1 — La transformada de Laplace

1.1 Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside

Definición 1.1

Dados $a,b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Diremos que $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua a trozos $\Leftrightarrow$ Existe una partición del intervalo $[a,b]$, $\mathscr{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, de forma que:

1. f es continua en cada subintervalo abierto de la partición:
$$f \in \mathscr{C}\left(]t_k, t_{k+1}[\right); \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$
2. Existen y son finitos los límites laterales de f en los extremos de cada subintervalo
$$\lim_{t \to t_{k^+}} f(t), \lim_{t \to t_{k^-}} f(t) \in \mathbb{R}.$$

La definición es equivalente a decir que $f(t)$ es continua en $[a,b]$, salvo quizás en un número finito de puntos donde la función puede presentar una discontinuidad de primera especie finita.

Ejemplo 1.1

Como ejemplo de función continua a trozos definida sobre un intervalo cerrado y acotado tenemos a la *función de Haar* (figura 1.1) definida de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ como**:**

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}.$$

La definición 1.1 se puede extender a intervalos no acotados.

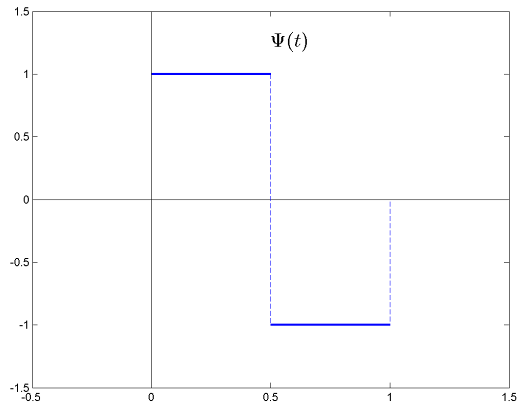

Figura 1.1: Función de Haar.

Definición 1.2

Diremos que $f:]-\infty,\infty[\to \mathbb{C}$ es una función continua a trozos en $]-\infty,\infty[\Leftrightarrow \forall a,b \in \mathbb{R}$, con $a<b$, se verifica que $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ es continua a trozos.

Ejemplo 1.2

Un ejemplo de función continua a trozos en un intervalo no acotado es la función parte entera $f(t) = E(t)$, definida de $]-\infty,\infty[$ en $\mathbb{R}$ como

$$f(t) = k; \qquad \forall t \in [k, k+1[,$$

cuya representación gráfica viene dada por la figura 1.2.

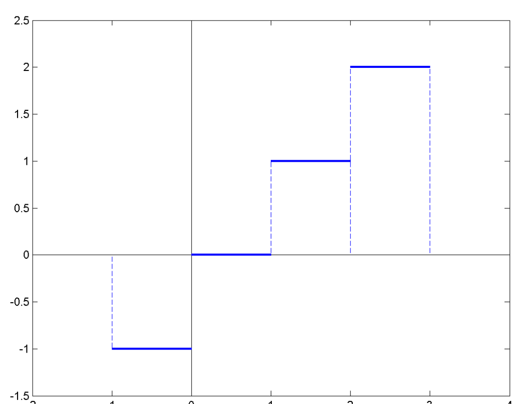

Figura 1.2: Función continua a trozos en intervalo no acotado.

N Una función continua a trozos en un intervalo acotado $[a,b]$ puede extenderse a la recta real asignando el valor 0 a los puntos que estén fuera del intervalo.

$$f(t) = 0; \forall t \notin [a,b]$$

Definición 1.3

Una de las funciones continuas trozos más conocidas y usadas en la teoría de transformada de Laplace es la llamada *función de Heaviside de parámetro* $a \in \mathbb{R}$ definida como

$$h_a :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

y cuya representación está dada en la figura 1.3.
El caso $a = 0$ se denomina función *escalón unitario* y se denota como $u(t) = h_0(t)$. Notar que se cumple

$$h_a(t) = h_0(t-a).$$

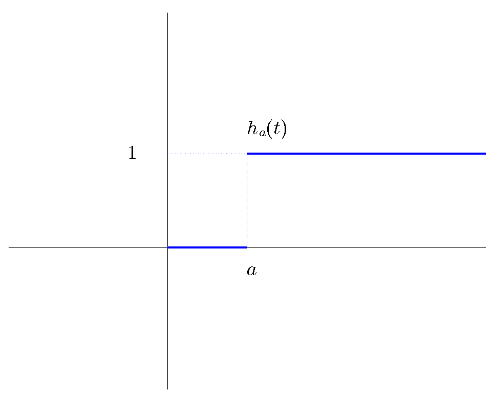

Figura 1.3: Función de Heaviside de parámetro $a > 0$.

La función de Heaviside actúa como un *interruptor, de forma que si* $f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{C}$ *es una función cualquiera,* $(h_a f)(t)$ *es la función*

$$(h_a f)(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ f(t) & t \geq a \end{cases}.$$

De esta forma h_a *"enciende" a* f *en el instante* $t = a$.
Si consideramos ahora $0 \leq a < b$, *la función*

$$h_a - h_b :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

tiene la forma

$$(h_a - h_b) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b) \\ \\ 1 & t \in [a,b) \end{cases}$$

En este caso la función h_b tiene el efecto de "apagar" la señal o función sobre la que se aplique a partir del instante b

$$(h_a - h_b) f(t) = (h_a f)(t) - (h_b f)(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \\ f(t) & a \leq t < b \\ \\ 0 & t \geq b \end{cases}$$

Definición 1.4

La función $(h_a - h_b)(t)$ a veces se suele representar mediante la función característica de intervalo $\chi_I(t)$ definida para cualquier conjunto de números reales $I \subset \mathbb{R}$ como

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 0 & t \notin I \\ \\ 1 & t \in I \end{cases},$$

de este modo

$$(h_a - h_b)(t) = \chi_{[a,b[}(t).$$

Con esta interpretación física de ser un interruptor, la función de Heaviside es muy útil para describir funciones continuas a trozos que sean continuas a la derecha, por ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ \\ t-1 & 1 \leq t < 3 \\ \\ \operatorname{sen} t & t \geq 3 \end{cases},$$

puede escribirse en una sola línea como

$$f(t) = [h_0(t) - h_1(t)]\,t + [h_1(t) - h_3(t)]\,(t-1) + h_3(t) \operatorname{sen} t,$$

o también

$$f(t) = t \cdot h_0(t) - h_1(t) + [\operatorname{sen} t - (t-1)]\, h_3(t).$$

N *La transformada de Laplace estará definida mediante una integral, de este modo la condición de ser la función continua por la derecha (o por la izquierda) será irrelevante.*

1.2 Definición de Transformada de Laplace

Definición 1.5

Se define la transformada de Laplace de $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *en* $z \in \mathbb{C}$ *como:*

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \tag{1.1}$$

o abreviadamente

$$\mathscr{L}[f](z) = F(z).$$

La existencia de la integral impropia dentro de la definición implica que la integral

$$\int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt,$$

existe y es finita para cualquier valor de $T \geq 0$ *y además*

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

N *Una condición necesaria para que la integral 1.1 exista es*

$$\lim_{t \to \infty} \left| e^{-zt} f(t) \right| = 0.$$

Definición 1.6

*Definimos dominio o región de convergencia (*ROC*) de la transformada de Laplace de una función* $f(t)$ *al conjunto* $\mathscr{D}_f$ *de números complejos donde está definida la transformada de Laplace de* $f(t)$*:*

$$\mathscr{D}_f = \{ z \in \mathbb{C} : \mathscr{L}[f](z) \text{ existe y es finita} \}.$$

Diremos que $f(t)$ *está definida en el* dominio temporal*, mientras que* $F(z)$ *está definida en el plano* z *o* plano de Laplace *que algunas veces se denomina de* dominio de frecuencias complejas.

Existe un tipo de funciones para las que es posible calcular la transformada de Laplace.

Definición 1.7

Una función compleja $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *se dice que es de* orden exponencial $\gamma \Leftrightarrow \exists M > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ *de forma que se cumple*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad t \geq 0.$$

Esta definición indica que si $f(t)$ *es de orden exponencial, entonces crece más lento que una función exponencial de la forma* $Me^{\gamma t}$.

