AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2012/13

EXAMEN FINAL DE ENERO. 22–1–2013

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Grupo: Mañana/Tarde (Táchese lo que no proceda).

1. **(20 puntos)** Explicar qué es la transformada de Fourier de una función real f, bajo qué condiciones puede existir y cual es su relación con la transformada de Laplace. Indicar asímismo las propiedades básicas de la transformada de Fourier.

Solución. Teoría.

2. **(20 puntos)** Determinar la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= [h_0(t) - h_3(t)]t, \\ y(0) &= y'(0) = \pi. \end{aligned}$$

para tiempos suficientemente grandes, donde $h_a(t)$ denota la función de Heaviside.

Solución. La ecuación característica es $t^2 + 2t + 2 = 0$, que tiene por solución $-1 \pm i$, que tiene parte real negativa por lo que el sistema es asintóticamente estable y la solución a largo plazo sólo depende de la solución particular. Como la función $[h_0(t) - h_3(t)]t$ es idénticamente nula para $t > 3$, tenemos que la solución para tiempos grandes es nula.

3. **(20 puntos)**

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ t > 0, \ x \in (0, 2\pi), \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0, \ t > 0, \\ u(0, x) = \operatorname{sen} x, \ x \in (0, 2\pi), \\ u_t(0, x) = \operatorname{sen} x, \ x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Solución: Proponemos una solución de la forma $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$, que junto a las condiciones iniciales nos proporciona el problema de contorno,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(2\pi) = 0, \end{cases}$$

que proporciona soluciones no nulas solo si $\lambda_n = (n/2)^2$, $n \in \mathbb{N}$, siendo éstas de la forma

$$X_n(x) = \sin(nx/2).$$

Resolviendo la ecuación para T, que es de la forma

$$T'' + (n/2)^2 T = 0,$$

obtenemos las soluciones

$$T_n(t) = a_n \cos(nt/2) + b_n \sin(nt/2).$$

Planteamos la solución en serie

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt/2) + b_n \sin(nt/2)) \sin(nx/2).$$

De la primera condición inicial

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx/2) = \sin x,$$

por lo que $a_n = 0$ si $n \neq 2$ y $a_2 = 1$. Por otra parte, derivando formalmente la serie anterior obtenemos

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n}{2} \sin(nt/2) + b_n \frac{n}{2} \cos(nt/2) \right) \sin(nx),$$

y de la segunda condición inicial

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n}{2} \sin(nx/2) = \sin x,$$

por lo que $b_n = 0$ si $n \neq 2$ y $b_2 = 1$. Así, la solución es

$$u(t,x) = [\cos(t) + \sin(t)] \sin x.$$

4. **(20 puntos)** Resuelva el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x + 2y + 3z \\ \text{Sujeto a} & x + y + z \leq -1. \\ & x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$

Solución: Démonos cuenta en primer lugar que si la desigualdad no está activa, el vector $(2x, 2y, 0)$ es no nulo en el conjunto factible, y cuando está activa, los vectores $(2x, 2y, 0)$ y $(1, 1, 1)$ son siempre linealmente independientes. Así, todos los puntos del conjunto factible son regulares. Planteamos el Lagraniano

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 2y + 3z + \mu(x + y + z + 1) + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

junto con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \mu + 2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2 + \mu + 2y\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3 + \mu = 0, \end{aligned}$$

junto con

$$x^2 + y^2 = 1,$$

y la condición de holgura

$$\mu(x + y + z + 1) = 0.$$

De la tercera ecuación tenemos que $\mu = -3$, por lo que la desigualdad siempre ha de estar activa, esto es

$$x + y + z + 1 = 0.$$

Además, sólo podemos tener máximos en el problema. Despejando en las dos primeras ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x &= 1/\lambda, \\ y &= 1/(2\lambda), \end{aligned}$$

y sustituyendo en la cuarta obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1,$$

de donde

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2},$$

de donde obtenemos las posibles soluciones

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1-\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{2},-3\right)$$
$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{2},-3\right).$$

La primera no es posible como máximo ya que, como puede comprobarse fácilmente, el Hessiano en dicho punto es semidefinido positivo, por lo que nos quedamos con la segunda. El Hessiano de L es

$$HL(x,y,z,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y particularizado en nuestro punto sería

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El espacio tangente a dicho punto viene dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} &= 0,\\ (1,1,1)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

que dan lugar al espacio tangente

$$\begin{aligned}M\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{2},-3\right) &= \{(x,y,z):2x+y=0,x+y+z=0\}\\ &= \{(x,2x,-3x):x\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Si calculamos

$$\begin{aligned}(x,2x,-3x)\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -3x \end{pmatrix} &= (x,2x,-3x)\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{5}x \\ -2\sqrt{5}x \\ 0 \end{pmatrix}\\ &= -5\sqrt{5}x^2<0,\end{aligned}$$

por lo que el Hessiano es definido negativo sobre el espacio tangente y por tanto $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{2},-3\right)$ es máximo.