sAMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2012/13
GRADO DE INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES
EXAMEN FINAL DE JUNIO. 22–6–2013

1. (2 puntos) Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x,y,z) \\ \text{Sujeto a} & h(x,y,z)=0 \\ & g(x,y,z)\le 0 \end{array}$$

donde f, g y h son funciones definidas en R^3 suficientemente derivables. Explicar los pasos que hay que seguir para asegurar que un punto $(x_0,y_0,z_0)\in R^3$ es solución local de dicho problema. En la explicación habrán de definirse todos los conceptos propios de optimización que se necesiten.

Solución: (Pregunta teórica): Sea $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ y supongamos que es una solución local del problema, es decir P_0 es un punto de máximo local para el problema del enunciado.

En primer lugar habría que estudiar la regularidad del punto. Si P_0 es regular (*hay que dar la definición*), teniendo en cuenta que es máximo local y que las funciones del problema son suficientemente derivables, debe cumplir las **Condiciones Necesarias de Primer y Segundo orden**, es decir, debe ser un punto de Karush-Kuhn-Tucker de máximo y cumplir además la condición del Hessiano. Puesto que hay una restricción de igualdad y otra de desigualdad, esto implica que deben existir valores reales λ_0 y μ_0 (los subíndice indican su relación con el punto P_0), de forma que el punto $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ es solución del sistema formado por la condición estacionaria, la condición de factibilidad para la igualdad y la condición de holgura para la desigualdad:

$$\text{Condición estacionaria}\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial h(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial x}+\mu\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial h(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial y}+\mu\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial z}+\lambda\frac{\partial h(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial z}+\mu\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}{\partial z}=0 \end{array}\right.$$

$$\text{Condición factibilidad}\left\{\ h(x_0,y_0,z_0)=0\right.$$

$$\text{Condición de holgura}\left\{\ \mu\cdot g(x_0,y_0,z_0)=0\right.$$

Así pues, una vez comprobado que P_0 es un punto regular, hay que comprobar que los valores $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ son solución del sistema anterior, y como en el enunciado se indica que P_0 es un máximo, entonces deben cumplirse además las siguientes desigualdades:

$$\text{Condición factibilidad}\left\{\ g(x_0,y_0,z_0)\le 0\right.$$

$$\text{Condición de signo}\left\{\ \mu\le 0\right.$$

Como todas las funciones son suficientemente derivables, también se debe cumplir la condición de segundo orden relativa al Hessiano. Calculamos la matriz $HL(P_0)=Hf(P_0)+\lambda Hh(P_0)+\mu Hg(P_0)$

$$HL(P_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 h(P_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 g(P_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

que debe ser semidefinida negativa (*definir qué significa semidefinida negativa sobre un conjunto*) sobre el espacio tangente $M(P_0)$.

La definición del conjunto $M(P_0)$ dependerá de si la restricción de desigualdad es activa o no (*definición de restricción activa*) en el punto P_0. En el primer caso $M(P_0)$ estaría definido como:

$$M(P_0) = \{\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R} \mid \quad \nabla h(P_0) \cdot \mathbf{d} = 0, \nabla g(P_0) \cdot \mathbf{d} = 0\}$$

mientras que en el caso de que g no fuera activa el conjunto estaría definido por:

$$M(P_0) = \{\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R} \mid \quad \nabla h(P_0) \cdot \mathbf{d} = 0\}$$

2. (2 puntos) Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} & t > 0 \quad 0 < y < 2 \\ u(0, y) = 0 & 0 < y < 2 \\ u(t, 0) = u(t, 2) = 1 & t > 0 \end{cases}$$

