GRUPO 1 - EJERCICIOS PROPUESTOS PRÁCTICAS TEMAS 5, 6 y 7

Fecha de entrega: 17 de enero 2022.

Ejercicio 1

Se considera el sólido rígido deformable de la Figura 1 cuya ecuación de movimiento viene determinada por el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} & mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t); \qquad t \geq 0 \\ & x(0) = 0; \\ & x'(0) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde m es la masa del sólido, c es un coeficiente de amortiguamiento viscoso, k es la rigidez del muelle y $f(t)$ es la fuerza aplicada. La solución de la ecuación anterior determina la posición $x(t)$ del sólido para cada instante de tiempo t. Considera el caso concreto:

$$\boxed{m = 1; \qquad c = 7; \qquad k = 10; \qquad f(t) = \begin{cases} \sin(t); & t < 40 \\ 0; & t \geq 40 \end{cases}}$$

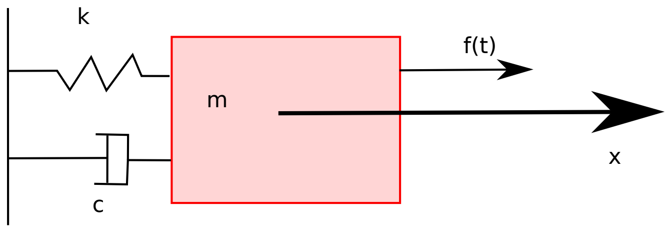

Figure 1: Sólido rígido de masa m, conectado a amortiguador de constante c y muelle de constante k, sometido a fuerza $f(t)$. En OCTAVE, una función a trozos como $f(t)$ se puede definir como $f = @(t) \quad (\sin(t). * (t >= 0 \quad \& \quad t < 40))$

Se pide:

a) Transforma el problema anterior en un problema de condiciones iniciales donde la ecuación diferencial de orden 2 se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1.

b) Para $T = 100$, considera una discretización de $[0, T]$ utilizando 5000 subintervalos del mismo tamaño. Crea por tanto un vector para la variable t de 5001 componentes.

c) Utiliza el método explícito de Euler para obtener la solución al problema anterior con la discretización descrita en apartado **b)**.

d) Justifica por qué la discretización utilizada conduce a una solución estable.

e) Representa gráficamente tanto la variable $u(t)$, como su derivada $u'(t)$ con respecto al tiempo.

f) Utilizando los valores de $u(t)$ encontrados en el apartado **c)**, calcula la posición media del sólido, obtenida a través de la siguiente integral:

$$\bar{u} = \frac{\int_0^T u(t)\,dt}{T}$$

Utiliza para ello tanto la regla del trapecio compuesta como la de Simpson compuesta.

g) Repite los apartados **c), d), e) y f)** usando el método de Euler implícito para resolver el problema inicial y compara con los resultados obtenidos con el método explícito.

Ejercicio 2

Considera la ecuación del calor en 1D:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \qquad x \in [0,3]; \qquad t \geq 0] \\
&u(0,t) = 0; \\
&u(3,t) = 0; \\
&u(x,0) = \sin(2\pi x)
\end{aligned} \tag{2}$$

Se pide:

a) Considera una discretización del intervalo $x \in [0,3]$ usando 300 subintervalos iguales y una discretización del intervalo $t \in [0, 0.15]$ utilizando 4000 subintervalos.

b) Utiliza el método explícito de Euler para obtener la solución al problema anterior con la discretización descrita en apartado **a)**.

c) Justifica por qué la discretización utilizada conduce a una solución estable.

d) Representa gráficamente la variable $u(x,t)$ utilizando el comando *surf*. Para ello sigue estas instrucciones:

- Sea **x** el vector de 301 componentes asociado con la discretización de $x \in [0,3]$.
- Sea **t** el vector de 4001 componentes asociado con la discretización de $t \in [0, 0.15]$
- Tras calcular la solución al problema, debes escribir las siguientes intrucciones:

```
[xmesh,tmesh] = meshgrid(x,t);
figure(1)
surf(xmesh,tmesh,u','edgecolor','none')
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u(x,t)')
colorbar
```