Apéndice B

Fundamentos Matemáticos

B.1. Resultados elementales sobre funciones reales

Se recuerdan en este capítulo una serie de conceptos matemáticos básicos necesarios para el desarrollo de los métodos numéricos posteriores. En lo siguiente todas las funciones serán reales y en la mayoría de las ocasiones de una sola variable real, es decir, serán aplicaciones de la forma

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde I es un subconjunto de $\mathbb{R}$, que por regla general será un intervalo.

Definición B.1 *Dada $f(x)$, función real de variable real y $x_o \in \mathbb{R}$, diremos que $f(x)$ tiene por límite a $\lambda \in \mathbb{R}$, cuando x tiende a x_0, y lo representamos por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ si*

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists \delta > 0 \ \textit{t.q. si} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \epsilon$$

Definición B.2 *Dada $f(x)$, función real de variable real, $x_o \in \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) \ \textit{continua en} \ x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \exists f(x_0) \\ ii) & \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ iii) & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Definición B.3 *Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) \ \textit{es continua en} \ I \Leftrightarrow f(x) \ \textit{es continua} \ \forall x \in I$$

Definición B.4 *Dado $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces definimos $\mathcal{C}(I)$ como el conjunto de todas las funciones continuas en I, es decir*

$$\mathcal{C}(I) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} |\ f(x) \ \textit{es continua en} \ I \}$$

Teorema B.1 (Teorema de Bolzano) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ entonces*

$$\textit{Si} \ f(a) \cdot f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] \ \ \textit{t.q.} \ f(\xi) = 0$$

Nota 1 *Este teorema tiene su aplicación en la búsqueda de soluciones de ecuaciones de la forma*

$$f(x) = 0$$

Teorema B.2 (Teorema de los Valores Intermedios) *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo $f \in \mathcal{C}(I)$, sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, con $y_1 < y_2$ y tales que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, para $x_1, x_2 \in I \Rightarrow$*

$$\forall \ y_1 < y_3 < y_2 \Rightarrow \exists \ x_3 \in I, \ \textit{con} \ y_3 = f(x_3)$$

Nota 2 *El teorema implica que si la función $f(x)$ es continua y toma dos valores cualesquiera, entonces toma todos los valores intermedios entre estos dos.*

Definición B.5 *Dada $f(x)$, función real de variable real, $x_o \in \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) \text{ es derivable en } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Nota 3 *Si hacemos el cambio $x - x_0 = h$, el límite también puede expresarse como*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Teorema B.3 *Sea $f(x)$ una función real de variable real y sea $x_o \in \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) \text{ es derivable en } x_0 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x_0$$

Como sabemos, el recíproco de este teorema no es cierto, $f(x) = |x|$ es una función continua, pero que no es derivable en $x = 0$.

Definición B.6 *Dada $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) \text{ es derivable en } (a, b) \Leftrightarrow f(x) \text{ es derivable } \forall x \in (a, b)$$

En este caso podemos definir la función derivada $f'(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Definición B.7 *Definimos $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ como el conjunto de todas las funciones definidas sobre $\mathbb{R}$, que son derivables y con derivada continua, es decir*

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\ f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R},\ f'(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}\}$$

Podemos generalizar esta definición $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{C}^n(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\ f(x) \text{ es } n \text{ veces derivable en } \mathbb{R} \text{ y } f^{(n)}(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \right\}$$

siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n–ésima de la función $f(x)$.

Para funciones infinitamente derivables, por ejemplo como los polinomios o la función exponencial e^x, definimos el conjunto

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) \text{ existe y es continua en } \mathbb{R} \right\}$$

Si en lugar de $\mathbb{R}$, consideramos un intervalo $[a, b]$, podemos definir las familias

$$\mathcal{C}^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ es } n \text{ veces derivable en } (a, b) \text{ y } f^{(n)}(x) \text{ es continua en } [a, b] \right\}$$

Teorema B.4 (Teorema de Taylor) *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^n([a, b])$, con $n \geq 0$ y supongamos que también existe $f^{(n+1)}(x)$ en (a, b), entonces*

$$\forall x, x_o \in [a, b] \Rightarrow \exists\ \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x \text{ tal que } f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + E_n(x)$$

siendo

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

el llamado resto de Lagrange *y nos da un error aproximación.*

Nota 4 *Si tomamos $x = x_0 + h$, el teorema de taylor se expresará como*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) h^{n+1}$$

con $x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$.

Nota 5 *Este teorema representa uno de los primero métodos numéricos, ya que es posible utilizarlo para obtener una aproximación del valor de una función, mediante polinomios. El sumatorio es el llamado* polinomio de Taylor de grado n *centrado en x_0.*

El valor del error (resto de Lagrange) es desconocido, pero es posible encontrar una cota que nos indique una medida del error cometido.