Solución: Se trata de la ecuación del calor con condiciones de contorno constantes, pero no nulas, por tanto hay que transformar previamente dicho problema en uno con condiciones de contorno nulas. Dicho cambio (visto en clase) sería de la forma general siguiente:

$$v(t, y) = u(t, y) - b + \frac{y}{L}(b - c)$$

siendo $u(t, 0) = b$ y $u(t, L) = c$. En este caso $b = c = 1$ y el cambio queda como

$$v(t, y) = u(t, y) - 1$$

La condición inicial se transforma en

$$v(0, y) = u(0, y) - 1 = -1$$

y el problema queda como:

$$\begin{cases} v_t = v_{yy} & t > 0 \quad 0 < y < 2 \\ v(0, y) = -1 & 0 < y < 2 \\ v(t, 0) = v(t, 2) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve mediante el método de separación de variables, suponiendo que la solución $v(t, y)$ pueda ponerse como producto de funciones de la forma

$$v(t, y) = F(t)\, G(y)$$

Este problema es el mismo que se ha resuelto en teoría, por tanto, si bien podemos seguir el método paso a paso, por abreviar utilizaremos la expresión allí obtenida para la solución formal del problema:

$$v(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} y\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Para este problema, los valores de los parámetros son $\alpha = 1$, $L = 2$; sustituyendo en la expresión anterior

$$v(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} y\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4} t}$$

Las constantes c_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función $f(y) = v(0, y) = -1$ y están definidos como:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy = -\int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} y\right) dy$$

La integra es inmediata

$$\int_0^2 -\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right) dy = \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 2m, \text{ par} \\ \frac{-4}{n\pi} & \text{Si } n = 2m-1, \text{ impar} \end{cases}$$

y la solución formal del problema sería:

$$v\left(t,y\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}y\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{\left(2m-1\right)\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\left(2m-1\right)\pi}{2}y\right)e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4}t}$$

de donde obtendremos la expresión para $u\left(t,y\right)$

$$u\left(t,y\right) = v\left(t,y\right) + 1 = 1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\left(2m-1\right)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\left(2m-1\right)\pi}{2}y\right)e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4}t}$$

3. (2 puntos) Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales haciendo uso de la transformada de Laplace

$$\begin{cases} x' = 2x - y - h_3\left(t\right), \\ y' = x + 2y + h_1\left(t\right)\cdot t, \\ x(0) = 0; y(0) = 0. \end{cases}$$

donde $h_a\left(t\right)$ es la función de Heaviside.

Solución: Podemos resolver el problema de forma matricial o mediante sustitución. Si elegimos la primera forma, entonces el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - y - h_3\left(t\right), \\ y' = x + 2y + h_1\left(t\right)\cdot t, \\ x(0) = 0; y(0) = 0. \end{cases}$$

se puede poner como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h_3\left(t\right) \\ h_1\left(t\right)\cdot t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'\left(t\right) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\left(t\right) + \mathbf{B}\left(t\right)$$

Utilizando la transformada de Laplace y reemplazando por comodidad $\mathcal{L}\left[\mathbf{X}\left(t\right)\right]\left(z\right)$ por $\mathbf{X}\left(z\right)$, tendremos, utilizando que las condiciones iniciales son nulas:

$$z\cdot\mathbf{X}\left(z\right) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\left(z\right) + \mathbf{B}\left(z\right) \Rightarrow \left(z\cdot\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X}\left(z\right) = \mathbf{B}\left(z\right) \Rightarrow \mathbf{X}\left(z\right) = \left(z\cdot\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\left(z\right)$$

siendo

$$\left(z\cdot\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 & 1 \\ -1 & z-2 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$\left(z\cdot\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(z-2\right)^2 + 1}\begin{pmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z-2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte $\mathbf{B}\left(z\right)$ es el vector que contiene la transformada de Laplace de $\mathbf{B}\left(t\right)$

$$\mathbf{B}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -h_3\left(t\right) \\ h_1\left(t\right)\cdot t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}\left(z\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left[-h_3\left(t\right)\right]\left(z\right) \\ \mathcal{L}\left[h_1\left(t\right)\cdot t\right]\left(z\right) \end{pmatrix}$$

