AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2013/14

EXAMEN FINAL DE JUNIO. 18–6–2014

Teoría y Problemas

1. Contestar a las siguientes cuestiones:

   (a) **(0.5 puntos)** Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1, demostrar la fórmula

   $$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0),$$

   donde $\mathcal{L}[f](z)$ denota la transformada de Laplace de f.

   Solución: Utilizando la definición de transformada de Laplace sobre la función derivada:

   $$\mathcal{L}[f'](z) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt$$

   e integrando por partes

   $$u = e^{-zt} \quad \Rightarrow \quad du = -ze^{-zt} dt$$

   $$dv = f'(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad v = f(t)$$

   tendremos

   $$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = f(t) \cdot e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = \lim_{t\to\infty} f(t) \cdot e^{-zt} - f(0) + \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt$$

   el límite debe ser 0 o de otro modo no existiría transformada de Laplace ya que es el integrando de dicha transformada, y el término de la integral es precisamente la transformada de Laplace de la función $f(t)$

   $$\mathcal{L}[f'](z) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = -f(0) + \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = -f(0) + \mathcal{L}[f](z)$$

   (b) **(0.5 puntos)** Obtener las soluciones no nulas del problema

   $$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases}$$

   donde $l > 0$ es un número real.

   Solución: La solución de la Ecuación Diferencial depende del valor que tenga λ y para ello distinguimos 3 casos:

   - Caso I: $\lambda = 0$. Supongamos que $\lambda = 0$, entonces la ecuación diferencial será

     $$y''(t) = 0$$

     cuya solución general es de la forma

     $$y(t) = At + B$$

     Utilizando las condiciones de contorno

     $$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

     $$y(l) = 0 \Rightarrow A \cdot l + B = 0$$

     la solución del sistema anterior es: $A = B = 0$ y por tanto obtenemos la solución nula.

- Caso II: $\lambda < 0$. Supongamos ahora que λ es negativo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = -a^2$, con $a = \sqrt{|\lambda|}$. La ecuación diferencial sería

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \Rightarrow y''(t) - a^2 y(t) = 0$$

que tiene por solución general

$$y(t) = Ae^{at} + Be^{-at}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ y(l) &= 0 \Rightarrow Ae^{al} + Be^{-al} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas A y B. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{al} & e^{-al} \end{vmatrix} = e^{-al} - e^{al} = -2\operatorname{senh}(al)$$

y puesto que $\alpha \neq 0$ es no nulo y por tanto la única solución del sistema es la trivial $A = B = 0$ y obtenemos de nuevo la solución nula.

- Caso III: $\lambda > 0$. Finalmente supongamos que λ es positivo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = a^2$, con $a = \sqrt{\lambda}$. La ecuación diferencial sería

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \Rightarrow y''(t) + a^2 y(t) = 0$$

que tiene por solución general

$$y(t) = A\cos at + B\operatorname{sen} at$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ y(l) &= 0 \Rightarrow A\cos al + B\operatorname{sen} al = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$B\operatorname{sen} al = 0$$

Como buscamos una solución no nula, entonces $B \neq 0$ y

$$\operatorname{sen} al = 0 \Leftrightarrow al = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$a = \frac{n\pi}{l}$$

y,

$$\lambda = a^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \Rightarrow y_n(t) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Notar que el caso $n = 0$, nos conduce de nuevo a la solución trivial, luego supondremos $n \geq 1$.

(c) **(0.5 puntos)** Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, explicar qué harías para ver si dicho sistema es asintóticamente estable.

Solución: Podemos comprobar si el sistema es asintóticamente estable por tres métodos. El primero es utilizar los valores propios de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda - bc$$

El sistema será asintóticamente estable si y sólo si λ_1 y λ_2, las raíces de $p(\lambda)$, cumplen:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0 \qquad j = 1, 2$$

También podría comprobarse utilizando el teorema de los círculos de Gershgorim o el teorema de Routh-Hurwitz.