Ejemplo B.1 *Sea*

$$f(x) = \ln(1 + x) \qquad x \in (0, 1)$$

y tomaremos $x_0 = 0$. Entonces

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0)$	$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
0	$\ln(1+x)$	$\ln(1) = 0$	0
1	$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$	1	1
2	$(-1)(1+x)^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$(-2)(-1)(1+x)^{-3}$	$(-1)^2 \, 2!$	$(-1)^2 \frac{1}{3}$
4	$(-1)^3 \, 3! \, (1+x)^{-4}$	$(-1)^3 \, 3!$	$(-1)^3 \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$	$(-1)\frac{1}{n}$

y sustituyendo en la expresión del polinomio de Taylor correspondiente

$$f(x) = \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + E_n(x)$$

con $E_n(x)$ en este caso

$$E_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} (1 + \xi)^{-(n+1)}$$

Nota 6 *El primer término del sumatorio, $k = 0$, es nulo y por eso se empieza con $k = 1$.*

Como $\xi \in [0, 1]$, es decir $0 \leq \xi \leq 1$, si sumamos 1 a la desigualdad obtenemos

$$1 \leq 1 + \xi \leq 2$$

y los inversos guardarán la relación contraria

$$1 \geq \frac{1}{1 + \xi} \geq \frac{1}{2}$$

Ahora es fácil obtener que

$$1^{n+1} \geq \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$$

y la expresión del error $E_n(x)$ se puede acotar como sigue

$$|E_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{(n+1)}} \right| = \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{(n+1)}} \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Supongamos que se quiere utilizar la serie para calcular $\ln(2)$ $(x = 1)$, en este caso

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} 1^k + E_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + E_n(1)$$

con $E_n(1)$ el error cometido con esta aproximación. Para este caso y utilizando la cota general, se obtiene

$$|E_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Ahora es posible estimar el error cometido al truncar la serie en el término n–ésimo, simplemente sustituyendo el n adecuado en la expresión

$$\frac{1}{n+1} \leq error$$

Por ejemplo si queremos que el error sea más pequeño que 10^{-8}, tendríamos que considerar el valor n que cumpla

$$\frac{1}{n+1} < error = 10^{-8} \Rightarrow (n+1) > 10^8$$

lo que nos da una cantidad de 100.000.000 (¡cien millones!) de términos. Sin embargo, si empleamos el mismo desarrollo para, por ejemplo, calcular $\ln(1{,}5)$, entonces en este caso puesto que $x = 0{,}5 = 1/2$

$$|E_n(1/2)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < 10^{-8}$$

es decir:

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < 10^{-8}$$

o equivalentemente

$$2^{n+1}(n+1) > 10^8$$

que para $n = 22$

$$2^{n+1}(n+1) = 2^{23+1}(23+1) = 192{,}9373{,}984 > 10^8$$

y se alcanza el error solicitado con un número de término bastante inferior al ejemplo anterior.

Tenemos que observar que este tipo de aproximaciones no siempre son adecuadas y dependerán de la proximidad a x_0, el punto en torno al cual se construye el polinomio de Taylor.

Teorema B.5 (Teorema del Valor medio) *Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y supongamos que existe $f'(x)$ para $x \in (a,b)$ entonces*

$$\forall\ x, x_0 \in [a,b], \exists\ \xi \in (a,b)\ \ \textit{tal que}\ f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

En el caso particular en el que $x = b$ y $x_0 = a$ tendremos

$$\exists\ \xi \in (a,b)\ \ \textit{tal que}\ f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

Nota 7 *Este teorema es un caso especial del teorema de Taylor cuando $n = 1$.*

Teorema B.6 (Teorema de Rolle) *Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y supongamos que existe $f'(x)$ para $x \in (a,b)$ entonces*

$$\textit{Si}\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b)\ \ \textit{tal que}\ f'(\xi) = 0$$

Nota 8 *Este resultado puede ser útil para establecer si una ecuación de la forma $f(x) = 0$ tiene solución.*

Teorema B.7 (Teorema de Taylor en forma integral) *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^{n+1}(a,b)$*

$$\forall x, x_o \in [a,b] \Rightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x)$$

siendo

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

el error de aproximación.

