{,}0+4{,}0+6{,}0+4{,}0+3{,}4+3{,}6+2{,}8\right)\right] =$$

$$\boxed{T = 2\cdot 31{,}6} \boxed{= 63{,}2}$$

Simpson: Como el nº de nodos es impar (11) usamos sólo la regla de Simpson 1/3.

$$S = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0) + 4\cdot\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right) + 2\left(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+ f(x_8)\right) + f(x_{10})\right] \Rightarrow$$

$$S = \frac{2}{3}\cdot\left[\underbrace{f(0)}_{0} + 4\left[f(2)+f(6)+f(10)+f(14)+f(18)\right] + 2\left[f(4)+f(8)+f(12)+f(16)\right] + \underbrace{f(20)}_{0}\right]$$

$$= 2/3\cdot\left[4\cdot(1.8+4{,}0+6{,}0+3{,}4+2{,}8)+2(2{,}0+4{,}0+4{,}0+3{,}6)\right] =$$

$$\boxed{S = 2/3\,[4\cdot 18 + 2\cdot 13{,}6] = 2/3\,(99{,}2) = 66{,}133.}$$

5.-

$$\int_0^{2\pi} x \, sen(x)\,dx .$$

Para usar los métodos de cuadratura de Gauss-Legendre y Clenshaw-Curtis tenemos que realizar un cambio de variable para que la integral se realice en el intervalo $[-1,1]$. En este caso el cambio de variable es $a=0$ $b=2\pi$

$$\boxed{x = \frac{b-a}{2}\xi + \left(\frac{a+b}{2}\right) = \pi\xi + \pi = \pi(1+\xi)}$$

$$\int_0^{2\pi} x\cdot sen(x)\,dx = \pi^2\int_{-1}^{1}(1+\xi)\cdot sen(\pi(1+\xi))\,d\xi = \pi^2\int_{-1}^{1} g(\xi)\,d\xi .$$

Calculamos los nodos con la función de OCTAVE correspondiente (gauss.m, clencurt.m)

$\boxed{n=2}$

Gauss $\Rightarrow$ $\xi = [-0.5774, 0.5774]$ $w=[1,1]$

Clenshaw $\Rightarrow$ $\xi = [-1 , 1]$ $w=[1,1]$

$$I_G(2) = \pi^2\cdot[g(-0.5774) + g(0.5774)] = \pi^2\cdot[0.4102 - 1.5310] = -11,062$$

$$I_C(2) = \pi^2\cdot[g(-1) + g(1)] = \pi^2\cdot[0+0] = 0$$

$n=3$

Gauss: $\xi=[-0.7746, 0, 0.7746]$ $\quad w=[0.5556, 0.8889, 0.5556]$

$$I = \pi^2\left[0.5556\cdot g(-0.7746)+0.8889\cdot g(0)+0.5556\cdot g(0.7746)\right]$$

$$= \pi^2\left[0.081447+0-0.64123\right] = -5.5249.$$

Clenshaw: $\xi=[-1,0,1]$ $\quad w=[\,1/3 \quad 2/3 \quad 1/3\,]$

$$I = \pi^2\left[+\frac{1}{3}\cdot g(-1)+2/3\, g(0)+1/3\, g(1)\right] =$$

$$= \pi^2\left[0+0+0\right] = 0.$$

El valor exacto para la integral es $\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -2\pi = -6.2832$

Los errores cometidos son: (en valor absoluto). Hemos calculado la tabla para $n=2,3,4$ y 5 nodos, usando en este caso, OCTAVE

	2	3	4	5
Gauss	$\lvert -4.7784\rvert$	$\lvert 0.7583\rvert$	0.05032	$1{,}9\times10^{-3}$
Clenshaw	6.2832	6.2832	2.4898	0.3599.