Ejemplo 1.3

La función $f(t) = e^{5t}\operatorname{sen} 2t$ *es de orden exponencial* $\gamma = 3$*, puesto que*

$$\left|e^{5t}\operatorname{sen} 2t\right| \leq e^{5t},$$

luego podemos tomar $\gamma = 5$*,* $M = 1$ *y* $T \geq 0$*.*

Ejemplo 1.4

La función $f(t) = \cosh t$ *es de orden exponencial* $\gamma = 1$*, puesto que*

$$|\cosh t| = \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t + e^t}{2} = e^t,$$

luego podemos tomar $\gamma = 1$*,* $M = 1$ *y* $T \geq 0$*.*

Ejemplo 1.5

La función $f(t) = e^{t^2}$ *no es de orden exponencial, ya que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\gamma t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t(t-\gamma)} = \infty, \quad \text{para cualquier valor de } \gamma,$$

luego e^{t^2} *crece más rápidamente que* $e^{\gamma t}$ *para cualquier elección de* γ*.*

Ejemplo 1.6

La función $f(t) = \operatorname{sen} bt$ *es de orden exponencial, puesto que*

$$|\operatorname{sen} bt| \leq 1 = e^{0t}$$

luego $\gamma = 0$*,* $M = 1$ *y* $T \geq 0$*.*

Definición 1.8

Denotaremos por $\mathscr{E}_\gamma$ *al conjunto de las funciones* continuas a trozos *de* orden exponencial γ*, y por* $\mathscr{E}$ *al conjunto de las funciones continuas a trozos de orden exponencial para algún* $\gamma \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\gamma &= \{f \text{ es continua a trozos de orden exponencial } \gamma\} \\
\mathscr{E} &= \left\{f : \exists \gamma \in \mathbb{R}, \text{ tal que } f \in \mathscr{E}_\gamma\right\},
\end{aligned}$$

en cierto modo se puede decir que

$$\mathscr{E} = \cup_\gamma \mathscr{E}_\gamma.$$

Proposición 1.1

Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *se cumple*

$$f \in \mathscr{E} \Rightarrow \exists \mathscr{L}[f](z); \quad \forall \operatorname{Re}(z) > \gamma.$$

Demostración: *La demostración es bastante sencilla y comprobaremos que la integral de* $e^{-zt} f(t)$ *es absolutamente convergente en un cierto conjunto.*

$$\left| \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty \left| e^{-zt} f(t) \right| dt = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(zt)} |f(t)|\, dt.$$

Como $f(t)$ *es de orden exponencial, existirán* $M > 0$ *y* γ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(zt)} |f(t)|\, dt &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(zt)} M e^{\gamma t} dt = M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}(z)-\gamma)t} dt = M \left. -\frac{e^{-(\operatorname{Re}(z)-\gamma)t}}{\operatorname{Re}(z) - \gamma} \right|_{t=0}^{t\to\infty} \\ &= \frac{M}{\operatorname{Re}(z) - \gamma} \left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(\operatorname{Re}(z)-\gamma)t} \right) = \frac{M}{\operatorname{Re}(z) - \gamma}. \end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{Re}(z - \gamma) > 0$*, que es lo que queríamos probar.*
Con la demostración anterior hemos probado que la transformada de Laplace existe al menos en el semiplano a la derecha de γ *y por tanto ocurre*

$$D_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma\} \subset \mathscr{D}_f,$$

siendo $\mathscr{D}_f$ *la región de convergencia de* $\mathscr{L}[f](z)$.
Si ahora definimos

$$\rho = \inf\left\{\gamma \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq M e^{\gamma t}; \quad \forall t \geq 0\right\},$$

y

$$D_f^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \rho\},$$

está claro que

$$D_f^* \subseteq \mathscr{D}_f.$$

1.3 Cálculo de algunas transformadas de Laplace

En esta sección vamos a calcular la transformada de Laplace de algunas funciones notables.

FUNCIÓN DE HEAVISIDE

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función de Heaviside de parámetro $a > 0$

$$f(t) = h_a(t); \qquad a > 0,$$

Para ello utilizaremos la definición directa de transformada de Laplace

$$F(z) = \mathscr{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t)\,dt = \int_0^a h_a(t)\,e^{-zt} dt + \int_a^\infty h_a(t)\,e^{-zt} dt,$$

como $h_a(t) = 0$, $\forall t < a$; la primera integral es nula. Mientras que para la segunda y suponiendo $z \neq 0$

$$F(z) = \int_a^\infty h_a(t)\,e^{-zt} dt = \int_a^\infty e^{-zt} dt,$$

$$F(z) = -\frac{1}{z} e^{-tz}\Big|_{t=a}^{t=\infty} = \frac{1}{z}\left(e^{-az} - \lim_{t\to\infty} e^{-tz}\right).$$

Se puede demostrar que el límite sólo existe si $Re(z) > 0$ y en ese caso su valor es cero, así

$$F(z) = \frac{e^{-az}}{z}, \qquad Re(z) > 0.$$

En particular si $a = 0$

$$\mathscr{L}[h_0(t)](z) = \frac{1}{z}, \qquad Re(z) > 0.$$

Nos queda saber qué ocurre en $z = 0$

$$\mathscr{L}[f](0) = \int_0^\infty e^{-0t} f(t)\,dt = \int_0^\infty h_a(t)\,dt = \int_a^\infty 1dt = \lim_{t\to\infty} t - a = \infty.$$

y por tanto no existe.
Si $a = 0$, entonces la transformada de la función escalón unitario $h_0(t) = u(t)$ es

$$\mathscr{L}[u(t)](z) = \frac{1}{z}, \qquad Re(z) > 0.$$

N *Vamos a calcular el límite*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-tz},$$

teniendo en cuenta que $t \in R$, que $z = x + iy$ y la definición de e^z

$$e^{-tz} = e^{-t(x+iy)} = e^{-tx} e^{-ity} = e^{-tx}(\cos ty - i \operatorname{sen} ty).$$

Si ahora $t \to \infty$, entonces por una parte tanto $\cos ty$, como $\operatorname{sen} ty$ son periódicas y por tanto no tienen límite en ∞, sin embargo, están acotadas. Para e^{-tx} tendremos

$$\begin{aligned} x &> 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-tx} = 0, \\ x &< 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-tx} = \infty, \end{aligned}$$

luego sólo existe el límite si $\mathrm{Re}(z) = x \geq 0$.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función exponencial

$$f(t) = e^{\omega t}; \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Utilizando directamente la definición de transformada de Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{\omega t} dt = \int_0^\infty e^{t(\omega - z)} dt.$$

Suponiendo que $z \neq \omega$ obtenemos

$$F(z) = \left. \frac{1}{\omega - z} e^{t(\omega - z)} \right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\omega - z} \left(\lim_{t\to\infty} e^{t(\omega - z)} - 1 \right),$$

y el límite existe siempre que $Re(\omega - z) < 0$ (en ese caso su valor será cero):

$$F(z) = \frac{1}{z - \omega}, \qquad \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\omega).$$

Notar en particular que si $\omega = 0$, entonces $F(z) = \frac{1}{z}$ como era de esperar.
Para el caso $z = \omega$

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega t} e^{\omega t} dt = \int_0^\infty dt = \infty.$$

y la integral sería divergente.

FUNCIÓN POTENCIA

Vamos a calcular la transformada de Laplace para $f_n(t) = t^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$F(z) = \mathscr{L}[f_n](z) = \int_0^\infty f_n(t)\, e^{-zt} dt = \int_0^\infty t^n e^{-zt} dt,$$

Si llamamos

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-zt} dt,$$

y utilizamos integración por partes, suponiendo $z \neq 0$

$$\begin{aligned} u &= t^n \Rightarrow du = nt^{n-1} dt, \\ dv &= e^{-zt} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{z} e^{-zt}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$I_n = -\left. \frac{t^n}{z} e^{-zt} \right|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{z} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-zt} dt = -\left. \frac{t^n}{z} e^{-zt} \right|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{z} I_{n-1} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{t^n}{z} e^{-zt} \right) + \frac{n}{z} I_{n-1}.$$

El único valor real para el límite es cero y siempre que $\mathrm{Re}\, z > 0$*; para ese caso se obtiene la siguiente ecuación de recurrencia*

$$I_n = \frac{n}{z} I_{n-1}.$$

Repetimos el proceso una y otra vez

$$I_n = \frac{n}{z} I_{n-1} = \frac{n}{z}\frac{n-1}{z} I_{n-2} = \cdots = \frac{n}{z}\frac{n-1}{z}\cdots\frac{1}{z} I_0 = \frac{n!}{z^n} I_0,$$

siendo en este caso I_0

$$I_0 = \int_0^\infty t^0 e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-zt}dt = \mathscr{L}\left[h_0(t)\right](z) = \frac{1}{z}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0,$$

y por tanto

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Para el caso $z = 0$*, la integral es divergente, ya que*

$$F(0) = \mathscr{L}\left[f_n\right](0) = \int_0^\infty f_n(t)\, e^{-0\cdot t}dt = \int_0^\infty t^n dt = \infty.$$

FUNCIONES PERIÓDICAS

Sea $f : [0,\infty[\longrightarrow \infty$ *una función periódica de periodo* $T > 0$*, es decir* $f(t+T) = f(t)\ \forall t \geq 0$*, y supongamos que* $f(t)$ *tiene transformada de Laplace, entonces podemos poner*

$$F(z) = \mathscr{L}[f](z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{s\to\infty} \int_0^s f(t)\, e^{-zt}dt,$$

o de forma equivalente

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} f(t)\, e^{-zt}dt.$$

Utilizando la aditividad de la integral dentro del límite reescribimos la expresión anterior como

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{T} f(t)\, e^{-zt}dt + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)\, e^{-zt}dt \right),$$

o en forma de sumatorio

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} f(t)\, e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\, e^{-zt}dt.$$

Para cada una de las integrales dentro del sumatorio hacemos el cambio de variable $t = s + kT$ (o $s = t - kT$)

