AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2011/12
GRADO DE INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

EXAMEN FINAL DE JUNIO. 25–6–2012

1. **(20 puntos)** Dada la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

explicar cómo la resolverías formalmente utilizando el método de separación de variables, explicando además en que consiste dicho método.

2. **(20 puntos)** Dado el sistema definido por el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 25y = \operatorname{sen}(3t), \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1, \end{cases}$$

se pide:

(a) Demostrar que el sistema es asintóticamente estable.

(b) Encontrar la respuesta al sistema en la fase estacionaria, es decir, cuando el tiempo es suficientemente grande.

3. **(20 puntos)** Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales haciendo uso de la transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t\cos t, \\ y(0) = 0; y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. **(20 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & x + y + z \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 = 1, \\ & 3x + 2z \leq 1. \end{array}$$

$\boxed{\text{Solución}}$

1. **(Pregunta teórica cuya solución reproducimos)** Recordemos que la ecuación del calor describe la variación de la temperatura en una región a lo largo del tiempo y que en el caso de una dimensión describiría la temperatura en una barra de longitud L y se expresaría como

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & t > 0 \quad x \in (0, L) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

La ecuación se resuelve mediante el método de separación de variables, suponiendo que la solución solución $u(t,x)$ puede ponerse como

$$u(t,x) = F(t)\,G(x)$$

por tanto

$$\begin{aligned} u_t &= F'(t)\,G(x) \\ u_x &= F(t)\,G'(x) \\ u_{xx} &= F(t)\,G''(x) \end{aligned}$$

que transforma la EDP del calor en

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \Leftrightarrow F'(t)\,G(x) = \alpha^2 F(t)\,G''(x)$$

Obviamente la solución trivial $u \equiv 0$ es solución de la EDP, pero salvo que $f(x) = 0$, esta soluciónno cumplirá la condición inicial del problema, así que buscaremos soluciones alternativas y supondremos que $F(t) \neq 0$ y $G(x) \neq 0$, por tanto se puede dividir por ellas

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}$$

Como una lado de la igualdad depende sólo de t y el otro depende sólo de x, ambos deben ser constantes

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Se elige el signo menos por convención, aunque se puede desarrollar sin esta consideración).

De 1 obtenemos dos ecuaciones diferenciales y utilizando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(t,0) &= F(t)\,G(0) = 0 \\ u(t,L) &= F(t)\,G(L) = 0 \end{aligned}$$

como t es arbitraria se deduce que

$$G(0) = G(L) = 0$$

Tendremos el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{c} G''(x) + \lambda G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(L) = 0 \end{array} \right.$$

cuya solución depende del valor de λ.

(a) **Caso I:** $\lambda = 0$. Supongamos que $\lambda = 0$, entonces la ecuación diferencial será

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) = 0$$

cuya solución general es de la forma

$$G(x) = Ax + B$$

Utilizando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ G(L) &= 0 \Rightarrow A \cdot L + B = 0 \end{aligned}$$

como $L \neq 0$, la solución del sistema anterior es: $A = B = 0$, y por tanto obtenemos de nuevo la solución trivial nula.

(b) **Caso II:** $\lambda < 0$. Supongamos ahora que λ es negativo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = -a^2$, con $a = \sqrt{|\lambda|}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) - a^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ G(L) &= 0 \Rightarrow Ae^{aL} + Be^{-aL} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas A y B. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{aL} & e^{-aL} \end{vmatrix} = e^{-aL} - e^{aL} = -2\operatorname{senh}(aL)$$

y puesto que $\alpha \neq 0$ es no nulo y por tanto la única solución del sistema es la trivial $A = B = 0$ y obtenemos de nuevo la solución trivial.

(c) **Caso III:** $\lambda > 0$. Supongamos ahora que λ es positivo, y por tanto lo podemos poner de la forma $\lambda = a^2$, con $a = \sqrt{\lambda}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) + a^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = A\cos ax + B\operatorname{sen} ax$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ G(L) &= 0 \Rightarrow A\cos aL + B\operatorname{sen} aL = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$B\operatorname{sen} aL = 0$$

Como buscamos una solución no trivial, entonces $B \neq 0$ y

$$\operatorname{sen} aL = 0 \Leftrightarrow aL = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$a = \frac{n\pi}{L}$$

y,

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow G_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Notar que el caso $n = 0$, nos conduce de nuevo a la solución trivial, luego supondremos $n \geq 1$. Para estos valores λ_n y utilizando la otra ecuación diferencial

$$F'(t) + \alpha^2 a^2 F(t) = 0 \Rightarrow F'(t) + \alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} F(t) = 0$$

cuya solución para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(t) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \qquad A_n \in \mathbb{R}$$