Demostración: Realizaremos de forma recursiva integración por partes. Para $R_n(x)$ tomamos

$$\left\{ \begin{array}{cc} u = \frac{(x-t)^n}{n!} & du = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ dv = f^{(n+1)}(t)\,dt & v = f^{(n)}(t) \end{array} \right\}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \\ &= \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \, dt \end{aligned}$$

Evaluando en los extremos, se deduce fácilmente que

$$R_n(x) = -\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n-1}(x)$$

Aplicando de forma iterativa la ecuación anterior se obtiene

$$R_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_0(x)$$

y como

$$R_0(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$$

obtenemos el resultado buscado ya que

$$R_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + f(x) - f(x_0)$$

y al despejar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x)$$

El teorema de Taylor para funciones de varias variables es similar y podríamos, en el caso de 2 variables, ponerlo de la siguiente forma:

Teorema B.8 (Teorema de Taylor bidimensional) *Sea $f(x,y) \in \mathcal{C}^{n+1}([a,a+h] \times [b,b+k]) \Rightarrow \exists\ \theta \in (0,1)$, tal que*

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a,b) + E_n(h,k)$$

donde

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

y

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j} f(a,b) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} h^i k^{j-i}\frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a,b)$$

Ilustramos el teorema con un ejemplo.

Ejemplo B.2 *Encuentra el desarrollo de Taylor hasta el orden 1 para* $f(x,y) = \cos(xy)$

Solución: Desarrollamos en primer lugar el operador $(\cdot)^j$ hasta el orden buscado

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{0} f(x,y) = f(x,y)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{1} f(x,y) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2} f(x,y) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

que para la función $f(x,y) = \cos(xy)$ sería

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{0} f(x,y) = \cos(xy)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{1} f(x,y) = -hy\,\mathrm{sen}(xy) - kx\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2} f(x,y) = -h^2y^2\cos(xy) - 2hk(\mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy)) - k^2x^2\cos(xy)$$

Por tanto el desarrollo de Taylor para $n = 1$ de la función $\cos(xy)$ es

$$\cos((a+h)(b+k)) = \cos(ab) - \mathrm{sen}(ab)(bh+ak) + E_1(h,k)$$

siendo

$$\begin{aligned} E_1(h,k) &= -\frac{h^2}{2}(b+\theta k)^2\cos((a+\theta h)(b+\theta k)) \\ &\quad -hk\{\mathrm{sen}((a+\theta h)(b+\theta k)) + (a+\theta h)(b+\theta k)\cos((a+\theta h)(b+\theta k))\} \\ &\quad -\frac{k^2}{2}(a+\theta k)^2\cos((a+\theta h)(b+\theta k)) \end{aligned}$$

B.2. Integrales

Recordamos solamente un resultado fundamental del cálculo integral: el teorema del valor medio.

Teorema B.9 (Teorema del Valor Medio para Integrales) *Sean* $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$*, dos funciones reales con* $u, v \in \mathcal{C}([a,b])$ *y* $v \geq 0$*, entonces,*

$$\exists\ \xi \in [a,b] \ \ \textit{tal que} \ \int_a^b u(x)\,v(x)\,dx = u(\xi)\int_a^b v(x)\,dx$$

Demostración: Como $u(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, por el teorema de Weierstrass, tiene máximo y mínimo sobre el intervalo $[a,b]$, es decir, existen, $x_{\text{mín}} \in [a,b]$ y $x_{\text{máx}} \in [a,b]$, tales que

$$\begin{aligned} u(x_{\text{mín}}) &= \min_{x\in[a,b]} u(x) = A \\ u(x_{\text{máx}}) &= \max_{x\in[a,b]} u(x) = B \end{aligned}$$

es decir

$$A \leq u(x) \leq B \qquad \forall x \in [a,b]$$

Como $v(x) \geq 0$, entonces

$$Av(x) \leq u(x)\, v(x) \leq Bv(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Si ahora integramos sobre el intervalo $[a,b]$

$$A \int_a^b v(x)\, dx \leq \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \leq B \int_a^b v(x)\, dx$$

Si llamamos $I = \int_a^b v(x)\, dx$, se obtiene

$$AI \leq \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \leq BI$$

Si $I = 0$, entonces $v(x) = 0$ y el resultado es trivial tomando cualquier valor para ξ.
Si $I \neq 0$, entonces $I > 0$ y podemos dividir por I

$$A \leq \frac{1}{I} \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \leq B \Leftrightarrow A \leq C \leq B$$

Como $u(x)$ es continua y $C = \frac{1}{I}\int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$ es un valor intermedio entre A y B, por el teorema de los valores intermedios, debe existir un $\xi \in [a,b]$ tal que

$$u(\xi) = C$$

de donde obtenemos el resultado buscado

$$u(\xi) = \frac{1}{I} \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \Leftrightarrow \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = u(\xi) \int_a^b v(x)\, dx$$

B.3. Sucesiones, órdenes de convergencia

En una gran parte de los métodos numéricos se construye una sucesión de valores que se aproxima a la solución del problema. Recordaremos en esta sección definiciones y resultados básicos sobre ellas.