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-zt}dt = \int_{0}^{T} f(s+kT)\,e^{-z(s+kT)}dt = \int_{0}^{T} f(s+kT)\,e^{-zs}e^{-zkT}ds,$$

y al ser f periódica se cumple $f(s+kT) = f(s)$ y cada integral queda

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,e^{-zt}dt = \int_{0}^{T} f(s+kT)\,e^{-zs}e^{-zkT}ds = e^{-zkT}\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds,$$

sustituyendo en el sumatorio podemos sacar factor común el correspondiente a la integral

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT}\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds = \left(\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT}\right).$$

El sumatorio es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón e^{-zT}

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-zkT} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-zT}\right)^{k} = \left(\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}\right),$$

por tanto

$$\int_{0}^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \left(\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\left(\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}\right).$$

Sustituyendo en el límite

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-zt}dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{nT} f(t)\,e^{-zt}dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}} \\
&= \left(\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-znT}}{1-e^{-zT}}.
\end{aligned}$$

Y este límite sólo existe cuando e^{-nzT} tiende hacia 0, o de forma equivalente cuando $\mathrm{Re}(z) > 0$, de donde

$$\mathscr{L}[f](z) = \int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-zt}dt = \frac{1}{1-e^{-zT}}\int_{0}^{T} f(s)\,e^{-zs}ds; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Ejemplo 1.7

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo 2 definida en $[0,2]$ *como:*

$$f(t)=\begin{cases} t & t\in[0,1] \\ 0 & t\in\,]1,2] \end{cases},$$

Para ello utilizaremos la expresión obtenida, siendo en este caso $T=2$

$$\mathscr{L}[f](z)=\frac{1}{1-e^{-z2}}\int_0^2 f(s)\,e^{-zs}ds,$$

y el valor de la integral será

$$\int_0^2 f(s)\,e^{-zs}ds=\int_0^1 f(s)\,e^{-zs}ds+\int_1^2 f(s)\,e^{-zs}ds=\int_0^1 te^{-zs}ds+\int_1^2 0e^{-zs}ds=\int_0^1 te^{-zs}ds.$$

Integrando por partes tomando $u=t$ *y* $dv=e^{-zt}dt$, *de formar que* $du=dt$ *y* $v=-\frac{1}{z}e^{-zt}$

$$\int_0^1 te^{-zs}ds=-\frac{t}{z}e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t=1}+\int_0^1\frac{1}{z}e^{-zt}ds=-\frac{1}{z}e^{-z}+-\frac{1}{z^2}e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t=1}=-\frac{1}{z}e^{-z}+\frac{1}{z^2}-\frac{e^{-z}}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-e^{-z}\right)-\frac{1}{z}e^{-z}.$$

Finalmente la transformada de Laplace de $f(t)$ *será*

$$\mathscr{L}[f](z)=\frac{1}{1-e^{-z2}}\left(\frac{1}{z^2}\left(1-e^{-z}\right)-\frac{1}{z}e^{-z}\right).$$

1.4 Propiedades de la tranformada de Laplace

LINEALIDAD

Sean $f,g:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$ *y* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. *Supongamos que existen* $\mathscr{L}[f](z)$ *para* $z\in D_f$ *y* $\mathscr{L}[g](z)$ *para* $z\in D_g$, *entonces*

$$\mathscr{L}[\alpha f+\beta g](z)=\alpha\mathscr{L}[f](z)+\beta\mathscr{L}[g](z)\,;\ \text{para } z\in\ D_f\cap D_g.$$

La demostración es directa por la linealidad de la integral.

Ejemplo 1.8

Aplicaremos la propiedad para el cálculo de la transformada de Laplace de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

- ***Función característica de intervalo:*** *Para calcular la transformada de Laplace de la* *función* $\chi_{[a,b[}(t)$*, utilizamos su expresión en términos de la función de Heaviside*

$$\chi_{[a,b[}(t) = h_a(t) - h_b(t),$$

aplicamos la propiedad de linealidad

$$\mathscr{L}\left[\chi_{[a,b[}(t)\right](z) = \mathscr{L}[h_a(t) - h_b(t)](z) = \mathscr{L}[h_a(t)](z) - \mathscr{L}[h_b(t)](z),$$

y utilizamos que $\mathscr{L}[h_a(t)](z) = e^{-az}/z$ *para obtener*

$$\mathscr{L}[h_a(t)](z) - \mathscr{L}[h_b(t)](z) = \frac{e^{-az}}{z} - \frac{e^{-bz}}{z} = \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z}.$$

En este caso la transformada sí está definida para $z = 0$*, ya que*

$$\mathscr{L}\left[\chi_{[a,b[}(t)\right](0) = \int_0^{\infty} \chi_{[a,b[}(t) = \int_a^b 1dt = b - a,$$

que coincide con

$$\lim_{z\to 0} \mathscr{L}\left[\chi_{[a,b[}(t)\right](z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z} = (L'H\hat{o}pital) = \lim_{z\to 0} \frac{-ae^{-az} + be^{-bz}}{1} = b - a.$$

- ***Funciones trigonométricas:*** *Aunque podemos realizar la transformada de Laplace de las funciones trigonométricas elementales* $\cos t$ *y* $\operatorname{sen} t$ *de forma directa*

$$\mathscr{L}[\cos(t)](z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \cos(t)\, dt,$$

utilizando integración por partes, es más rápido utilizar su definición en términos de la función exponencial

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}, \\
\operatorname{sen}(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-it},
\end{aligned}$$

y aplicar la propiedad de linealidad

$$\mathscr{L}[\cos(t)](z) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}\right](z) = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{it}\right](z) + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-it}\right](z).$$

Sabemos que para $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathscr{L}[e^{\omega t}](z) = \frac{1}{z-\omega}$ *con* $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \omega$ *, por tanto si* $\omega = i$

$$\mathscr{L}\left[e^{it}\right](z) = \frac{1}{z-i} \text{ en } D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} i = 0\},$$

y si $\omega = -i$

$$\mathscr{L}\left[e^{-it}\right](z) = \frac{1}{z+i} \text{ en } D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} -i = 0\},$$

luego

$$\mathscr{L}\left[\cos(t)\right](z)=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{it}\right](z)+\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-it}\right](z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}=\frac{z}{z^2+1},$$

con $D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>0\}$. *Del mismo modo obtenemos*

$$\mathscr{L}\left[\operatorname{sen}(t)\right](z)=\frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{it}\right](z)-\frac{1}{2i}\mathscr{L}\left[e^{-it}\right](z)=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z^2+1}$$

en el conjunto $D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>0\}$.

- ***Funciones Hiperbólicas:*** *Teniendo en cuenta que*

$$\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t},$$

$$\operatorname{senh}(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t},$$

volvemos a utilizar la transformada de Laplace de la función exponencial para el caso $\omega=1$

$$\mathscr{L}\left[e^t\right](z)=\frac{1}{z-1}\ \textit{en}\ D_1=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,1=1\},$$

y el caso $\omega=-1$

$$\mathscr{L}\left[e^{-t}\right](z)=\frac{1}{z+1}\ \textit{en}\ D_2=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,{-1}=-1\},$$

y por tanto

$$\mathscr{L}\left[\cosh t\right](z)=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^t\right](z)+\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-t}\right](z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}=\frac{z}{z^2-1}\ \textit{en}\ D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>1\}$$

$$\mathscr{L}\left[\operatorname{senh} t\right](z)=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^t\right](z)-\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-t}\right](z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z^2-1}\ \textit{en}\ D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z>1\}$$

Ejemplo 1.9

Calcularemos la transformada de Laplace de la función

$$f(t)=e^{-t}h_0(t)+e^{-2t}h_0(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

por linealidad:

$$\mathscr{L}\left[e^{-t}h_0(t)+e^{-2t}h_0(t)\right](z)=\mathscr{L}\left[e^{-t}h_0(t)\right](z)+\mathscr{L}\left[e^{-2t}h_0(t)\right](z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}$$

En este caso

$$D_{f_1}(z)=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)>-1\},$$

$$D_{f_2}(z) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -2\},$$

luego

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\}.$$

CAMBIO DE ESCALA

Teorema 1.1

Dada

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$$

y sea $a > 0$. Si existe $\mathscr{L}[f](z)$ para $z \in D_f \subseteq \mathbb{C}$ y definimos la función $g(t)$ como

$$g(t) = f(at);\ \forall t \in [0, \infty[,$$

entonces

$$\mathscr{L}[g](z) = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f]\left(\frac{z}{a}\right) \text{ para } \frac{z}{a} \in D_f.$$

La función $g(t)$ se obtiene mediante un cambio de escala en $f(t)$, esto implica bien una contracción hacia 0 si $a < 1$ o expandirla si $a > 1$.
Demostración*: Aplicamos la definición de transformada de Laplace sobre la función $g(t)$*

$$\mathscr{L}[g](z) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-tz} dt = \int_a^\infty f(at)\, e^{-tz} dt.$$