La solución de la EDP será para cada n de la forma

$$u_n(t,x) = F_n(t) G_n(x) = A_n B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

con $c_n = A_n B_n$. Por la linealidad de la Ecuación, cualquier combinación lineal de soluciones, es solución, por tanto podemos considerar como solución general formal a

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

y utilizando la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ se obtiene

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$$

La condición inicial $u(0,x) = f(x)$ nos da

$$u(0,x) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$$

Los coeficientes c_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función $f(x)$, es decir, si $f(x)$ está definida en $[0, L]$ y hacemos la extensión impar periódica de $f(x)$ entonces

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

La solución para el problema general de la ecuación de Calor con condiciones de contorno nulas sería

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

2. Dado el sistema

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 25y = \operatorname{sen}(3t), \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1, \end{cases}$$

(a) Podemos utilizar la función de transferencia o el polinomio característico. La función de transferencia viene dada por

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 25}$$

y sus polos serían

$$z^2 + 6z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{-6 + 8i}{2} = -3 + 4i \\[2ex] z_1 = \dfrac{-6 - 8i}{2} = -3 - 4i \end{cases}$$

Puesto que $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) = -3 < 0 \Rightarrow$ El sistema es asintóticamente estable.

(b) **(Opción 1)** Para el cálculo de la respuesta en régimen estacionario, cuando t es grande, podemos emplear la propiedad de estos sistemas para entradas sinusoidales

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow y(t) = A\,|T(i\omega)|\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi + Arg(T(i\omega)))$$

donde $T(z)$ es la función de transferencia y en este caso

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ \omega &= 3 \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$x(t) = \mathrm{sen}\,3t \Rightarrow y(t) = |T(3i)|\,\mathrm{sen}(3t + Arg(T(3i)))$$

La función de transferencia la hemos utilizado en el apartado anterior y por tanto

$$T(3i) = \frac{1}{(3i)^2 + 6(3i) + 25} = \frac{1}{-9 + 18i + 25} = \frac{1}{16 + 18i} = \frac{4}{145} - \frac{9}{290}i$$

de donde

$$|T(3i)| = \sqrt{\left(\frac{4}{145}\right)^2 + \left(-\frac{9}{290}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{21025} + \frac{81}{84\,100}} = \frac{\sqrt{145}}{290}$$

y

$$Arg(T(3i)) = \arctan\frac{-9/290}{4/145} = \arctan -\frac{9}{8}$$

y la respuesta estacionaria sería

$$y(t) = \frac{\sqrt{145}}{290}\,\mathrm{sen}\left(3t + \arctan -\frac{9}{8}\right)$$

(Opción 2) Aunque más laborioso y extenso, también podemos utilizar la transformada de Laplace. Para la función $\mathrm{sen}\,3t$ tenemos

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}\,t](z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}[\mathrm{sen}\,3t](z) = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\mathrm{sen}\,t]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{z}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{z^2+9}$$

Por tanto, después de emplear las propiedades de linealidad y derivación a la ecuación, obtendremos:

$$Y(z)\left(z^2 + 6z + 25\right) - (zy_0 + y_1) - y_0 = \frac{3}{z^2+9}$$

de donde

$$Y(z) = \frac{\frac{3}{z^2+9} + (zy_0 + y_1) + y_0}{z^2 + 6z + 25} = \frac{3}{(z^2+9)(z^2+6z+25)} + \frac{(zy_0 + y_1) + y_0}{(z^2+6z+25)}$$

Para calcular $y(t)$ debemos tomar la transformada Inversa de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(z^2+9)(z^2+6z+25)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(zy_0 + y_1) + y_0}{(z^2+6z+25)}\right](t)$$

Como el sistema es asintóticamente estable y queremos estudiar qué le ocurre cuando el valor de t es grande, entonces este resultado es independiente de las condiciones iniciales y las podemos tomar nulas

$$y_0 = y_1 = 0$$

y la expresión anterior se reduce notablemente

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(z^2+9)(z^2+6z+25)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(z+3i)(z-3i)(z+3-4i)(z+3+4i)}\right](t)$$

que podemos calcular mediante residuos

$$y(t) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), 3i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(s), -3i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(s), -3+4i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(s), -3-4i\right)$$