Definición B.8 *Una sucesión de números reales, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de números reales.*

Definición B.9 *Diremos que la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como límite $\lambda \in \mathbb{R}$ cuando n tiende a ∞ y se representa como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$ si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \textit{tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \lambda| < \varepsilon$$

Las sucesiones no convergen con la misma rapidez. Por ejemplo, es conocido que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

sin embargo es necesario tomar $n = 100$, para que el error cometido respecto al valor real sea de $0{,}001358 = 1{,}358 \times 10^{-3}$, mayor de una milésima. Sin embago, la sucesión definida por

$$x_n = \begin{cases} x_1 = 2 & \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n} & n \geq 2 \end{cases}$$

converge rápidamente a $\sqrt{2} = 1.\,414213562$, sin más que calcular los primeros términos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \\ x_3 &= \frac{1}{2}1{,}5 + \frac{1}{1{,}5} = 1{,}416667 \\ x_4 &= \frac{1}{2}(1{,}416667) + \frac{1}{1{,}416667} = 1{,}414216 \end{aligned}$$

Comprobamos que con 4 términos el error es del orden de 10^{-5}.

A partir de estos dos ejemplos está claro que es conveniente estudiar la velocidad de convergencia de las sucesiones.

B.3.1. Notación $o(x)$ y $O(x)$

Definición B.10 *Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones distintas.*

1. *Diremos que $x_n = O(y_n)$ (se lee x_n es una* O grande *de y_n) si y sólo si*

$$\exists M \geq 0,\ n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x_n| \leq M|y_n| \text{ si } n \geq n_0$$

Si $y_n \neq 0$, $\forall n$, podemos poner $\frac{|x_n|}{|y_n|} \leq M$ y el cociente está acotado cuando $n \to \infty$.

2. *Diremos que $x_n = o(y_n)$ (se lee x_n es una* O pequeña *de y_n) si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Estas notaciones permiten comparar la convergencia de dos sucesiones, siendo más frecuente su uso cuando ambas sucesiones convergen a 0. Supongamos que tanto x_n como y_n convergen a 0, entonces:

1. Si $x_n = O(y_n)$, entonces ambas sucesiones convergen con la misma rapidez a 0.

2. Si $x_n = o(y_n)$, entonces la sucesión x_n converge a 0 más rápido que y_n.

Ejemplo B.3 *Podemos comprobar fácilmente que*

$$a)\ \frac{n+1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b)\ \frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad c)\ \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

$$d)\ \frac{5}{n} + e^{-n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad e)\ e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Tomando como ejemplo el caso de la función $\ln(1+x)$, que vimos en la primera sección, tendremos

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Convergencia lenta}$$

$$e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k = O\left(\frac{1}{n!}\right) \qquad \text{Convergencia rápida}$$

También es posible utilizar esta notación para funciones, por ejemplo, podemos escribir

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right) \qquad \text{cuando } x \to 0$$

que significa que "cerca" del punto 0, ocurre $\left|\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq C\left|x^5\right|$.

Una ecuación de la forma

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \text{cuando } x \to \infty$$

significa que $\exists M, K \geq 0$, tal que si $x \geq K$, entonces $|f(x)| \leq M|g(x)|$, o en general podemos poner

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \text{cuando } x \to x_0$$

si

$$\exists \delta > 0, \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|$$

De forma semejante

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{cuando } x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

B.3.2. Órdenes de convergencia

Para describir la velocidad con la que una sucesión converge se utiliza la siguiente terminología. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Definición B.11 *Diremos que* $\{x_n\}$ *tiene:*

1. Convergencia lineal $\Leftrightarrow \exists\ \delta \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|x_{n+1} - \lambda| \leq \delta |x_n - \lambda| \qquad \forall n \geq n_0$$

2. Convergencia superlineal $\Leftrightarrow \exists \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|x_{n+1} - \lambda| \leq \varepsilon_n |x_n - \lambda| \qquad \forall n \geq n_0$$

3. Convergencia cuadrática $\Leftrightarrow \exists\ K > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|x_{n+1} - \lambda| \leq K |x_n - \lambda|^2 \qquad \forall n \geq n_0$$

4. Convergencia de orden al menos $\alpha > 1 \Leftrightarrow \exists\ K > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$|x_{n+1} - \lambda| \leq K |x_n - \lambda|^\alpha \qquad \forall n \geq n_0$$

Nota 9 *Cuanto mayor es el valor de* α*, más rápida es la convergencia de la sucesión* $\{x_n\}$.