Hacemos el cambio de variable $at = s \Rightarrow dt = \frac{1}{a}ds$ y como $a > 0$ los extremos de integración no varían

$$\int_a^\infty f(at)\, e^{-zt} dt = \int_0^\infty f(s)\, e^{-z(s/a)} \frac{1}{a} ds = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(s)\, e^{-(z/a)s} ds$$

es decir

$$\mathscr{L}[g](z) = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f](z/a)\ \forall z \in aD$$

Ejemplo 1.10

Sabiendo que

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen} t](z) = \frac{1}{z^2+1}; \qquad \mathrm{Re}\, z > 0,$$

entonces si $a > 0$

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen} at](z) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+(z/a)^2} = \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2+z^2} = \frac{a}{a^2+z^2}; \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

también se cumple

$$\mathscr{L}[\cos at](z) = \frac{z}{a^2+z^2}; \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

TEOREMAS DE TRASLACIÓN

Teorema 1.2 Primer teorema de traslación

Dada $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que existe $\mathscr{L}[f](z)$ para $z \in D_f \subseteq \mathbb{C}$, entonces si $\omega \in \mathbb{C}$ entonces

$$\mathscr{L}\left[e^{\omega t} f(t)\right](z) = \mathscr{L}[f](z-\omega) \ \ para \ \ (z-\omega)+D_f.$$

Demostración: *Utilizando la definición de la transformada de Laplace*

$$\mathscr{L}\left[e^{\omega t} f(t)\right](z) = \int_0^\infty e^{\omega t} f(t)\, e^{-zt} dt,$$

agrupamos exponenciales

$$\int_0^\infty e^{\omega t} f(t)\, e^{-zt} dt = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(\omega-z)t} dt,$$

que es equivalente a evaluar la transformada de Laplace de f en $\omega - z$

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-(\omega-z)t} dt = \mathscr{L}[f(t)](z-\omega).$$

Además $z-\omega$ debe estar en la ROC de $\mathscr{L}[f](z)$, luego

$$z-\omega \in D_f,$$

o de forma equivalente

$$z \in \omega + D_f.$$

Ejemplo 1.11

Para calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^2 e^{3t},$$

utilizamos el primer teorema de traslación para obtener

$$\mathscr{L}\left[t^2 e^{3t}\right](z) = \mathscr{L}\left[t^2\right](z-3); \qquad z-3 \in D_f,$$

por otra parte sabemos que

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0,$$

por tanto

$$\mathscr{L}\left[t^2 e^{3t}\right](z) = \mathscr{L}\left[t^2\right](z-3) = \frac{2!}{(z-3)^3}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 3.$$

En general si $a \in \mathbb{C}$, se cumple

$$\mathscr{L}\left[e^{at} t^n\right](z) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}, \text{ para } \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(a)$$

Ejemplo 1.12

Para calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{5t}\cos t,$$

utilizamos el primer teroema de traslación y obtenemos:

$$\mathscr{L}\left[e^{5t}\cos t\right](z) = \mathscr{L}\left[\cos t\right](z-5); \qquad z-5 \in D_f,$$

y por otra parte sabemos que

$$\mathscr{L}\left[\cos t\right](z) = \frac{z}{z^2+1}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Por tanto

$$\mathscr{L}\left[e^{5t}\cos t\right](z) = \mathscr{L}\left[\cos t\right](z-5) = \frac{z-5}{(z-5)^2+1}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 5.$$

Utilizando las propiedades de cambio de escala y este primer teorema de traslación obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[e^{at}\cos bt\right](z) &= \frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}; \qquad \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(a), \\
\mathscr{L}\left[e^{at}\operatorname{sen} bt\right](z) &= \frac{b}{(z-a)^2+b^2} \qquad \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(a).
\end{aligned}$$

Teorema 1.3 Segundo teorema de traslación

Dada $f:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$*, supongamos que existe* $\mathscr{L}[f](z)$ *para* $z\in D_f\subseteq\mathbb{C}$*, entonces si* $a>0$ *y definimos la función* $f_a(t)$ *como*

$$f_a(t)=h_a(t)\,f(t-a)=\begin{cases} f(t-a) & t\in(a,\infty) \\ \\ 0 & t\in[0,a] \end{cases},$$

entonces

$$\mathscr{L}[f_a](z)=\mathscr{L}[h_a(t)\,f(t-a)](z)=e^{-az}\mathscr{L}[f](z)\,;\;\forall z\in\ D.$$

La función $f_a(t)$ *es una versión trasladada de la función* $f(t)$.

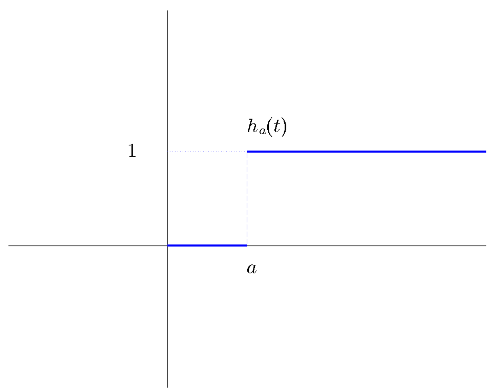

Figura 1.4: Ejemplo de traslación.

Demostración:

$$\mathscr{L}[f_a](z)=\int_0^\infty f_a(t)\,e^{-tz}dt=\int_a^\infty f(t-a)\,e^{-tz}dt=\text{lím}_{b\to\infty}\int_a^b f(t-a)\,e^{-tz}dt$$

Hacemos el cambio $t-a=s\Rightarrow dt=ds$

$$\int_a^b f(t-a)\,e^{-tz}dt=\int_0^{b-a} f(s)\,e^{-z(a+s)}ds=e^{-az}\int_0^{b-a} f(s)\,e^{-zs}ds$$

es decir

$$\mathscr{L}[f_a](z)=e^{-az}\mathscr{L}[f](z)\;\;\forall z\in D$$

Ejemplo 1.13

Para calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = h_3(t)\,\mathrm{sen}\,(t-3)\,,$$

utilizamos directamente el segundo teorema de traslación

$$\mathscr{L}\left[h_3(t)\,\mathrm{sen}\,(t-3)\right](z) = e^{-3z}\mathscr{L}\left[\mathrm{sen}\,t\right](z) = \frac{e^{-3z}}{z^2+1}; \qquad \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

Ejemplo 1.14

Para calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = h_4(t)\cos(t)\,,$$

en este caso para poder utilizar el segundo teorema de traslación, se deben relizar unas modificaciones previas. Por una parte está claro que $a = 4$*, así que sumamos y restamos* 4 *al argumento de la función que acompaña a la función de Heaviside*

$$\mathscr{L}\left[h_4(t)\cos(t)\right](z) = \mathscr{L}\left[h_4(t)\cos(t-4+4)\right](z)\,,$$

apliquemos ahora las razones trigonométricas correspondientes para el coseno de una suma

$$\mathscr{L}\left[h_4(t)\cos((t-4)+4)\right](z) = \mathscr{L}\left[h_4(t)\left(\cos(t-4)\cos(4) - \mathrm{sen}\,(t-4)\,\mathrm{sen}\,(4)\right)\right](z)\,.$$

y utilizando linealidad

$$\mathscr{L}\left[h_4(t)\cos((t-4)+4)\right](z) = \cos(4)\,\mathscr{L}\left[h_4(t)\cos(t-4)\right](z) - \mathrm{sen}\,4\,\mathscr{L}\left[h_4(t)\,\mathrm{sen}\,(t-4)\right](z)\,,$$

de esta forma sí estamos en condiciones de aplicar el 2 teorema de traslación

$$\mathscr{L}\left[h_4(t)\cos((t-4)+4)\right](z) = \cos(4)\,\frac{z-4}{(z-4)^2+1} - \mathrm{sen}\,(4)\,\frac{1}{(z-4)^2+1}; \qquad \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

DERIVADA TEMPORAL

Definición 1.9

Sea $f \in \mathscr{E}$*, diremos que* $f(t)$ *es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales en* $t \in [0,\infty[$ *y en cada subintervalo* $[a,b] \subset [0,\infty[$ *existe a lo sumo una cantidad finita de puntos donde* f *no es derivable.*

Teorema 1.4

Sea $f \in \mathscr{E}$ derivable a trozos y supongamos que $f' \in \mathscr{E}$. Si existe $\mathscr{L}[f(t)](z)$ para $z \in D_f$; se cumple:

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathscr{L}[f(t)](z) - f(0); \quad z \in D_f.$$

Demostración: *La demostración se obtiene aplicando la definición de transformada de Laplace sobre $f'(t)$*

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt,$$

e integración por partes

$$\begin{aligned} u &= e^{-zt} \Rightarrow du = -ze^{-zt} dt, \\ dv &= f'(t)\, dt \Rightarrow v = f(t), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt &= f(t)\, e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \int_0^\infty f(t)\, z e^{-zt} dt \\ &= \lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-zt} - f(0) + z\int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt \\ &= \lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-zt} - f(0) + z\mathscr{L}[f(t)](z). \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que el valor del límite es 0 ya que de otro modo no existiría $\mathscr{L}[f(t)](z)$. Como f es de orden exponencial para algún valor de γ, existirán una constante positiva M tal que si tomamos $t \to \infty$

$$\left|e^{-zt} f(t)\right| = e^{-\operatorname{Re}(z)t} |f(t)| \leq M e^{-\operatorname{Re}(z)t} e^{\gamma t} = M e^{-(\operatorname{Re} z - \gamma)t}$$

y puesto que $\operatorname{Re}(z) > \gamma$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\operatorname{Re} z - \gamma)t} = 0.$$