6)

a) Intervalo $I=[1,3]$ $n=4$ $h=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=0.5$

NODOS: $[x_0=1,\ x_1=1.5,\ x_2=2,\ x_3=2.5,\ x_4=3]$

$F(x_k)$: $[1,\ 2/3,\ 1/2,\ 2/5,\ 1/3]$

TRAPECIO,

$$I=\frac{0.5}{2}\cdot\left[1+2\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\frac{0.5}{2}\cdot\left[1+\frac{4}{3}+1+\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\frac{0.5}{2}\cdot\left[\frac{15+20+15+12+5}{15}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{67}{15}\right]=\frac{67}{60}=1.1167.$$

EXACTA, $\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\log|x|\Big]_{x=1}^{3}=\log(3)-\log(1)=\log(3)=1.0986.$

b) $I=[0,2]$ $h=\frac{2}{4}=0.5$ $f(x)=x^3$

$X=[0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2]$

$f(x)=[0,\ 1/8,\ 1,\ 27/8,\ 8]$

$$I=\frac{0.5}{2}\left[0+2\left(1/8+1+27/8\right)+8\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[2\cdot\frac{9}{2}+8\right]=\frac{17}{4}=4.25$$

EXACTA: $\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{16}{4}=4.$

c) $\int_0^{2\pi} x \cdot sen(x)\, dx \qquad n=8$

$$h = \frac{2\pi - 0}{8} = \pi/4 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

TRAPECIO:

$$T = \frac{\pi/4}{2} \cdot \left\{ f(0) + 2\left(f(\pi/4) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) + f(2\pi) \right\}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\pi/4) = \pi/4 \cdot sen(\pi/4) = \pi/4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$f(\pi/2) = \pi/2 \cdot sen(\pi/2) = \pi/2 \cdot 1 = \pi/2$$

$$f(3\pi/4) = \frac{3\pi}{4} \cdot sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi \cdot 3\sqrt{2}}{8}$$

$$f(\pi) = \pi \cdot sen(\pi) = \pi \cdot 0 = 0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} \cdot sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi\, 5\sqrt{2}}{8}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot (-1) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4} \cdot sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi \cdot 7\sqrt{2}}{8}$$

$$f(2\pi) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi) = 2\pi \cdot 0 = 0$$

$$T = \frac{\pi}{8} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{8} \right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \left(-\sqrt{2} - 1 \right) = -5.9568$$

d) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx \quad n=8$

$h = \frac{1}{8} \qquad x = [0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1]$

$f(x) = [0, 0.0177, 0.0803, 0.2046, 0.4122, 0.7298, 1.1908, 1.8366, 2.7183]$

TRAPECIO: $\frac{1/8}{2} \cdot [0 + 2(0.0177 + 0.0803 + 0.2046 + 0.4122 + 0.7298 + 1.1908 + 1.8366) + 2.7183]$

$\frac{1}{16} \cdot [2 \cdot (4.4720) + 2.7183] = \frac{1}{16} \cdot (11.662) = 0.7289$

sum

Ns/16

7.– Repetimos el ejercicio con la regla de Simpson 1/3. Se puede hacer sin problemas puesto que el número de subintervalos es par.

El error de este método es

$$-\frac{h^5}{90} f^4(\xi) \quad \left(1 \text{ paso}, \; h = \frac{(b-a)}{2}\right)$$

$$-\frac{(b-a)^5}{180 n^4} f^{IV}(\xi) \quad \left(n \,; \; h = \frac{(b-a)}{n}\right)$$

a) Utilizaremos los datos del problema anterior : $n=4$ $h=0.5$

$$I_{1/3} = \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2 \cdot f(x_2) + f(x_3) \right]$$

$$= \frac{0.5}{3} \cdot \left[f(1) + 4\left(f(1.5) + f(2.5)\right) + 2 \cdot f(2) + f(3) \right] =$$

$$= \frac{0.5}{3} \left[1 + 4\left(2/3 + 2/5\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[1 + \frac{8}{3} + \frac{8}{5} + 1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{33}{5} \right] = \frac{11}{10} = 1.1$$

ERROR $f(x) = 1/x = x^{-1}$ $\quad f'(x) = -x^{-2}$ $\quad f''(x) = 2x^{-3}$ $\quad f''' = -6x^{-4}$ $\quad f^{IV} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$

