GRUPO 1 - EJERCICIOS PROPUESTOS PRÁCTICAS TEMAS 2, 3 y 4

Fecha de entrega: 30 de Noviembre 2021.

Ejercicio 1. Sistemas lineales Se considera el problema de condiciones de contorno siguiente:

$$\begin{aligned} -a\frac{d^2u(x)}{dx^2} + b\frac{du(x)}{dx} &= f(x); \qquad x \in [0, L]\,; \\ u(0) &= 0; \\ u(L) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u(x)$ es la solución del problema, L la longitud del dominio considerado y a y b dos números reales relacionadas con las propiedades físicas del sistema. En clase de prácticas hemos visto la discretización del problema anterior para $b = 0$ y $a = KA$. En concreto, discretizamos la geometría $x \in [0, L]$ en n nodos intermedios, dando lugar al vector $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$. Asimismo, asociado con las funciones $u(x)$ y $f(x)$ obtuvimos los vectores $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T$ y $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix}^T$, correspondientes a la aproximación discreta de $u(x)$ y a la evaluación de $f(x)$ en cada nodo x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Para la discretización de la ecuación diferencial se utilizan las siguientes aproximaciones de las derivadas primera y segunda de $u(x)$:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{du_i}{dx} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}; \qquad \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{d^2u_i}{dx^2} \approx -\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}, \tag{2}$$

siendo h el espacio entre nodos, es decir:

$$h = L/(n+1).$$

Haciendo uso de ecuación (2) en (1) comprueba que la versión discreta del problema de condiciones de contorno (1), está representado por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

donde

$$\boldsymbol{K} = \frac{a}{h^2}\boldsymbol{A}_1 + \frac{b}{h}\boldsymbol{A}_2, \tag{4}$$

donde, por ejemplo, para el caso $n = 5$ las matrices $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

siendo $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{K}_5$, la matriz de rigidez 5×5. La equivalencia entre ambos problemas continuo y discreto puede verse debajo:

$$\boxed{\underbrace{\begin{aligned} -a\frac{d^2u(x)}{dx^2} + b\frac{du(x)}{dx} &= f(x); \qquad x \in [0, L]\,; \\ u(0) &= 0; \\ u(L) &= 0, \end{aligned}}_{\text{Problema continuo}}}\;; \qquad \boxed{\underbrace{\begin{aligned} &\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \\ &\boldsymbol{K} = \frac{a}{h^2}\boldsymbol{A}_1 + \frac{b}{h}\boldsymbol{A}_2, \end{aligned}}_{\text{Problema discreto}}} \tag{6}$$

Se considera el siguiente caso concreto:

$$\boxed{a = 1; \qquad b = 5; \qquad f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right); \qquad L = 1}$$

Se pide:

a) Tomando como referencia la función **MyToeplitz.m** vista en la práctica del tema 1, crea una función llamada **MyBackwardDifferenceMatrix.m**. Dicha función debe tomar como input el tamaño de la misma y debe devolver la matriz correspondiente $\boldsymbol{A}_2$.

b) Calcula la solución del problema anterior para distintos tamaños. En concreto, considera los casos de 20, 50 y 100 nodos intermedios (excluyendo los extremos). Para ello, utiliza el método iterativo de Jacobi y monitoriza el número de condicionamiento de la matriz del sistema $\boldsymbol{K}$, el radio espectral de la matriz $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{K}$ (siendo $\boldsymbol{P}$ la matriz de iteración usada en el método de Jacobi) y el número de iteraciones requeridas para alcanzar una tolerancia de 10^{-6}. Considera un número máximo de iteraciones permitidas de 10^5.

c) Explica el resultado obtenido en el apartado **b)**.

d) Para el tamaño $n = 100$, crea un vector con las posiciones x asociadas a los nodos de la discretización, incluyendo las posiciones $x = 0$ y $x = L$. Además, a la solución aproximada del problema $\boldsymbol{u}$ añádele las condiciones de contorno. Finalmente, representa gráficamente la solución numérica obtenida $\boldsymbol{u}$ (eje vertical) con respecto al vector $\boldsymbol{x}$ (eje horizontal).