Calculamos cada transformada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[-h_3\left(t\right)\right]\left(z\right) &= -e^{-3z}\mathcal{L}\left[h_0\left(t\right)\right]\left(z\right) = -\frac{e^{-3z}}{z} \\ \mathcal{L}\left[t\cdot h_1\left(t\right)\right]\left(z\right) &= -\frac{d}{dz}\mathcal{L}\left[h_1\left(t\right)\right]\left(z\right) = -\frac{d}{dz}\left[e^{-z}\mathcal{L}\left[h_0\left(t\right)\right]\left(z\right)\right] = -\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-z}}{z}\right] = -\left[\frac{-e^{-z}z - e^{-z}}{z^2}\right] = \frac{e^{-z}\left(z+1\right.}{z^2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(z) &= \frac{1}{(z-2)^2+1}\begin{pmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{e^{-3z}}{z} \\ \frac{e^{-z}(z+1)}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(z-2)^2+1}\begin{pmatrix} -(z-2)\frac{e^{-3z}}{z} - \frac{e^{-z}(z+1)}{z^2} \\ -\frac{e^{-3z}}{z} + (z-2)\frac{e^{-z}(z+1)}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{(z-2)}{((z-2)^2+1)z}e^{-3z} - \frac{(z+1)}{((z-2)^2+1)z^2}e^{-z} \\ -\frac{1}{((z-2)^2+1)z}e^{-3z} + \frac{(z+1)(z-2)}{((z-2)^2+1)z^2}e^{-z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y ahora podemos obtener $x(t)$ e $y(t)$ utilizando la transformada inversa

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z}e^{-3z} - \frac{(z+1)}{\left((z-2)^2+1\right)z^2}e^{-z}\right](t) \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{\left((z-2)^2+1\right)z}e^{-3z} + \frac{(z+1)(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z^2}e^{-z}\right](t)
\end{aligned}$$

Utilizaremos residuos y el segundo teorema de traslación de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z}e^{-3z} - \frac{(z+1)}{\left((z-2)^2+1\right)z^2}e^{-z}\right](t) \\
&= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z}e^{-3z}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(z+1)}{\left((z-2)^2+1\right)z^2}e^{-z}\right](t) \\
&= -h_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z}\right](t-3) - h_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(z+1)}{\left((z-2)^2+1\right)z^2}\right](t-1)
\end{aligned}$$

Para cada término de la expresión anterior

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z}\right](t) = \mathrm{Res}\left(e^{zt}\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z},0\right) + \mathrm{Res}\left(e^{zt}\frac{(z-2)}{\left((z-2)^2+1\right)z},0\right) + \mathrm{Res}\left(e^{zt}\frac{(z-}{\left((z-2)^{}\right.}\right.$$

4. (2 punto) Dada la función $f(x) = \cos(2x)$, se pide:

   (a) Determinar si dicha función es periódica y, en caso afirmativo, determinar cuál es el periodo (denotado a partir de ahora $2L$) de la misma y obtener el desarrollo en serie de Fourier de dicha función sobre su periodo.

   (b) Sea ahora $g(x)$ la función impar $2L$ periódica tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [0, L]$. Determinar el desarrollo en serie de Fourier de $g(x)$.

   (c) Sea ahora $h(x)$ la función par $2L$ periódica tal que $h(x) = f(x)$ para $x \in [0, L]$. Determinar el desarrollo en serie de Fourier de $h(x)$.

   (d) ¿Coinciden los resultados de los apartados a, b y c? Si es así, ¿por qué coinciden? Si no coinciden, ¿por qué no lo hacen?

Solución: Resolvemos cada apartado.