(d) **(0.5 puntos)** Demostrar que si $f(t)$ es una función 2–periodica e impar, entonces sus coeficientes de Fourier

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt = 0$$

para $n \geq 0$.

Solución: Si $f(t)$ es una función T-periódica, entonces tiene serie de Fourier y sus coeficientes a_n vienen dados por la expresión

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-T}^{T} f(t)\cos(n\pi t)dt$$

donde $T = L/2$, en este caso $L = 2$ y $T = 1$, por tanto

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt$$

para comprobar que esta integral es cero la dividimos en dos partes utilizando la aditividad de la integral

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)\cos(n\pi t)dt + \int_{0}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt$$

En la primera integral hacemos el cambio de variable $t = -s$ $(dt = -ds)$ y nos queda

$$a_n = \int_{1}^{0} f(-s)\cos(-n\pi s)(-ds) + \int_{0}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt$$

Como $f(t)$ es una función impar se cumple: $f(-s) = -f(s)$, mientras que la función coseno es par y por tanto $\cos(-n\pi s) = \cos(n\pi s)$, de donde

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{1}^{0} -f(s)\cos(n\pi s)(-ds) + \int_{0}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt = \\ &= \int_{1}^{0} f(s)\cos(n\pi s)ds + \int_{0}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt \end{aligned}$$

Si intercambiamos los extremos del intervalo de integración aparece un signo menos

$$a_n = -\int_0^1 f(s)\cos(n\pi s)ds + \int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)dt = 0$$

2. **(2 puntos)** Obtener la solución $y(t)$ del siguiente problema, cuando el tiempo t es suficientemente grande

$$\left\{ \begin{array}{l} y''' + 6y'' + 11y' + 6y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = 1234. \end{array} \right.$$

donde

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{rcc} 1 & \text{si} & t \in [0,1), \\ -1 & \text{si} & t \in [1,+\infty). \end{array} \right.$$

Solución: La respuesta más rápida es comprobar si el sistema es asintóticamente estable (A.E.), ya que en ese caso la solución del sistema para t suficientemente grande sería la solución particular. Para ello utilizamos el polinomio característico asociado a la ecuación homogénea

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

que tiene por raíces (Ruffini) a:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(\lambda_1) &=& -1 < 0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_2) &=& -2 < 0 \\ \mathrm{Re}(\lambda_3) &=& -3 < 0 \end{array}$$

y por tanto el sistema es AE y por tanto la respuesta para t suficientemente grandes sólo depende de la entrada, es decir, de la solución particular, además como para $t \to \infty$ la función $f(t)$ es constante e igual a -1, la respuesta será la solución particular de la EDO

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = -1$$

Como la entrada es constante, probaremos como solución particular la función

$$y_p(t) = A$$

Obviamente

$$y_p'''(t) = y_p''(t) = y_p'(t) = 0$$

y sustituyendo en la EDO

$$6y_p(t) = -1 \Rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{6}$$

Como alternativa (bastante más larga que esta) se indica la solución que se obtiene utilizando la Transformada de Laplace con esta ecuación:

- *Utilizando Linealidad:*

$$\mathcal{L}[y'''(t)](z) + 6\mathcal{L}[y''(t)](z) + 11\mathcal{L}[y'(t)](z) + 6\mathcal{L}[y(t)](z) = \mathcal{L}[f(t)](z) \quad (1)$$

- *Derivada de la función transformada:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[y(t)](z) &=& Y(z) \\ \mathcal{L}[y'(t)](z) &=& zY(z) - y(0) \\ \mathcal{L}[y''(t)](z) &=& z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}[y'''(t)](z) &=& z^3Y(z) - z^2y(0) - zy'(0) - y''(0) \end{array}$$