Se entiende el valor de $f(0)$ como el valor del límite a la derecha, es decir

$$f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Si la función tiene derivadas de orden superior, la transformada de Laplace se calcula de forma iterativa, por ejemplo para la derivada segunda se tiene en cuenta que $f''(t)$ es la derivada de *la derivada primera. Si llamamos* $g(t) = f'(t)$*, entonces* $g'(t) = f''(t)$ *y si aplicamos el teorema tendremos*

$$\mathscr{L}\left[g'(t)\right](z) = z\mathscr{L}\left[g(t)\right](z) - g(0);$$

es decir

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\right](z) = z\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) - f'(0);$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[f''(t)\right](z) &= z\left(z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= z^2\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - zf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Para las derivadas de orden superior tendremos la siguiente fórmula de cálculo

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

o en forma más compacta

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}f^{(k)}(0),$$

considerando

$$f^{(0)}(t) = f(t),$$

y que todas las funciones y derivadas están en $\mathscr{E}$*, es decir son de orden exponencial.*

Ejemplo 1.15

Sabiendo que para $a > 0$

$$\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} at\right](z) = \frac{a}{z^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

podemos calcular el valor de $\mathscr{L}\left[\cos at\right](z)$*. Está claro que si* $f(t) = \operatorname{sen}(at)$*, entonces*

$$f'(t) = a\cos(at)$$

por tanto utilizando la propiedad de derivación y por linealidad

$$\mathscr{L}\left[\cos at\right](z) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{a}a\cos at\right](z) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{a}f'(t)\right](z) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = \frac{1}{a}z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0),$$

es decir

$$\mathscr{L}\left[\cos at\right](z) = \frac{1}{a}z\frac{a}{z^2+a^2} = \frac{z}{z^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

puesto que

$$f(0) = \operatorname{sen} a \cdot 0 = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

DERIVADA EN EL PLANO DE LAPLACE

Si consideramos la transformada de Laplace como una función compleja de variable compleja dentro de su dominio de definición, nos preguntamos si dicha función es holomorfa dentro de dicho dominio.

Teorema 1.5

Sea $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que f es de orden exponencial γ y existe la transformada de Laplace de f en $z \in D_f$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, la función $t^n f(t)$ tiene transformada de Laplace y se cumple

$$\mathscr{L}[t^n f(t)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}(\mathscr{L}[f(t)](z))\,; \qquad z \in D_f.$$

Demostración: *La demostración del teorema se obtiene diferenciando bajo la integral directamente en la definición de transformada de Laplace.*

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt \Rightarrow \frac{d}{dz}\mathscr{L}[f(t)](z) = \frac{d}{dz}\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt,$$

y asumiendo las propiedades sobre convergencia de la integral impropia implicada podremos intercambiar las operaciones de integración y derivación

$$\frac{d}{dz}\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dz}\left(f(t)e^{-zt}\right)dt = -\int_0^\infty t f(t)e^{-zt}dt = -\mathscr{L}[t f(t)](z).$$

Si derivamos repetidamente obtendremos el resultado indicado en el teorema.

Ejemplo 1.16

Para calcular la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = t\,\mathrm{sen}(3t),$$

se utiliza directamente el teorema anterior

$$\mathscr{L}[t\,\mathrm{sen}(3t)](z) = -\frac{d}{dz}\mathscr{L}[\mathrm{sen}\,3t](z).$$

La transformada de $\mathrm{sen}(3t)$ *se obtiene utilizando la propiedad de cambio de escala*

$$\mathscr{L}[\mathrm{sen}\,3t](z) = \frac{1}{3}\mathscr{L}[\mathrm{sen}\,t]\left(\frac{z}{3}\right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathscr{L}[\mathrm{sen}\,t](z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow \mathscr{L}[\mathrm{sen}\,t]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{9}{z^2+9};$$

obtenemos el resultado buscado

$$\mathscr{L}[t\,\mathrm{sen}(3t)](z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{3}\frac{9}{z^2+9}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{3}{z^2+9}\right) = -\frac{-6z}{(z^2+9)^2} = \frac{6z}{(z^2+9)^2}; \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Ejemplo 1.17

Para calcular la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = t^2 e^t,$$

se utiliza directamente el teroema

$$\mathscr{L}\left[t^2 e^t\right](z) = (-1)^2 \frac{d^2}{dz^2} \mathscr{L}\left[e^t\right](z).$$

La transformada de e^t es tomando $\omega = 1$ en la exponencial

$$\mathscr{L}\left[e^t\right](z) = \frac{1}{z-1},; \qquad \operatorname{Re}(z) > 1$$

así que

$$\mathscr{L}\left[t^2 e^t\right](z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) = \frac{2}{(z-1)^3}; \qquad \operatorname{Re}(z) > 1.$$

Encontramos el mismo valor si aplicamos el primer teorema de traslación sobre la función t^2

$$\mathscr{L}\left[t^2\right](z) = \frac{2!}{z^3} \Rightarrow \mathscr{L}\left[t^2 e^t\right](z) = \mathscr{L}\left[t^2\right](z-1) = \frac{2!}{(z-1)^3}.$$

INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO TEMPORAL

Teorema 1.6

Sea $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que existe la transformada de Laplace de f en $z \in D_f$. Supongamos que $f(t)$ admite primitiva

$$g(t) = \int_0^t f(r)\,dr,$$

entonces $g(t)$ tiene transformada de Laplace y se cumple

$$\mathscr{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z}\mathscr{L}[f(t)](z); \quad con\ z \in D_f \cap \{Re(z) > 0\}.$$

Demostración: *La demostración se obtiene considerando $f(t) = g'(t)$ y teniendo en cuenta que $g(0) = 0$.*

$$\mathscr{L}\left[g'(t)\right](z) = z\mathscr{L}[g(t)](z) - g(0) = z\mathscr{L}[g(t)](z);$$

de donde

$$\mathscr{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z}\mathscr{L}\left[g'(t)\right](z) = \frac{1}{z}\mathscr{L}[f(t)](z).$$

CONVOLUCIÓN

Definición 1.10

Dadas dos funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, se define su producto de convolución *como*

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,g(t-s)\,ds.$$

Se puede comprobar con un simple cambio de variable que el producto de convolución así definido tiene la propiedad conmutativa

$$(f*g)(t)=(g*f)(t)\,.$$

En el caso de que las funciones estén definidas en $[0,\infty[$, siendo nulas fuera de ese intervalo, el producto de convolución se transforma en

$$(f*g)(t)=\int_{0}^{t}f(s)\,g(t-s)\,ds.$$

Teorema 1.7

Sean dos funciones $f,g:[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$. Se cumple

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si } F(z)=\mathscr{L}[f(t)](z); \quad \text{para } z\in D_f\\ y\\ \text{Si } G(z)=\mathscr{L}[g(t)](z); \quad \text{para } z\in D_g\end{array}\right\}\Longrightarrow\mathscr{L}[(f*g)(t)](z)=F(z)\,G(z)\,;X_2(s)\quad z\in D_f\cap D_g.$$

El teorema indica que: «La transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones es el producto habitual de las transformadas de Laplace de esas dos funciones».

Demostración: *En este caso la demostración requiere un poco más de esfuerzo pero se obtiene sencillamente aplicando el teorema de Fubini de intercambio de integrales.*
La región de convergencia del producto contiene a la intersección de las dos regiones pero puede ser un conjunto mayor; por ejemplo, si $F(z)=\frac{z+1}{z+2}$ con ROC el conjunto $\{z\in\mathbb{C}|\ Re(z)>-2\}$ y $G(z)=\frac{z+2}{z+1}$ con ROC el conjunto $\{z\in\mathbb{C}|\ Re(z)>-1\}$, el producto $F(z)\,G(z)=1$ está definido para cualquier valor de z.