(a) Evidentemente $f(x)$ es una función periódica; su periodo T será

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(2(x+T)) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x+2T) = \cos(2x)$$

y por tanto

$$2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$$

ya que $\cos(x)$ es una función periódica de periodo 2π.
La función $f(x)$ es periódica de periodo π y su serie de Fourier será tomando $2L = \pi$

$$S(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nx)$$

Identificando la función con su serie de Fourier

$$\cos(2x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nx)$$

se comprueba fácilmente que si tomamos los siguientes valores para los coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \quad n \neq 1 \\ a_1 &= 1 \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

se da la identidad y por tanto la serie de Fourier de $f(x)$ es ella misma.

(b) La serie de Fourier de $g(x)$ será

$$S(g(x)) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \operatorname{sen}(2nx)$$

Como $g(x)$ es impar

$$\begin{aligned} a'_0 &= 0 \\ a'_n &= 0 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} b'_n &= \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\operatorname{sen}(2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2nx+2x) + \operatorname{sen}(2nx-2x)\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}(2x(n+1)) + \operatorname{sen}(2x(n-1))\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x(n+1))\,dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x(n-1))\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(I_1(n) + I_2(n)\right) \end{aligned}$$

Para la primera integral

$$I_1(n) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x(n+1))\,dx = -\left.\frac{\cos(2x(n+1))}{2(n+1)}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2(n+1)}\left(1-(-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{2(n+1)}(1+($$

mientras que para la segunda, tenemos que considerar de forma aislada el caso $n = 1$

$$\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow I_2(1) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x(n-1))\,dx = \int_0^{\pi/2} 0 dx = 0 \\
n &\neq 1 \Rightarrow I_2(n) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x(n-1))\,dx == -\left.\frac{\cos(2x(n-1))}{2(n-1)}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2(n-1)}\left(1-(-1)^{n-1}\right) = \frac{}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto para $n = 1$

$$b_1' = I_1(1) + I_2(1) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2(1+1)}\left(1+(-1)^1\right)+0\right) = 0$$

y para $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
b_n' &= I_1(n) + I_2(n) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2(n+1)}(1+(-1)^n) + \frac{1}{2(n-1)}(1+(-1)^n)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}(1+(-1)^n)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{2n(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}
\end{aligned}$$

(c) Aunque no es necesario como veremos después, la serie de Fourier de $h(x)$ será

$$S(h(x)) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n'' \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' \cos(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n'' \operatorname{sen}(2nx)$$

Como $h(x)$ es par

$$b_n'' = 0$$

mientras que

$$\begin{aligned}
a_n'' &= \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\cos(2nx+2x)+\cos(2nx-2x)\right]dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\cos(2x(n+1))+\cos(2x(n-1))\right]dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos(2x(n+1))\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos(2x(n-1))\,dx\right) = \frac{2}{\pi}(I_1(n)+I_2(n))
\end{aligned}$$

Para la primera integral

$$I_1(n) = \int_0^{\pi/2}\cos(2x(n+1))\,dx = \left.\frac{\operatorname{sen}(2x(n+1))}{2(n+1)}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} = 0$$

mientras que para la segunda, tenemos que considerar de forma aislada el caso $n = 1$

$$\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow I_2(1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2x(n-1))\,dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2} \\
n &\neq 1 \Rightarrow I_2(n) = \int_0^{\pi/2}\cos(2x(n-1))\,dx == \left.\frac{\operatorname{sen}(2x(n-1))}{2(n-1)}\right|_{x=0}^{x=\pi/2} = 0
\end{aligned}$$

Por tanto para $n = 1$

$$a_1'' = I_1(1) + I_2(1) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

y para $n \neq 1$

$$a_n'' = I_1(n) + I_2(n) = \frac{2}{\pi}(0 + 0) = 0$$

Finalmente para a_0

$$a_0'' = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\,dx = \frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 0$$

por tanto

$$S(h(x)) = \cos(2x)$$

que era de esperar, puesto que la función $f(x)$ era una función par.

(d) Coinciden los apartados a y c, puesto que la función $f(x)$ es una función par y periódica, por tanto su extensión par es ella misma. Ambos apartados deben ser distintos a b, puesto que en este caso se ha definido la extensión impar de la función.