Usando las condiciones iniciales del problema

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y\left(t\right)\right]\left(z\right) &= Y\left(z\right) \\
\mathcal{L}\left[y'\left(t\right)\right]\left(z\right) &= zY\left(z\right) \\
\mathcal{L}\left[y''\left(t\right)\right]\left(z\right) &= z^2Y\left(z\right) \\
\mathcal{L}\left[y'''\left(t\right)\right]\left(z\right) &= z^3Y\left(z\right) - 1234
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación 1

$$\left(z^3Y\left(z\right) - 1234\right) + 6\left(z^2Y\left(z\right)\right) + 11\left(zY\left(z\right)\right) + 6Y\left(z\right) = \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right)$$

Para el cálculo de $\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right)$ teniendo en cuenta que utilizando la función de Heaviside $f\left(t\right)$ se puede expresar como

$$f\left(t\right) = 1\cdot\left(h_0\left(t\right) - h_1\left(t\right)\right) - 1\cdot h_1\left(t\right) = h_0\left(t\right) - 2h_1\left(t\right)$$

entonces

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) = \mathcal{L}\left[h_0\left(t\right) - 2h_1\left(t\right)\right]\left(z\right) = \mathcal{L}\left[h_0\left(t\right)\right]\left(z\right) - 2\mathcal{L}\left[h_1\left(t\right)\right]\left(z\right) = \frac{1}{z} - 2\frac{e^{-z}}{z}$$

También podríamos utilizar la definición directa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) &= \int_0^\infty f\left(t\right)e^{-zt}dt = \int_0^1 1\cdot e^{-zt}dt + \int_1^\infty (-1)\cdot e^{-zt}dt \\
&= -\frac{e^{-zt}}{z}\bigg|_{t=0}^{1} + \frac{e^{-zt}}{z}\bigg|_{t=1}^{t=\infty} \\
&= \left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-z}}{z}\right) + \left(0 - \frac{e^{-z}}{z}\right) \\
&= \frac{1}{z} - 2\frac{e^{-z}}{z}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\left(z^3 + 6z^2 + 11z + 6\right)Y\left(z\right) - 1234 = \frac{1}{z} - 2\frac{e^{-z}}{z}$$

Si despejamos $Y\left(z\right)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
Y\left(z\right) &= \frac{\left(\frac{1}{z} - 2\frac{e^{-z}}{z} + 1234\right)}{\left(z^3 + 6z^2 + 11z + 6\right)} \\
&= \frac{1}{z\left(z+1\right)\left(z+2\right)\left(z+3\right)} - \frac{2e^{-z}}{z\left(z+1\right)\left(z+2\right)\left(z+3\right)} + \frac{1234}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)\left(z+3\right)} \\
&= Y_1\left(z\right) + 2e^{-z}Y_1\left(z\right) + 1234Y_2\left(z\right)
\end{aligned}$$

Encontraremos $y\left(t\right)$ mediante la transformada inversa de Laplace

$$y\left(t\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y\left(z\right)\right]\left(t\right)$$

que por linealidad

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-z}Y_1(z)\right](t) + 1234\mathcal{L}^{-1}(Y_2(z))$$

y utilizando el 2^a teorema de traslación

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t) - 2h_1(t)\mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t-1) + 1234\mathcal{L}^{-1}(Y_2(z))$$

Calcularemos las inversas de $Y_1(z)$ y $Y_2(z)$ mediante la fórmula de inversión de Bromwich por residuos para obtener

$$y(t) = \sum_{z_k} \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), z_k\right)$$

Para $Y_1(z)$ las singularidades de $Y(z)$ son

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_1 &= -1 \Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_2 &= -2 \Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_3 &= -3 \Rightarrow \text{ Polo simple}
\end{aligned}$$

siendo los residuos para $Y_1(z)$ en esas singularidades

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_1(z), 0) = \lim_{z\to 0} \tfrac{1}{0!} z e^{zt}Y_1(z) = \lim_{z\to 0} e^{zt}\tfrac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \tfrac{1}{6}$$

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_1(z), -1) = \lim_{z\to -1} \tfrac{1}{0!}(z+1)e^{zt}Y_1(z) = \lim_{z\to -1} e^{zt}\tfrac{1}{z(z+2)(z+3)} = -\tfrac{e^{-t}}{2}$$