Ejemplo *1.18*

Ilustramos el teorema anterior con un ejemplo. Tomamos $f(t)=t$ y $g(t)=t^2$. Por una parte tendremos la transformadas de cada una de las funciones

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)](z) &= \mathscr{L}[t](z)=\frac{1}{z^2}\\ \mathscr{L}[g(t)](z) &= \mathscr{L}\left[t^2\right](z)=\frac{2}{z^3}\end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular el producto de convolución de ambas funciones

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds = \int_0^t s(t-s)^2\,ds = \int_0^t s\left(t^2+s^2-2st\right)ds = \int_0^t \left(st^2+s^3-2s^2t\right)ds = \\ &= \frac{s^2t^2}{2}+\frac{s^4}{4}-\frac{2s^3}{3}\Bigg|_{s=0}^{s=t} = \frac{t^2t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3t}{3} = \frac{1}{12}t^4\end{aligned}$$

y si calculamos su transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\left[(f*g)(t)\right](z) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{12}t^4\right](z) = \frac{1}{12}\frac{4!}{z^5} = \frac{2}{z^5}$$

que podemos comprobar coincide con el producto de las transformadas de Laplace de f y g

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](z)\cdot\mathscr{L}\left[g(t)\right](z) = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{2}{z^3} = \frac{2}{z^5},$$

mientras que difiere obviamente de la transformada de Laplace del producto usual

$$\mathscr{L}\left[(f\cdot g)(t)\right](z) = \mathscr{L}\left[t\cdot t^2\right](z) = \mathscr{L}\left[t^3\right](z) = \frac{3!}{z^4} = \frac{6}{z^4}.$$

Por tanto

$$\mathscr{L}\left[(f*g)(t)\right](z) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](z)\cdot\mathscr{L}\left[g(t)\right](z) \neq \mathscr{L}\left[(f\cdot g)(t)\right](z).$$

1.5 Teoremas inicial y final

En esta sección se incluyen dos resultados que relacionan las funciones $f\in\mathscr{E}$ con su correspondiente transformada de Laplace.

Teorema 1.8

Sea $f\in\mathscr{E}$ entonces se cumple

$$\lim_{\operatorname{Re} z\longrightarrow+\infty}\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) = 0.$$

Este teorema afecta a las transformadas de Laplace de funciones continuas a trozos de orden exponencial, al principio del tema se ha indicado que el dominio de este tipo de funciones es un semiplano a la derecha, este teorema nos indica que dichas transformadas tienden a 0 *cuando* $\operatorname{Re} z$ *tiende a* ∞. *Este resultado sirve por ejemplo para determinar que no hay ninguna función f continua a trozos de orden exponencial cuya transformada de Laplace sea $F(z)=1$, ya que para este caso*

$$\lim_{\operatorname{Re} z\longrightarrow+\infty} F(z) = 1 \neq 0.$$

Esto no quiere decir que no exista otro tipo de función que tenga por transformada a $F(z)=1$, lo que indica el teorema es que esa función no puede ser una función continua a trozos de *orden exponencial, de hecho vamos a ver que para la llamada función delta de Dirac* $\delta(t)$ *sí ocurre*

$$\mathscr{L}[\delta(t)](z) = 1,$$

aunque esta función, $\delta(t)$, *no es una función en sentido formal, sino una distribución, de ahí que no esté en el conjunto* $\mathscr{E}$.

1.5.1 La función delta de Dirac

Dado $\Delta > 0$, *definimos la función impulso cuadrado de amplitud* $\frac{1}{\Delta}$ *y duración* Δ *a la función*

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & t \in [0,\Delta] \\ \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

cuya representación viene dada en la figura 1.5.

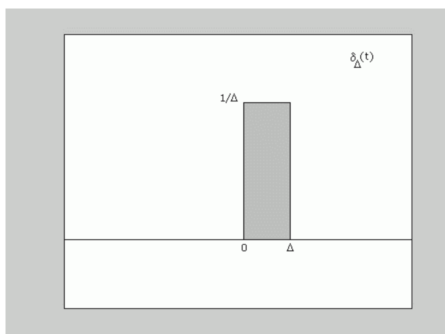

Figura 1.5: Función $\delta_\Delta(t)$.

Notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t)\,dt = \int_0^\Delta \frac{1}{\Delta} dt = 1.$$

que en términos de la función de Heaviside se escribirá como

$$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}(h_0(t) - h_\Delta(t)).$$

La transformada de Laplace de $\delta_\Delta(t)$ *es*

$$\mathscr{L}[\delta_\Delta(t)](z) = \mathscr{L}\left[\frac{1}{\Delta}(h_0(t) - h_\Delta(t))\right](z) = \frac{1}{\Delta}(\mathscr{L}[h_0(t)](z) - \mathscr{L}[h_\Delta(t)](z)) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-\Delta z}}{z}\right) = \frac{1-e^{-\Delta z}}{\Delta z}.$$

La función delta de Dirac (aunque no es una función en sentido usual sino una distribución) se obtiene al hacer $\Delta \to 0^+$, la duración del pulso disminuye pero crece en intensidad, formalmente

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 & \end{cases}$$

y su transformada de Laplace se obtiene del mismo modo tomando límites en $\mathscr{L}[\delta_\Delta(t)](z)$ cuando $\Delta \to 0^+$

$$\mathscr{L}[\delta(t)](z) = \lim_{\Delta \to 0^+} \mathscr{L}[\delta_\Delta(t)](z) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1-e^{-\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{ze^{-\Delta z}}{z} = 1,$$

donde hemos empleado la regla de L'Hôpital para el cálculo del límite, luego

$$\mathscr{L}[\delta(t)](z) = 1.$$

Teorema 1.9 Valor inicial

Sea $f \in \mathscr{E}$ derivable, de forma que $f' \in \mathscr{E}$. Entonces se cumple

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \longrightarrow +\infty} z\mathscr{L}[f(t)](z) = f(0).$$

Demostración: *Como $f, f' \in \mathscr{E}$, entonces se cumple*

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathscr{L}[f(t)](z) - f(0).$$

Pero aplicando el teorema anterior para f'

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \longrightarrow +\infty} \mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = 0,$$

y por tanto

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \longrightarrow +\infty} \mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = \lim_{\mathrm{Re}\, z \longrightarrow +\infty} (z\mathscr{L}[f(t)](z) - f(0)) = 0,$$

y el teorema queda demostrado.

N *De nuevo el teorema es válido cuando la función $f(t)$ es continua a trozos de orden exponencial y por tanto no puede tener impulsos, deltas o derivadas de deltas en el origen. La función $F(z)$ debe ser una función racional propia $F(z) = N(z)/D(z)$ con $\deg(N) < \deg(D)$.*

Teorema 1.10 Valor final

Sea $f \in \mathscr{E}$ derivable, de forma que $0 \in \mathscr{D}_f$. Entonces si existe y es fínito el $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t)$, *entonces*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow 0} z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t).$$

Demostración: *Utilizando la propiedad de la derivada*

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0),$$

o utilizando la definición de $\mathscr{L}$

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0),$$

y tomando límites cuando z *tiende a* 0

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt} dt = \lim_{z \longrightarrow 0} \left(z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0)\right),$$

intercambiando límite e integral (suponiendo convergencia)

$$\int_0^\infty \lim_{z \longrightarrow 0} f'(t)\, e^{-zt} dt = \lim_{z \longrightarrow 0} \left(z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0)\right),$$

es decir

$$\int_0^\infty f'(t)\, dt = \lim_{z \longrightarrow 0} \left(z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0)\right),$$

e integrando

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t) - f(0) = \lim_{z \longrightarrow 0} z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) - f(0),$$

y como $f(0)$ *no depende ni de* z*, ni de* t

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t) = \lim_{z \longrightarrow 0} z\mathscr{L}\left[f(t)\right](z).$$

N *Este teorema es válido cuando* $F(z)$ *no tiene polos en el semiplano derecho, ni en el eje imaginario.*

1.6 Transformada inversa de Laplace

La transformada de Laplace es un operador integral que transforma una función $f(t)$ *definida en el espacio temporal en una función* $F(z)$ *en el espacio de Laplace. En esta sección nos ocuparemos del problema de encontrar la función* $f(t)$ *cuya transformada de Laplace nos conduce a una función compleja* $F(z)$ *de variable compleja conocida, es decir una transformada inversa de la transformada de Laplace.*

Definición 1.11

Sea $F(z)$, diremos que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace, o una transformada inversa de $F(z)$ y escribimos:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(z)](t),$$

si ocurre

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = F(z).$$

Notar que como la transformada de Laplace está definida mediante una integral:

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt,$$

se puede deducir de inmediato que la transformada inversa no es única, por ejemplo, las funciones dadas por

$$a)\ f(t) = e^{-2t} \qquad b)\ g(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases},$$

verifican que

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = \mathscr{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z+2},$$

y sin embargo son funciones distintas.

Ejemplo 1.19

Puesto que

$$\mathscr{L}\left[e^{\omega t}\right](z) = \frac{1}{z-\omega},$$

se deduce que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-\omega}\right](t) = e^{\omega t}.$$

En sentido estricto deberíamos decir que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-\omega}\right](t) = e^{\omega t} h_0(t),$$

ya que estamos definiendo la transformada de Laplace para $t \geq 0$.

Ejemplo 1.20

Puesto que

$$\mathscr{L}\left[\operatorname{sen}\omega t\right](z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2},$$

se deduce que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{z^2+\omega^2}\right](t) = \operatorname{sen}\omega t, \quad [t \geq 0].$$

1.7 Propiedades de la transformada inversa

Como en el caso de la transformada directa, la transformada inversa de Laplace tiene algunas propiedades que nos va a permitir su cálculo de forma más fácil.