Para $3i$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), 3i\right) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)e^{zt}Y(z) = \lim_{z\to 3i}\frac{3e^{zt}}{(z+3i)(z+3-4i)(z+3+4i)} = \frac{e^{i3t}}{-36+32i}$$

Para $-3i$, será el conjugado del anterior

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -3i\right) = \overline{\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), 3i\right)} = \overline{\frac{e^{i3t}}{-36+32i}} = \frac{e^{-i3t}}{-36-32i}$$

Para $-3+4i$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -3+4i\right) = \lim_{z\to -3+4i}(z+3-4i)e^{zt}Y(z) = \lim_{z\to -3+4i}\frac{3e^{zt}}{(z^2+9)(z+3+4i)} = \frac{3e^{(-3+4i)t}}{192+16i}$$

y para $-3-4i$, será el conjugado del anterior

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -3-4i\right) = \overline{\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -3+4i\right)} = \overline{\frac{3e^{(-3+4i)t}}{192+16i}} = \frac{3e^{(-3-4i)t}}{192-16i}$$

y sumando todos y teniendo en cuenta que $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

$$y(t) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i3t}}{-36+32i}\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{3e^{(-3+4i)t}}{192+16i}\right)$$

Para el primer sumando en forma binómica

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i3t}}{-36+32i}\right) &= 2\operatorname{Re}\left((\cos 3t + i\operatorname{sen} 3t)\left(-\frac{9}{580} - \frac{8}{145}i\right)\right) \\ &= -\frac{9}{290}\cos 3t + \frac{8}{290}\operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

y para el segundo

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left(\frac{3e^{(-3+4i)t}}{192+16i}\right) &= 6e^{-3t}\operatorname{Re}\left((\cos 4t + i\operatorname{sen} 4t)\left(\frac{3}{580} - \frac{1}{2320}i\right)\right) \\ &= 6e^{-3t}\left(\frac{3\cos 4t}{580} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{2320}\right) \\ &= e^{-3t}\left(\frac{9}{290}\cos 4t + \frac{3}{1160}\operatorname{sen} 4t\right) \end{aligned}$$

y la función $y(t)$ será

$$y(t) = -\frac{9}{290}\cos 3t + \frac{8}{290}\operatorname{sen} 3t + e^{-3t}\left(\frac{9}{290}\cos 4t + \frac{3}{1160}\operatorname{sen} 4t\right)$$

que para valores de t grandes se aproxima a

$$y(t) = -\frac{9}{290}\cos 3t + \frac{8}{290}\operatorname{sen} 3t$$

(Opción 3) Por último, también es posible utilizando que en un sistema asintóticamente estable cuando $t \to \infty$ la solución general converge a la solución particular del problema:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = y_p(t)$$

Como la función de entrada es $\operatorname{sen} 3t$, para encontrar la solución particular debemos probar con una función de la forma

$$y_p(t) = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t$$

Derivando dos veces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -3A\operatorname{sen} 3t + 3B\cos 3t \\ y_p''(t) &= -9A\cos 3t - 9B\operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y_p'' + 6y_p' + 25y_p &= \operatorname{sen} 3t \\ (-9A\cos 3t - 9B\operatorname{sen} 3t) + 6(-3A\operatorname{sen} 3t + 3B\cos 3t) + 25(A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t) &= \operatorname{sen} 3t \end{aligned}$$

Agrupando

$$(16A + 18B)\cos 3t + (-18A + 16B)\operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen} 3t$$

e igualando

$$\left.\begin{array}{r} 16A + 18B = 0 \\ -18A + 16B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{9}{290} \text{ y } B = \frac{8}{290}$$

y por tanto si $t \to \infty$

$$y(t) \simeq y_p(t) = -\frac{9}{290}\cos 3t + \frac{8}{290}\operatorname{sen} 3t$$

3. *Solución:* Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}\left[y''(t) + 2y'(t) + y(t)\right](z) = \mathcal{L}[t\cos t](z)$$

y utilizamos sus propiedades

- *Linealidad:*
$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) + 2\mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) + \mathcal{L}[y(t)](z) = \mathcal{L}[t\cos t](z) \tag{2}$$

- *Derivada de la función transformada:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z) - y(0) \\ \mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales del problema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathcal{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z) \\ \mathcal{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - 1 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación 2

$$\left(z^2 Y(z) - 1\right) + 2\left(zY(z)\right) + Y(z) = \mathcal{L}\left[t\cos t\right](z)$$