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_1(z), -2) = \lim_{z\to -2} \tfrac{1}{0!}(z+2)e^{zt}Y_1(z) = \lim_{z\to -2} e^{zt}\tfrac{1}{z(z+1)(z+3)} = \tfrac{e^{-2t}}{2}$$

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_1(z), -3) = \lim_{z\to -3} \tfrac{1}{0!}(z+3)e^{zt}Y_1(z) = \lim_{z\to -3} e^{zt}\tfrac{1}{z(z+1)(z+2)} = -\tfrac{e^{-3t}}{6}$$

Sumando los cuatro residuos obtenemos la función $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(z)](t)$

$$y_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{6}$$

El segundo término será por tanto

$$-2y_1(t-1)h_1(t) = -2\left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-t+1}}{2} + \frac{e^{-2t+2}}{2} - \frac{e^{-3t+2}}{6}\right)h_1(t)$$

Para el último término utilizamos de nuevo residuos. Para $Y_z(z)$ las singularidades de $Y(z)$ son

$$\begin{aligned}
z_1 &= -1 \Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_2 &= -2 \Rightarrow \text{ Polo simple} \\
z_3 &= -3 \Rightarrow \text{ Polo simple}
\end{aligned}$$

siendo los residuos para $Y_2(z)$ en esas singularidades

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_2(z), -1) = \lim_{z\to -1} \tfrac{1}{0!}(z+1)e^{zt}Y_2(z) = \lim_{z\to -1} e^{zt}\tfrac{1}{(z+2)(z+3)} = \tfrac{e^{-t}}{2}$$

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_2(z), -2) = \lim_{z\to -2} \tfrac{1}{0!}(z+2)e^{zt}Y_2(z) = \lim_{z\to -2} e^{zt}\tfrac{1}{(z+1)(z+3)} = -\tfrac{e^{-2t}}{1}$$

$$\operatorname{Res}(e^{zt}Y_2(z), -3) = \lim_{z\to -3} \tfrac{1}{0!}(z+3)e^{zt}Y_2(z) = \lim_{z\to -3} e^{zt}\tfrac{1}{(z+1)(z+2)} = \tfrac{e^{-3t}}{2}$$

Sumando los tres residuos obtenemos la función $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(z)](t)$

$$y_2(t) = \frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2}$$

La función buscada será la suma de todas

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{6}\right) - 2\left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-t+1}}{2} + \frac{e^{-2t+2}}{2} - \frac{e^{-3t+2}}{6}\right) h_1(t) + 1234\left(\frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2}\right)$$

Si ahora queremos saber cuál es el comportamiento cuando t es suficientemente grande, hacemos $t \to \infty$ y obtenemos la misma solución que antes, obviamente con muchos más cálculos:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$$

3. **(2 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ x \in (0,2), \ y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \ x \in (0,2), \\ u(0,y) = 0, \ y \in (0,1), \\ u(2,y) = \cos(6\pi y), \ y \in (0,1). \end{cases}$$

Solución: Se trata de un problema de Laplace con condiciones de contorno casi todas nulas, utilizaremos el único método conocido para resolver estas EDP: el método de separación de variables.

Supongamo entonces que la solución $u(x,y)$ puede ponerse como

$$u(x,y) = F(x)\, G(y)$$

por tanto

$$u_{xx} = F''(x)\, G(y)$$

$$u_{yy} = F(x)\, G''(y)$$

y sustituyendo en la ecuación de Laplace **??**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow F''(x)\, G(y) + F(x)\, G''(y) = 0$$

Obviamente la solución trivial $u \equiv 0$ es solución del problema, así que buscamos soluciones alternativas y supondremos que $F(x) \neq 0$ y $G(y) \neq 0$, por tanto

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}$$

Como una lado de la igualdad depende sólo de t y el otro depende sólo de x, ambos deben ser constantes