LINEALIDAD

Para cualquier par de complejos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, se cumple:*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\alpha F(z) + \beta G(z)\right](t) = \alpha \mathscr{L}^{-1}\left[F(z)\right](t) + \beta \mathscr{L}^{-1}\left[G(z)\right](t).$$

Ejemplo 1.21

Para calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)(z-2)}\right](t),$$

descomponemos la función en fracciones simples

$$\frac{1}{(z+3)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{z+3} + \frac{\frac{1}{5}}{z-2},$$

y aplicamos la propiedad de linealidad

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)(z-2)}\right](t) &= -\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+3)}\right](t) + \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-2)}\right](t) \\ &= -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.22

Para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z^2+9)}\right](t),$$

descomponemos la función en fracciones simples

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z^2(z^2+9)} &= \frac{\frac{1}{9}}{z}+\frac{\frac{1}{9}}{z^2}-\frac{1}{9}\frac{z+1}{z^2+9}\\ &= \frac{\frac{1}{9}}{z}+\frac{\frac{1}{9}}{z^2}-\frac{1}{9}\frac{z}{z^2+3^2}-\frac{1}{27}\frac{3}{z^2+3^2},\end{aligned}$$

y aplicamos linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z^2+9)}\right](t) &= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+3^2}\right](t)-\frac{1}{27}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{z^2+3^2}\right](t)\\ & \frac{1}{9}h_0(t)+\frac{1}{9}t-\frac{1}{9}\cos 3t-\frac{1}{27}\operatorname{sen} 3t.\end{aligned}$$

TRASLACIÓN

Teorema 1.11 Primer teorema de traslación para $\mathcal{L}^{-1}$

Sea $\omega\in\mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[F(z-\omega)](t)=e^{\omega t}\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t).$$

Ejemplo 1.23

Para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t),$$

se tiene en cuenta que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)=t,$$

y el primer teorema de traslación nos conduce a

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)=te^{-2t}.$$

Ejemplo 1.24

Para calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^2+6s+13}\right](t),$$

buscamos en primer lugar las raíces del denominador de la función

$$z^2+6z+13=0 \Longleftrightarrow z=-3\pm 2i,$$

y por tanto

$$z^2+6z+13=(z+3)^2+2^2.$$

De esta forma

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^2+6s+13}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(z+3)^2+2^2}\right](t),$$

y aplicando la propiedad de traslación

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(z+3)^2+2^2}\right](t)=e^{-3t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^2+2^2}\right](t)=e^{-3t}\operatorname{sen}2t.$$

Ejemplo 1.25

Para encontrar la transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{z-6}-\frac{6z}{z^2+9}+\frac{3}{2z^2+8z+10}\right](t),$$

aplicamos linealidad y transformamos el denominador de la última fracción

$$5\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-6}\right](t)-6\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{z}{z^2+9}\right](t)+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+2)^2+1}\right](t)=5e^{6t}-6\cos 3t+\frac{3}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}t.$$

Teorema 1.12 Segundo teorema de traslación para $\mathscr{L}^{-1}$

Sea $a>0$, *entonces*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-az}F(z)\right](t)=h_a(t)f(t-a).$$

Ejemplo 1.26

Para calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t),$$

empleamos el segundo teorema de traslación

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-3z}\frac{1}{z^3}\right](t)=h_3(t)\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t-3)$$

y como

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](t)=\frac{n!}{z^{n+1}},$$

entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t)=\frac{1}{2!}t^2,$$

de esta forma

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3z}}{z^3}\right](t)=h_3(t)\,\frac{1}{2!}(t-3)^2.$$

CONVOLUCIÓN

Teorema 1.13

Se cumple

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(z)\,G(z)\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F(z)\right](t)*\mathscr{L}^{-1}\left[G(z)\right](t).$$

Ejemplo 1.27

Calcularemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t),$$

haciendo uso de la convolución

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t)\\ &= f(t)*g(t),\end{aligned}$$

siendo en este caso

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) = t, \\ g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t) = te^{-2t}, \end{aligned}$$

luego

$$f*g = g*f = \int_0^t g(s)\,f(t-s)\,ds = \int_0^t se^{-2s}(t-s)\,ds = t\int_0^t se^{-2s}ds - \int_0^t s^2e^{-2s}ds,$$

Integrando obtenemos el valor de la función buscada

$$f*g = \frac{(t-1)}{4} + \frac{(t+1)}{4}e^{-2t}$$

FUNCIONES RACIONALES

Cuando $F(z) = P(z)/Q(z)$ *es una función racional con coeficientes reales con* $\deg(P) \leq \deg(Q)$, *entonces el cálculo de su transformada inversa pasa por descomponer la función en fracciones simples y calcular la inversa de cada una de las fracciones teniendo en cuenta, entre otros, los siguientes resultados*

1. *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *y* $n > 0$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\alpha)^n}\right](t) = \frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \qquad t \geq 0.$$

2. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right](t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad t \geq 0.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right](t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t, \qquad t \geq 0.$$

Ejemplo 1.28

Calcularemos la transformada inversa de Laplace de

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+1)^2}.$$

mediante la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{z^2(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{(z+1)} + \frac{D}{(z+1)^2},$$

y la aplicación de la propiedad de linealidad a las fracciones correspondientes

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right](t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{(z+1)}+\frac{D}{(z+1)^2}\right](t) = \\ & A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t)+B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t)+C\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)}\right](t)+D\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) \\ &= A+Bt+Ce^{-t}+Dte^{-t}.\end{aligned}$$

Quedan por determinar los coeficientes A, B, C y D

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{(z+1)}+\frac{D}{(z+1)^2}=\frac{Az(z+1)^2+B(z+1)^2+Cz^2(z+1)+Dz^2}{z^2(z+1)^2}=\frac{1}{z^2(z+1)^2},$$

$$\begin{aligned}Az(z+1)^2+B(z+1)^2+Cz^2(z+1)+Dz^2 &= 1 \\ Az^3+(2A+B+C+D)z^2+(A+2B)z+B &= 1\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}A+C &= 0 \\ 2A+B+C+D &= 0 \\ A+2B &= 0 \\ B &= 1\end{aligned}$$

con solución $A=-2$, $B=1$, $C=2$, $D=1$ *y la transformada inversa será*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+1)^2}\right](t)=-2+t+2e^{-t}+te^{-t}$$

Ejemplo 1.29

Calcularemos la transformada inversa de Laplace de

$$F(z)=\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}$$

mediante su descomposición en fracciones simples

$$\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3},$$

ahora usando linealidad y los resultados correspondientes

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}\right](t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}\right](t)= \\ & A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right](t)+B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right](t)+C\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-3}\right](t) \\ &= Ae^{-t}+Be^{-2t}+Ce^{3t}.\end{aligned}$$

Quedan por determinar los coeficientes A, B, y C; que hacemos de forma usual

$$\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3}=\frac{A(z+2)(z-3)+B(z+1)(z-3)+C(z+1)(z+2)}{z^2(z+1)^2}=\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)},$$

$$A(z+2)(z-3)+B(z+1)(z-3)+C(z+1)(z+2)=7z-1$$

y dándole valores a z

$$\begin{aligned}\text{Si } z &= -1\Rightarrow A(-1+2)(-1-3)=-8\Rightarrow A=\frac{-8}{(1)(-4)}=2 \\ \text{Si } z &= -2\Rightarrow B(-2+1)(-2-3)=-15\Rightarrow B=\frac{-15}{(-1)(-5)}=-3 \\ \text{Si } z &= 3\Rightarrow C(3+1)(3+2)=20\Rightarrow C=\frac{20}{(4)(5)}=1\end{aligned}$$

y la transformada inversa será

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7z-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}\right](t)=2e^{-t}-3Be^{-2t}+e^{3t}$$

Exercise 1 Calcula la transformada inversa de Laplace de

$$F(z)=\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}.$$

Exercise 2 Calcula la transformada inversa de Laplace de

$$F(z)=\frac{2z^2+10z}{(z^2-2z+5)(z+1)}.$$

1.8 Fórmula de inversión compleja

El modo más general para calcular la transformada inversa de Laplace de una función compleja de variable compleja es mediante la siguiente integral

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(z)](t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(z)e^{zt}dz,\qquad t\geq 0,$$

siendo γ *un número real tal que las singularidades de* $F(z)$ *queden todas a su izquierda, es decir,* $\mathrm{Re}(z) < \gamma$. *La integral es conocida como integral de Bromwich o integral de Fourier-Mellin.*

Teorema 1.14

Sea $F(z)$ *una función analítica, salvo en un número finito de polos que se encuentran a la izquierda de cierta vertical* $\mathrm{Re}(z) \leq \gamma$. *Y supongamos que existen m, R,* $k > 0$ *tal que para todo s del semiplano* $\mathrm{Re}(z) \leq \gamma$ *y* $|z| > R$, *tenemos que*

$$|F(z)| \leq \frac{m}{z^k},$$

entonces si $t > 0$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(z)](t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(e^{zt}F(z)\right),$$

siendo $z_1, \ldots, z_n$ *los polos de la función* $F(z)$.
En particular, el teorema es válido y se puede aplicar para

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

siendo $P(z)$ *y* $Q(z)$ *dos polinomios complejos de grado p y q respectivamente, con* $q > p$.