Para el cálculo de $\mathcal{L}\left[t\cos t\right](z)$ podemos utilizar las propiedades de la derivada función transformada de la transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)\right) = (-1)^n \mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](z)$$

y para la función del problema obtenemos

$$\mathcal{L}\left[t\cos t\right](z) = (-1)\frac{d}{dz^2}\left(\mathcal{L}\left[\cos t\right](z)\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z^2+1}\right) = \frac{z^2-1}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Finalmente la ecuación queda

$$\left(z^2 + 2z + 1\right) Y(z) - 1 = \frac{z^2-1}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Si despejamos $Y(z)$ se obtiene

$$Y(z) = \frac{\left(1 + \frac{z^2-1}{\left(z^2+1\right)^2}\right)}{\left(z^2+2z+1\right)} = \frac{z^2\left(z^2+3\right)}{(z-i)^2(z+i)^2(z+1)^2} = \frac{z^4+3z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z+1)^2}$$

Y encontraremos la función buscada $y(t)$ mediante la fórmula de inversión de Bromwich por residuos para obtener

$$y(t) = \sum_{z_k} \operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(s), z_k\right)$$

En este caso las singularidades de $Y(z)$ son

$$z_1 = i \Rightarrow \text{ Polo doble}$$

$$z_2 = -i \Rightarrow \text{ Polo doble}$$

$$z_3 = -1 \Rightarrow \text{ Polo doble}$$

siendo los residuos en esas singularidades

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(z), i\right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 e^{zt} Y(z)\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z+i)^2(z+1)^2}\right) = \lim_{z\to i}\left(\varphi_1'(z)\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(z), -i\right) = \overline{\operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(z), i\right)}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt} Y(z), -1\right) = \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z+1)^2 e^{zt} Y(z)\right) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left(e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to -1}\left(\varphi_2'(z)\right)$$

donde por claridad hemos puesto

$$\varphi_1(z) = e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z+i)^2(z+1)^2}$$

y

$$\varphi_2(z) = e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

Para el residuo en $z_1 = i$, y por ser un polo doble, derivamos función $\varphi_1(z)$

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(z) &= \left(te^{zt}\tfrac{z^4+3z^2}{(z+i)^2(z+1)^2} + e^{zt}\tfrac{\left(4z^3+6z\right)(z+i)^2(z+1)^2-\left(z^4+3z^2\right)\left(2(z+i)(z+1)^2+2(z+i)^2(z+1)\right)}{(z+i)^4(z+1)^4} \right) \\
&= te^{zt}\tfrac{z^4+3z^2}{(z+i)^2(z+1)^2} + e^{zt}\tfrac{\left(4z^3+6z\right)(z+i)(z+1)-\left(z^4+3z^2\right)(2(z+1)+2(z+i))}{(z+i)^3(z+1)^3} \\
&= te^{zt}\tfrac{z^4+3z^2}{(z+i)^2(z+1)^2} + e^{zt}\tfrac{(2+2i)z^4-(6-4i)z^3+6iz}{(z+i)^3(z+1)^3}
\end{aligned}$$

y evaluando en i, obtenemos el residuo buscado:

$$\varphi_1'(i) = te^{it}\frac{i^4+3i^2}{(i+i)^2(i+1)^2} + e^{it}\frac{(2+2i)\,i^4-(6-4i)\,i^3+6ii}{(i+i)^3(i+1)^3} = -\frac{1}{4}ite^{it} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)e^{it} = (1+i-it)\,\frac{e^{it}}{4}$$

Para $z_2 = -i$ se obtiene directamente conjugando la expresión anterior

$$\operatorname{Res}\left(e^{zt}Y(z), -i\right) = \overline{(1+i-it)\,\frac{e^{it}}{4}} = (1-i+it)\,\frac{e^{-it}}{4}$$

Para el residuo en $z_3 = -1$, que también es un polo doble, derivamos una vez la función $\varphi_2(z)$