e) ¿Podríamos haber resuelto el problema utilizando el método de Cholesky? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2. Ecuaciones no lineales Consideremos un elastómero (Figura 1) de forma prismática de base cuadrada con longitud L y espesor H. El elastómero está sujeto a un ensayo de tracción bi-axial. Como consecuencia del mismo, ante la aplicación de una tensión σ igual en ambas direcciones x e y, el elastómero cambia sus dimensiones. En concreto, la longitud L pasa a ser l y el espesor pasa a ser h. Introduzcamos el siguiente cambio de variable:

$$x_1 = \frac{l}{L}; \qquad x_2 = \frac{h}{H}. \tag{7}$$

Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio estructural del elastómero son las siguientes:

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x_1 - \frac{\mu}{x_1} + \lambda\left(x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2\right) - \sigma \\ \\ \mu x_2 - \frac{\mu}{x_2} + \lambda\left(x_1^4 x_2 - x_1^2\right) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde $\mu = 10^5$ (Pa) y $\lambda = 2 \times 10^5$ (Pa) son parámetros físicos del elastómero que describen su resistencia a deformaciones por cortante y a deformaciones o cambios volumétricos, respectivamente. Se pide:

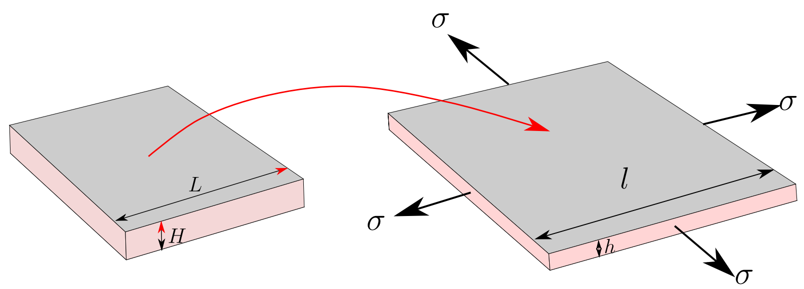

Figure 1: Elastómero sujeto a ensayo de tracción (equi)-biaxial.

Considera una inicialización de la solución inicial de $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, una tolerancia de 10^{-6}, y un número máximo de iteraciones de 100. Entonces:

a) Para el caso $\sigma = 10^5$ (Pa), determina el volumen deformado del elastómero si las medidas antes de la aplicación de la tensión σ eran $H = 0.001$ (m) y $L = 0.1$ (m). ($V = l^2 h$)

b) En una gráfica representa gráficamente al logaritmo decimal del residuo en cada iteración de Newton (recuerda que residuo en la iteración k, es decir R^k es $R^k = ||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)||$). En la gráfica creada crea una etiqueta de forma que aparezca en el eje horizontal el texto **iteraciones**, y en el eje vertical el texto **log10Res**. ¿Por qué tiene la curva esa forma? Relaciónalo con el orden de convergencia del método de Newton.

industriales
etsii UPCT

Universidad Politécnica de Cartagena

Ejercicio 3. Interpolación

a) Con respecto al apartado **b)** del **Ejercicio 1**, considera el caso $n = 80$. Resuelve el problema utilizando el solver directo de Octave.

b) Crea un vector con las posiciones x asociadas a los nodos de la discretización, incluyendo las posiciones $x = 0$ y $x = L$. Además, a la solución aproximada del problema $\boldsymbol{u}$ añádele las condiciones de contorno. Deberías tener por tanto dos vectores con 82 componentes cada uno.

c) Vamos a interpolar el valor numérico obtenido anteriormente en coordenadas distintas a las utilizadas para resolver el problema. Para ello, creamos un nuevo vector $\boldsymbol{x}^*$ con 2000 componentes correspondientes a las coordenadas de una división equi-espaciada del intervalo $[0, L]$.

d) Calcula el polinomio de Lagrange de grado más bajo que pasa por los 82 datos originales. Evalúa dicho polinomio en las nuevas coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Representa gráficamente la solución interpolada vs las coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Justifica los resultados obtenidos.

e) Considera una interpolación con polinomios lineales en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de los 82 datos originales. Evalúa dicha interpolación en las coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Representa gráficamente la solución interpolada vs las coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Justifica los resultados obtenidos.

f) Considera una interpolación con splines cúbicos en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de los 82 datos originales, utilizando para ello condiciones naturales. Evalúa dicha interpolación en las coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Representa gráficamente la solución interpolada vs las coordenadas $\boldsymbol{x}^*$. Justifica los resultados obtenidos.

+ ++++++