1.9 Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales

La transformada de Laplace se utiliza para resolver los llamados Problemas de Valor Inicial (P.V.I.) que implican ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t) \\ x(0) = x_{0,0} \\ x'(0) = x_{1,0} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

siendo $a_j \in \mathbb{R}$ *y* $x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ *es la derivada k-ésima de la función respuesta del sistema* $x(t)$, *los valores* $x_{k,0} \in \mathbb{R}$ *son las llamadas condiciones iniciales del modelo. Este tipo de problemas aparecen, por ejemplo, al modelizar un típico circuito LRC.*

El problema se resuelve usando la transformada de Laplace sobre la ecuación y utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada y finalmente utilizando la transformada inversa. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.30

Vamos a resolver el problema de valor inicial siguiente

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = -8e^{-t}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 12 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema utilizando la transformada de Laplace sobre la ecuación. Por una parte tenemos que $x(t) = -8e^{-t}$ *y por tanto*

$$X(z) = \mathscr{L}[x(t)](z) = -\frac{8}{z+1}.$$

Si aplicamos la Transformada de Laplace a la ecuación

$$\mathscr{L}\left[y''(t) - 2y'(t) + 5y(t)\right](z) = \mathscr{L}[x(t)](z),$$

por linealidad

$$\mathscr{L}\left[y''(t)\right](z) - 2\mathscr{L}\left[y'(t)\right](z) + 5\mathscr{L}[y(t)](z) = \mathscr{L}[x(t)](z)$$

y utilizando la propiedad de derivación temporal

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathscr{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z) - y(0) = zY(z) - 2 \\ \mathscr{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) - 2z - 12 \end{aligned}$$

$$\left\{z^2Y(z) - 2z - 12\right\} - 2\left\{zY(z) - 2\right\} + 5zY(z) = -\frac{8}{z+1}$$

Agrupando

$$Y(z)\left\{z^2 - 2z + 5\right\} = -\frac{8}{z+1} + 2z + 8 = \frac{2z^2 + 10z}{z+1}$$

y despejando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{2z^2 + 10z}{(z+1)(z^2 - 2z + 5)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 + 4,$$

vamos a realizar la descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{2z^2+10z}{(z+1)(z^2-2z+5)} = \frac{Az+B}{(z-1)^2+2^2} + \frac{C}{z+1} = \frac{3z+5}{(z-1)^2+4} - \frac{1}{z-1}$$

y entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+10z}{(z+1)(z^2-2z+5)}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3z+5}{(z-1)^2+4} - \frac{1}{z-1}\right](t) = \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3z-3+8}{(z-1)^2+4} - \frac{1}{z-1}\right](t) = 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+4}\right](t) + 4\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(z-1)^2+4}\right](t) - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right](t \\ &= 3e^t\cos 2t + 4e^t \operatorname{sen} 2t - e^{-t} \end{aligned}$$

y podemos comprobar que

$$y(0) = 3e^0\cos 2\cdot 0 + 4e^0 \operatorname{sen} 2\cdot 0 - e^{-0} = 3-1 = 2,$$

mientras que para $y'(t) = 11e^t\cos 2t - 2e^t \operatorname{sen} 2t + e^{-t}$, *tenemos*

$$y'(0) = 11e^0\cos 2\cdot 0 - 2e^0 \operatorname{sen} 2\cdot 0 + e^{-0} = 11-0+1 = 12.$$

Ejemplo 1.31

Sea el sistema

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= 5 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema utilizando la transformada de Laplace sobre la ecuación. Por una parte tenemos que $x(t) = 2$ *y por tanto*

$$X(z) = \mathscr{L}[x(t)](z) = \frac{2}{z}.$$

Si aplicamos la Transformada de Laplace a la ecuación

$$\mathscr{L}\left[y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)\right](z) = \mathscr{L}[x(t)](z),$$

por linealidad

$$\mathscr{L}\left[y''(t)\right](z) + 3\mathscr{L}\left[y'(t)\right](z) + 2\mathscr{L}[y(t)](z) = \mathscr{L}[x(t)](z)$$

y utilizando la propiedad de derivación temporal

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[y(t)](z) &= Y(z) \\ \mathscr{L}\left[y'(t)\right](z) &= zY(z) - y(0) \\ \mathscr{L}\left[y''(t)\right](z) &= z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

$$\left\{z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right\} + 3\{zY(z) - y(0)\} + 2zY(z) = \frac{2}{z}$$

Agrupando

$$Y(z)\left\{z^2 + 3z + 2\right\} = \frac{2}{z} + 3z + 14 = \frac{3z^2 + 14z + 2}{z}$$

y despejando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{3z^2 + 14z + 2}{z(z^2 + 3z + 2)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{z+1} - \frac{7}{z+2}$$

donde hemos descompuesto en fracciones simples y entonces

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(z)](t) = 1 + 9e^{-t} - 7e^{-2t}$$

y podemos comprobar que

$$y(0) = 1 + 9e^0 - 7e^0 = 1 + 9 - 7 = 3,$$

mientras que para $y'(t) = -9e^{-t} + 14e^{-2t}$, tenemos

$$y'(0) = -9e^0 + 14e^0 = -9 + 14 = 5.$$

Ejemplo ***1.32***

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace.

Función de transferencia.

Dada la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t),$$

siendo $x(t)$ la respuesta del sistema y $u(t)$ la entrada al mismo, entonces se define la función de transferencia como la razón entre la transformada de Laplace de la respuesta y la transformda de

Laplace de la entrada

$$T(z) = \frac{X(z)}{U(z)}$$

Estabilidad

Básicamente un sistema será estable si a entrada acotada el sistema responde con una entrada acotada, o equivalentemente, si el sistema no excitado por ninguna entrada, entonces la respuesta del sistema decae a cero cuando t tiende a infinito.
En el caso de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constante, la estabilidad se explica en términos de los polos de la función de transferencia.

1.9.1 Ejemplos resueltos

1. *Halla la transformada de Laplace de*

$$f(t) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 \le t < 3 \\ \\ 0 & si \quad t \ge 3 \end{cases}.$$

Solución:

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^3 5e^{-zt}dt + \int_3^\infty 0e^{-zt}dt = -\frac{5}{z}e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t=3} = \frac{5}{z} - \frac{5e^{-3z}}{z}.$$

2. *Halla la transformada de Laplace de*

$$f(t) = \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Solución: *Usando el coseno de una suma tendremos:*

$$\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos t \cos\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t$$

luego

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)](z) &= \mathscr{L}\left[\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right](z) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}[\cos(t)](z) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{L}[\operatorname{sen} t](z) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\frac{z-\sqrt{3}}{z^2+1} \end{aligned}$$

3. *Halla la transformada de Laplace de*

$$f(t) = e^{-4t}(7\cos 2t + 4\operatorname{sen} 5t)$$

Solución: *Por linealidad:*

$$\mathscr{L}[f(t)](z) = \mathscr{L}\left[e^{-4t}(7\cos 2t + 4\operatorname{sen} 5t)\right](z) = 7\mathscr{L}\left[e^{-4t}\cos 2t\right](z) + 4\mathscr{L}\left[e^{-4t}\operatorname{sen} 5t\right](z).$$

Por el primer teorema de traslación

$$7\mathscr{L}\left[e^{-4t}\cos 2t\right](z)+4\mathscr{L}\left[e^{-4t}\operatorname{sen} 5t\right](z)=7\mathscr{L}\left[\cos 2t\right](z+4)+4\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} 5t\right](z+4)$$

y por la propiedad de cambio de escala

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\cos 2t\right](z) &= \frac{z}{z^2+4}, \\ \mathscr{L}\left[\cos 5t\right](z) &= \frac{5}{z^2+25}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right](z) &= 7\frac{z+4}{(z+4)^2+4}+4\frac{5}{(z+4)^2+25} \\ &= \frac{7z+28}{(z+4)^2+4}+\frac{20}{(z+4)^2+25}.\end{aligned}$$

4. *Halla la transformada de Laplace de*

$$f(t)=\cos^2 t.$$

Solución: *El cálculo de esta transformada requiere la transformación de la función mediante la fórmula*

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2},$$

luego

$$\mathscr{L}\left[\cos^2 t\right](z)=\mathscr{L}\left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right](z),$$

y por linealidad

$$\mathscr{L}\left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right](z)=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[1\right](z)+\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[\cos 2t\right](z),$$

y mediante la propiedad de cambio de escala

$$\mathscr{L}\left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right](z)=\frac{1}{2z}+\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+4}=\frac{z^2+4}{z(z^2+4)}.$$

5. *Calcula la transformada inversa en cada caso*

a) $F(z)=\frac{2}{z^3}$ *b)* $F(z)=\frac{3}{z^2+9}$ *c)* $F(z)=\frac{z-1}{z^2-2z+5}$

Solución:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^3}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2!}{z^3}\right](t)=t^2$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{z^2+9}\right](t)=\operatorname{sen} 3t$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{z^2-2z+5}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+4}\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+2^2}\right](t)=e^t\cos 2t.$