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(z) &= \frac{d}{dz}\left(e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(e^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z^2+1)^2}\right) \\
&= te^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z^2+1)^2} + e^{zt}\frac{\left(4z^3+6z\right)\left(z^2+1\right)^2-\left(z^4+3z^2\right)4z\left(z^2+1\right)}{(z^2+1)^4} \\
&= te^{zt}\frac{z^4+3z^2}{(z^2+1)^2} + e^{zt}\frac{\left(4z^3+6z\right)\left(z^2+1\right)-\left(z^4+3z^2\right)4z}{(z^2+1)^3}
\end{aligned}$$

y evaluando en -1, obtenemos el residuo en esta singularidad

$$\varphi_2'(-1) = te^{-t}\tfrac{(-1)^4+3(-1)^2}{\left((-1)^2+1\right)^2} + e^{-t}\tfrac{\left(4(-1)^3+6(-1)\right)\left((-1)^2+1\right)-\left((-1)^4+3(-1)^2\right)4(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3} = te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t}$$

Sumando los tres residuos obtenemos la función $y(t)$

$$y(t) = (1+i-it)\,\frac{e^{it}}{4} + (1-i+it)\,\frac{e^{-it}}{4} + \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t}$$

Agrupando los dos primeros, ya que es la suma de un complejo y su conjugado

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((1+i(1-t))\,e^{it}\right) + \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((\cos t + i\operatorname{sen} t)(1+i(1-t))\right) + \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos t - (1-t)\operatorname{sen} t\right) + \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t} \\
&= \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t} + \frac{1}{2}\left(\cos t + (t-1)\operatorname{sen} t\right)
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que se cumplen las condiciones iniciales dadas en el enunciado:

$$y(0) = \left(0-\frac{1}{2}\right)e^{-0} + \frac{1}{2}\left(\cos 0 + (0-1)\operatorname{sen} 0\right) = 0$$

$$y'(t) = e^{-t}\left(\frac{3}{2} - t\right) + \frac{1}{2}(t-1)\cos t \Rightarrow y'(0) = 1$$

Y que también se cumple la ecuación diferencial dada; para ello necesitaremos también $y''(t)$

$$y''(t) = e^{-t}\left(t - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}(\cos t - (t-1)\operatorname{sen} t)$$

y sustituyendo en la EDO podremos comprobar que se cumple

$$\begin{array}{rr|l} & y''(t) & \left(e^{-t}\left(t-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}(\cos t-(t-1)\operatorname{sen} t)\right) \\ & 2y'(t) & 2\left(e^{-t}\left(\frac{3}{2}-t\right)+\frac{1}{2}(t-1)\cos t\right) \\ + & y(t) & \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t+(t-1)\operatorname{sen} t) \\ \hline & t\cos t & e^{-t}\left(t-\frac{5}{2}+3-2t+t-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{sen} t\left(-\frac{1}{2}(t-1)+\frac{1}{2}(t-1)\right)+\cos t\left(\frac{1}{2}+(t-1)+\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

4. El problema tiene una restricción de igualdad y otra de desigualdad, por tanto asignamos un multiplicador tipo λ y otro tipo μ respectivamente.

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & x+y+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2=1 \\ & 3x+2z\leq 1 \end{array}$$

Los puntos solución del problema deben encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las condiciones de KKT:

$$\left.\begin{array}{c} 1+2\lambda x+3\mu=0 \\ 1+2\lambda y=0 \\ 1+2\mu=0 \end{array}\right\} \quad \text{Condición Estacionaria } (\nabla f+\lambda\nabla h+\mu\nabla g=0)$$

$$x^2+y^2=1\} \qquad \text{Condición de factibilidad}$$

$$\mu(3x+2z-1)=0 \qquad \text{Condición de holgura}$$

A estas ecuaciones hay que añadir las condiciones de factibilidad y signo correspondientes a las restricciones de desigualdad:

$$3x+2z \leq 1$$

$$\mu \leq 0 \text{ (Ya que buscamos un máximo)}$$

Utilizamos la condición de holgura, que nos proporciona dos casos

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu=0 & \text{CASO I} \\ 3x+2z-1=0 & \text{CASO II} \end{array}\right.$$

(a) A continuación se resuelve cada uno de los sistemas que proporcionan los casos anteriores:

i. CASO I: $\mu = 0$. Este caso es imposible puesto que al sustituir en la tercera condición estacionaria se llega a una contradicción.

ii. CASO II: $3x + 2z - 1 = 0$

$$\begin{array}{c} 1+2\lambda x+3\mu=0 \\ 1+2\lambda y=0 \\ 1+2\mu=0 \\ x^2+y^2=1 \\ 3x+2z-1=0 \end{array}$$