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

De 2 obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} F''(x) - \lambda F(x) &= 0 \\ G''(y) + \lambda G(y) &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno serían

$$\begin{aligned} u(x,0) &= F(x)\,G(0) = 0 \\ u(x,1) &= F(x)\,G(1) = 0 \end{aligned}$$

como x es arbitraria se deduce que

$$G(0) = G(1) = 0$$

La función $G(y)$ se obtiene resolviendo el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{c} G''(y) + \lambda G(y) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(1) = 0 \end{array} \right.$$

que es el mismo problema de contorno que se obtuvo en clase para la ecuación, de hecho es la misma ecuación que aparece en el ejercicio 1b para $l = 1$, por tanto, si queremos una solución no trivial (no idénticamente nula) los valores para λ y $G(y)$ serían

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} = n^2\pi^2 \text{ y } G(y) = B_n \operatorname{sen}(n\pi y)$$

Para estos valores λ_n y utilizando la otra ecuación diferencial

$$F''(x) - n^2\pi^2 F(x) = 0$$

cuya solución para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(x) = C_n e^{(n\pi x)} + D_n e^{(-n\pi x)} \qquad \text{con } C_n, D_n \in \mathbb{R}$$

Por la condición inicial $u(0,y) = 0$

$$u(0,y) = F(0)\,G(y) = 0$$

que para y arbitraria conduce a que

$$F(0) = 0$$

y por tanto

$$F_n(0) = C_n + D_n = 0 \Rightarrow D_n = -C_n$$

y la función $F_n(x)$ sería

$$F_n(x) = C_n\left(e^{(n\pi x)} - e^{(-n\pi x)}\right) = 2C_n \operatorname{senh}(n\pi x)$$

La solución de la EDP será, para cada n, de la forma

$$u_n(x,y) = F_n(x)\,G_n(y) = 2C_n \operatorname{senh}(n\pi x)\,B_n \operatorname{sen}(n\pi y) = c_n \operatorname{senh}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi y)$$

con $c_n = 2C_nB_n$. Por la linealidad de la Ecuación, cualquier combinación lineal de soluciones, es otra solución, por tanto podemos considerar como solución formal general a:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y)$$

y utilizando la última condición de contorno $u(2,y) = \cos(6\pi y)$

$$u(2,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}(2n\pi) \operatorname{sen}(n\pi y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen}(n\pi y) = \cos(6\pi y)$$

siendo $d_n = c_n \operatorname{senh}(2n\pi)$, los coeficientes del desarrollo en serie de la extensión impar 2-periódica de $\cos(6\pi y)$, es decir

$$d_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \cos(6\pi y) \operatorname{sen}(n\pi y)\, dy$$

Integral que se resuelve fácilmente teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right)$$

en este caso $a = n\pi y$ y $b = 6\pi y$

$$\begin{aligned} d_n &= 2\int_0^1 \cos(6\pi y)\operatorname{sen}(n\pi y)\, dy = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}([n+6]\pi y) + \operatorname{sen}([n-6]\pi y)\, dy\right) \\ &= \int_0^1 \operatorname{sen}([n+6]\pi y)\, dy + \int_0^1 \operatorname{sen}([n-6]\pi y)\, dy \end{aligned}$$

Si $n \neq 6$ la integral es inmediata (recuerda que $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{1}{[n+6]\pi}\cos([n+6]\pi y)\Big|_{y=0}^{y=1} + -\frac{1}{n-6}\cos([n-6]\pi y)\Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{[n+6]\pi}\left(1-(-1)^{n+6}\right) + \frac{1}{[n-6]\pi}\left(1-(-1)^{n-6}\right) \\ &= \frac{1}{[n+6]\pi}\left(1-(-1)^{n}\right) + \frac{1}{[n-6]\pi}\left(1-(-1)^{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{(n+6)\pi} + \frac{1}{(n-6)\pi}\right)\left(1-(-1)^n\right) \\ &= \frac{2n}{\pi(n^2-36)}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Para $n = 6$