La función $f^{IV}(x)$ es decreciente en $[1,3] \Rightarrow$ El máximo está en $x = 1 \Rightarrow$

$$|f^{IV}(x)| \leq 24 \quad \text{si } x \in [1,3]$$

COTA ERROR $\Rightarrow \left| \dfrac{-(3-1)^5}{180(4)^4} \cdot f^{IV}(\xi) \right| < \dfrac{2^5}{180 \cdot 4^4} \cdot 24 \approx 0.016667 \; (1/60)$

form

EXACTA $= 1.0986$

Og(3

ERROR $\Rightarrow \; |1.0986 - 1.1| = 1.3877 \times 10^{-3} < 0.016667$

abs

b) $x = \left[0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right]$ $\quad h = 0.5 \quad n = 4$

$f_x = \left[0, \frac{1}{8}, 1, \frac{27}{8}, 8\right]$

$$S_{1/3} = \frac{0.5}{3}\cdot\left[0 + 4\cdot\left[\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right] + 2\left[1\right] + 8\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[24\right] = 4$$

LOTA ERROR: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$ $\quad f^{iv}(x) = 0$

$$\left| -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot \underbrace{f^{iv}(\xi)}_{0} \right| = 0$$

comprobamos que el valor proporcionado por la regla de Simpson 1/3 coincide con el valor exacto, lo que es lógico, puesto que la regla es exacta hasta polinomios de grado 3.

c) $f(x) = x \cdot \text{sen}(x)$ $\quad n = 8 \quad h = \pi/4$

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

$f(x) = \{0, \pi\sqrt{2} \ldots, \pi \ldots, 3\pi\sqrt{2} \ldots$

$$f(x) = \left\{0, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}, 0, -\frac{5\pi}{8}\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi\sqrt{2}}{8}, 0\right\}$$

$$S_{1/3} = \frac{\pi/4}{3}\left\{4\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{5\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{7\pi\sqrt{2}}{8}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{12}\left\{4\cdot(-\pi\sqrt{2}) + 2(-\pi)\right\} = \frac{\pi^2}{6}\left\{-2\sqrt{2} - 1\right\} = -6.2975$$

EXACTA $= -6.2832$ $\Rightarrow$ ERROR $= |-6.2832 + 6.2975| = 0.014325$

COTA ERROR: $f(x) = x\cdot \operatorname{sen}(x)$ $f'(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$

$f''(x) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$ $f'''(x) = -3\operatorname{sen}(x) - x\cos x$

$f^{IV}(x) = -4\cos x + x\operatorname{sen} x$

$$\left|-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\delta)\right| = \left|-\frac{2^5\pi^5}{180\cdot 8^4}\cdot(-4\cos\delta + \delta\operatorname{sen}(\delta))\right| \doteq 0.013282\cdot\left|-4\cos\delta + \delta\operatorname{sen}\delta\right|$$

$$\leq 0.013282\cdot\left(|4|\cdot\underbrace{|\cos\delta|}_{\leq 1} + \overbrace{|\delta|}^{\leq 2\pi \text{ en el intervalo}}\cdot\underbrace{|\operatorname{sen}(\delta)|}_{\leq 1}\right) \leq$$

$$\leq 0.013282\left(4 + 2\pi\right) \approx 0.1366$$

Luego se cumple que el error real 0.014325 es menor que la cota de error 0.1366.

d) $\int_0^1 x^2 e^x dx \quad n=8 \Rightarrow h=\frac{1}{8}$

Usamos los datos obtenidos en el apartado d) del problema anterior.