De la tercera ecuación se obtiene

$$\begin{gathered}1+2\lambda x-\frac{3}{2}=0\\ 1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1\\ 3x+2z-1=0\end{gathered}$$

Utilizando las dos primeras ecuaciones

$$\begin{aligned}2\lambda x &= \frac{1}{2}\Rightarrow \lambda x=\frac{1}{4}\\ 2\lambda y &= -1\Rightarrow \lambda y=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Si en la ecuación del círculo multiplicamos por λ^2

$$\lambda^2x^2+\lambda^2y^2=\lambda^2\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\lambda^2$$

de donde

$$\lambda^2=\frac{5}{16}\Rightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$$

y obtenemos los valores para x e y, y también para z, empleando la última de las ecuaciones $\left(z=\frac{1-3x}{2}\right)$

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\[2ex] y=-\dfrac{1}{2\lambda}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\[2ex] z=\dfrac{1-3x}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$\lambda_2=-\frac{\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4\lambda}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\[2ex] y=-\dfrac{1}{2\lambda}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\[2ex] z=\dfrac{1-3x}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\end{cases}$$

Tenemos dos puntos y el siguiente cuadro:

Punto	λ	μ	$f(x)$	Factibilidad	Extremo
$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)$	$\lambda_{P_1}=\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\mu_{P_1}=-\frac{1}{2}<0$	$\frac{\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}}$	SI	Máximo
					–
$P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\right)$	$\lambda_{P_2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\mu_{P_2}=-\frac{1}{2}<0$	$\frac{\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}}$	SI	Máximo

En la tabla anterior se comprueba que tanto P_1 como P_2 pueden ser máximos locales, no obstante como $f(P_1)<f(P_2)$ entonces P_2 debe ser el máximo global del problema.

Vamos a comprobarlo utilizando las condiciones de segundo orden. Para ello necesitamos los Hessianos de las funciones implicadas

$$HL = Hf + \lambda Hh + \mu Hg = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para P_1 tendremos

$$HL(P_1) = \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es semidefinida positiva en todo el espacio real y por tanto en particular en el espacio tangente asociado a P_1,luego no se cumplen las condiciones necesarias de segundo orden para que sea máximo, ya que por una parte el multiplicador μ es negativo, pero por otra la matriz HL es semidefinida positiva.
Para P_2 tendremos

$$HL(P_2) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es semidefinida negativa en todo el espacio real y por tanto también lo es en el espacio tangente asociado a P_2, luego se cumplen las condiciones necesarias de segundo orden para que sea máximo. El espacio tangente ampliado en este punto es, teniendo en cuenta las restrcciones activa y multiplicador no nulo

$$\begin{aligned} M(P_2) &= \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : \nabla h(P_2) \cdot \mathbf{d} = 0; \nabla g(P_2) \cdot \mathbf{d} = 0 \right\} \\ &= \{(d_1, d_2, d_3) : d_1 - 2d_2 = 0; 3d_1 + 2d_3 = 0\} \\ &= \{(d_1, 2d_1, -3d_1/2) : d_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} (d_1, 2d_1, -3d_1/2)\, HL(P_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \\ -3d_1/2 \end{pmatrix} &= (d_1, 2d_1, -3d_1/2) \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \\ -3d_1/2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{3\sqrt{5}}{2} d_1^2 < 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0 \end{aligned}$$

por lo que es definida negativa y el punto P_2 es máximo.

La solución del problema es por tanto

$$\text{Máximo Global}: \ P_5$$

Por útlimo, vamos a estudiar la regularidad del conjunto factible. En primer lugar para los puntos donde la restricción de desigualdad no sea activa hay que estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto

$$\{\nabla h\} = \{2(x, y, 0)\}$$

El único punto donde el conjunto anterior e linelamente dependiente es el $(0, 0, 0)$, pero este punto no pertenece al conjunto factible, puesto que no cumple la ecuación del círculo.

En los puntos donde la restricción de desigualdad es activa, habrá que estudiar la dependencia lineal en el conjunto

$$\{\nabla h, \nabla h\} = \{2\,(x, y, 0)\,, (3, 0, 2)\}$$

De nuevo el único punto que hace que la familia anterior es linealmente dependiente es el $(0, 0, 0)$ y la conclusión aquí es idéntica. Se deduce que todos los puntos factibles son regulares y por tanto cualquier solución del problema debe cumplir las condiciones de KKT, es decir, tiene que ser unos de los puntos anteriores.