$$\begin{aligned} d_6 &= 2\int_0^1 \cos(6\pi y)\operatorname{sen}(6\pi y)\, dy = \frac{1}{6\pi}\left(\int_0^1 6\pi\cdot 2\cdot\cos(6\pi y)\operatorname{sen}(6\pi y)\, dy\right) \\ &= \frac{1}{6\pi}\int_0^1 \frac{d}{dy}\left(\operatorname{sen}^2(6\pi y)\right) dy = \frac{1}{6\pi}\operatorname{sen}^2(6\pi y)\Big|_{y=0}^{y=1} = 0 \end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & xy+4yz+9z \\ \text{Sujeto a} & x+2y+3z\leq 1, \\ & x,y\geq 0, \end{array}$$

Solución: Expresamos en primer lugar el problema en la forma usual

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & xy+4yz+9z \\ \text{Sujeto a} & x+2y+3z-1\leq 0, \\ & -x,-y\leq 0, \end{array}$$

Utilizaremos ahora los multiplicadores para construir la función Lagrangiana

$$L\left(x,y,z\right)=xy+4yz+9z+\mu_1\left(x+2y+3z-1\right)+\mu_2\left(-x\right)+\mu_3\left(-y\right)$$

y planteremos las condiciones de KKT:

(a) *Condición Estacionaria*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\Leftrightarrow y+\mu_1-\mu_2=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0\Leftrightarrow x+4z+2\mu_1-\mu_3=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0\Leftrightarrow 4y+9+3\mu_1=0 \tag{5}$$

(b) *Condición de factibilidad*

$$\begin{aligned} x+2y+3z-1 &\leq 0, \\ -x &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

(c) *Condición de positividad*

$$\begin{aligned} \mu_1,\mu_2,\mu_3 &\geq 0\Rightarrow \text{ Para mínimo} \\ \mu_1,\mu_2,\mu_3 &\leq 0\Rightarrow \text{ Para máximo} \end{aligned}$$

(d) *Condición de holgura*

$$\mu_1 g_1\left(x\right) = 0\Leftrightarrow \mu_1\left(x+2y+3z-1\right)=0 \tag{6}$$

$$\mu_2 g_2\left(x\right) = 0\Leftrightarrow \mu_2\left(-x\right)=0 \tag{7}$$

$$\mu_3 g_3\left(x\right) = 0\Leftrightarrow \mu_3\left(-y\right)=0 \tag{8}$$

El sistema que hay que resolver estará formado por las ecuaciones 3, 4, 5, 6 , 7 y 8.

Utilizamos el proceso usual para resolver el sistema anterior empleando en primer lugar las condiciones de holgura 6 y 7. Se distinguen ocho casos:

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_3 = 0 & \text{Caso I} \\ y = 0 & \text{Caso II} \end{cases} \\ x = 0 \Longrightarrow & \begin{cases} \mu_3 = 0 & \text{Caso III} \\ y = 0 & \text{Caso IV} \end{cases} \end{cases} \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_2 = 0 & \Longrightarrow \begin{cases} \mu_3 = 0 & \text{Caso V} \\ y = 0 & \text{Caso VI} \end{cases} \\ x = 0 \Longrightarrow & \begin{cases} \mu_3 = 0 & \text{Caso VII} \\ y = 0 & \text{Caso VIII} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos cada uno de forma independiente:

(a) **Casos I, II, III y IV:** $(\mu_1 = 0)$**:** Si $\mu_1 = 0$, entonces de la ecuación 5

$$4y + 9 + 3\mu_1 = 0 \Rightarrow 4y + 9 = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{4} < 0$$

y no se cumpliría la restricción $y \geq 0$, por tanto, ninguno de estos casos se debe tener en cuenta.