$h=\frac{1}{8} \qquad x=\left[0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1\right]$

$f(x)=[0, 0.0177, 0.0803, 0.2046, 0.4122, 0.7298, 1.1908, 1.8366, 2.7183]$

Pares $\Rightarrow P = 0.0803+0.4122+1.1908 = 1.6832$

Impares $\Rightarrow I = 0.0177+0.2046+0.7298+1.8366 = 2.7887$

Simpson $=(0+4\cdot I+2\cdot P+2.7183)\dfrac{1/8}{3} = \dfrac{1}{24}\cdot(17.240) = 0.7183$

Y(9

EXACTA $= e-2 \simeq 0.7182818284590451$

$|\text{ERROR}| = |\text{EXACTA}-\text{SIMPSON}| = 3.96\times10^{-5}$

COTA ERROR

$\left|-\dfrac{(b-a)^5}{180\cdot n^4} f^{IV}(\delta)\right| \leq \dfrac{1}{180\cdot 8^4}\cdot 57.084 \cong 7.7425\times10^{-5}$

Ans/180/8^4

$f(x) = x^2e^x$

$f'(x) = (x^2+2x)e^x$

$f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$

$f'''(x) = (x^2+6x+6)e^x$

$f^{IV}(x) = (x^2+8x+12)e^x$

$|f^{IV}(\delta)| \leq (1+8+12)e = 57.084$

Se cumple que el error cometido es menor que la cota.

8.— $\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx$

¿n para que error $\leq 10^{-5}$?

$$E = \left| -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot f^{IV}(\delta) \right|$$

$f(x) = \tan(x)$

$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + f^2(x)$

$f''(x) = 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot (1 + f^2(x)) = 2f(x) + 2f^3(x)$

$f'''(x) = 2f'(x) + 6f(x)^2 \cdot f'(x) = (2 + 6f^2(x)) \cdot f'(x) = (2 + 6f^2(x)) \cdot (1 + f^2(x))$

$f''' = 2 + 8f^2(x) + 6f^4(x)$

$f^{IV}(x) = (16f(x) + 24f^3(x))\, f'(x) = (16f(x) + 24f^3(x))(1 + f^2(x)) =$

$16f(x) + 40f^3(x) + 24f^5(x)$

$|f^{IV}(x)| \leq 16 \cdot |\tan(x)| + 40 \cdot |\tan(x)|^3 + 24|\tan(x)|^5$

En $[0, \pi/4]$ la función tangente es creciente, por tanto alcanza el máximo valor en $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, por lanto

$|f^{IV}(x)| \leq 16 + 40 + 24 = 80 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$

El error seria

$$\left| -\frac{(\pi/4 - 0)^5}{180 \cdot n^4} \cdot f^{IV}(\delta) \right| \leq \frac{\pi^5}{2304n^4}$$

luego $\frac{\pi^5}{2304n^4} < 10^{-5} \Rightarrow 7.5289 \cdot n^4 > 10^{\cdot 5}$ 10^5

30

$n > 10.735 \Rightarrow \boxed{\text{Solución} \mid n = 11}$

domingo, 5 de diciembre de 2021 0:41

9.- $t = \int_{V(t_0)}^{V(t_1)} \frac{m}{R(u)}\, du = \int_{V(t_0)}^{V(t_1)} \frac{m}{-u\sqrt{u}}\, du$

Tenemos

$m = 10$

$t_0 = 0$

$V(t_0) = 10$ $\Rightarrow$ $t_1 = \int_{10}^{5} \frac{10}{-u\sqrt{u}}\, du = \int_{5}^{10} \frac{10}{u\sqrt{u}}\, du.$

$V(t_1) = 5$

$t_1 = ?$

Como $h = 0.25 \Rightarrow$ OCTAVE (

```
u = 5:0.25:10;   % Vector de 21 elementos
y = 10./u./sqrt(u);
par = 3:2:19;     % Recuerda OCTAVE EMPIEZA EN 1
impar = 2:2:20;
Spar = sum(y(par));
Simpar = sum(y(impar));
Simpson = (h/3)*(y(1) + 4*Simpar + 2*Spar + y(21));
Trapecio = (h/2)*(y(1) +2sum(y(2:20)) + y(21));
```

Trapecio = (h/2) * (Y(1) + 2*sum(Y(2:20)) + Y(21));

Resultados:

Simpson = 2.619718523014751

Trapecio = 2.620866592943355

Exacta = 2.619716589662398

ERROR SIMPSON $= 1.9 \times 10^{-6}$

ERROR TRAPECIO $= 1.15 \times 10^{-3}$