(b) **Caso V** $(x + 2y + 3z - 1 = 0,\ \mu_2 = \mu_3 = 0)$**:** El sistema queda

$$y + \mu_1 = 0 \tag{9}$$

$$x + 4z + 2\mu_1 = 0 \tag{10}$$

$$4y + 9 + 3\mu_1 = 0 \tag{11}$$

$$x + 2y + 3z - 1 = 0 \tag{12}$$

De 9 obtenemos

$$\mu_1 = -y$$

y sustituyendo en 11

$$4y + 9 + 3(-y) = 0 \Rightarrow y = -9 < 0$$

por se incumple la restricción $y > 0$ y el caso se descarta.

(c) **Caso VI** $(x+2y+3z-1=0,\ \mu_2=y=0)$**:** El sistema queda

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \qquad (13)\\ x+4z+2\mu_1-\mu_3 &= 0\\ 9+3\mu_1 &= 0\\ x+2y+3z-1 &= 0 \end{aligned}$$

Pero ya se ha visto que $\mu_1 \neq 0$.

(d) **Caso VII** $(x+2y+3z-1=0,\ x=\mu_3=0)$**:** El sistema queda

$$y+\mu_1-\mu_2 = 0 \qquad (14)$$

$$4z+2\mu_1 = 0 \qquad (15)$$

$$4y+9+3\mu_1 = 0 \qquad (16)$$

$$2y+3z-1 = 0 \qquad (17)$$

De 15 obtenemos

$$\mu_1 = -2z$$

y sustituyendo en 16

$$4y+9+3(-2z)=0 \Rightarrow 4y-6z=-9$$

que junto con 17 forman un sistema lineal, que podemos resolver fácilmente por reducción para obtener la solución

$$\begin{aligned} y &= -\frac{11}{8} < 0\\ z &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

que no es factible puesto que $y<0$.

(e) **Caso VIII** $(x+2y+3z-1=0,\ x=y=0)$**:** El sistema queda

$$\mu_1-\mu_2 = 0 \qquad (18)$$

$$4z+2\mu_1-\mu_3 = 0 \qquad (19)$$

$$9+3\mu_1 = 0 \qquad (20)$$

$$3z-1 = 0 \qquad (21)$$

De 20 obtenemos

$$\mu_1 = -3$$

De 21 obtenemos

$$z = \frac{1}{3}$$

De 18 obtenemos

$$\mu_1 = \mu_2 = -3$$

y finalmente de 19 obtenemos

$$\mu_3 = 4z + 2\mu_1 = \frac{4}{3} - 6 = -\frac{14}{3}$$

Después de evaluar todos los casos, hemos obtenido un único punto

$$P = (0, 0, 3) \qquad \mu = \left(-3, -3, -\frac{14}{3}\right)$$

Podemos comprobar si se cumplen las condiciones de segundo orden en ese punto, que por el signo de los multiplicadores, podría ser de máximo. Teniendo en cuenta que todas las restricciones son lineales, la matriz HL será

$$HL = Hf + \mu_1 Hg_1 + \mu_2 Hg_2 + \mu_3 Hg_3 = Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

que es constante en todos los puntos, luego

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio tangente en este punto viene descrito por todas las restricciones del problema, ya que todas son activas en él. El espacio tangente vendrá descrito por los gradientes de estas restricciones en el punto

$$\begin{aligned} \nabla g_1 &= (1, 2, 3) \\ \nabla g_2 &= (-1, 0, 0) \\ \nabla g_3 &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

y sería

$$\begin{aligned} M(P) &= \left\{ (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, (d_1, d_2, d_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right. \\ &= \left\{ (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 0; -d_1 = 0, -d_2 = 0 \right\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

y además coincide con el espacio tangente ampliado puesto que no hay restricciones degeneradas, todos los multiplicadores son distintos de 0. Como se ha comprobado el espacio tangente está formado sólo por el vector nulo, luego la matriz HL es nula sobre M(P), así que no se pueden aplicar las condiciones suficientes de segundo orden. Podríamos decir que P es un posible máximo local de la función.