



1. Sea $B(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, la bola abierta de centro 0 y radio 2, calcula y representa el conjunto $f(D)$ para:

a) $f(z) = 3 + i + z$ b) $g(z) = (1 + i)z$ c) $h(z) = \frac{1}{z}$

2. Encuentra las partes real e imaginaria de las siguientes funciones:

a) $f(z) = 3z^2 - iz$ b) $g(z) = \bar{z} + \frac{1}{z}$ c) $h(z) = z^3 + z + 1$ d) $k(z) = \cosh(z - i)$

e) $k(z) = \frac{1 - z}{1 + z}$ f) $l(z) = z^2 + i$ g) $m(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ h) $o(z) = \tan z$

3. Expresa en forma binómica las siguientes expresiones:

a) $e^i + e^{i\pi}$ b) e^{-1+i} c) $\log(-7\pi i)$ d) $\log(-1 - i)$

e) $\sin(3i)$ f) $\sin(1 + i)$ g) $\cos(-2i)$ h) $\log\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

4. Estudia las singularidades de las siguientes funciones, indicando su tipo:

a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ b) $f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$ c) $f(z) = \frac{1 + z^2}{z - i}$

d) $f(z) = e^{-1/z}$ e) $f(z) = \frac{z^5 + 1}{z^2 + 4}$ f) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 3)}$

g) $f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$ h) $f(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$ i) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$

5. Expresa en forma binómica las siguientes expresiones:

a) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]^i$ b) i^{ii} c) $(1 + i)^{e^{-i}}$ d) $i^{\log i}$

6. Calcula para $\theta = \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{4}, 0, \pi$, el valor de los siguientes logaritmos:

a) $L_\theta(3i)$ b) $L_\theta(-2i)$ c) $L_\theta(1 + i)$ d) $L_\theta(-1 - i)$ e) $L_\theta(-1)$

14. (*) Prueba que:

- a) Si v y V son armónicas conjugadas de una misma función u en D , entonces v y V difieren a los sumo en una constante.
- b) Si v es armónica conjugada de u en D y u es armónica conjugada de v , entonces u y v han de ser constantes en D .

15. Calcula utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las siguientes funciones:

- a) $f(z) = e^z$
- b) $f(z) = \operatorname{sen} z$
- c) $f(z) = \cos z$
- d) $f(z) = iz e^z$

16. Identifica como función $f(z)$ la función holomorfa

$$f(x + i \cdot y) = -2 - x^2 - y - 4xy + y^2 + i \cdot (1 + x + 2x^2 - 2xy - 2y^2).$$

17. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra sus armónicas conjugadas y expresa las correspondientes funciones $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ como funciones $f(z)$.

- a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$
- b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- c) $u(x, y) = 2e^x \cos y$
- d) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$
- e) $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$
- f) $u(x, y) = \arctan y/x$
- g) $v(x, y) = 4x - 4x^2 - 3y - 2xy + 3x^2y + 4y^2 - y^3$
- h) $u(x, y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

18. Comprueba que las siguientes funciones son armónicas, encuentra sus armónicas conjugadas y expresa las correspondientes funciones $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ como funciones $f(z)$.

- a) $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ con $f(\pi) = 1/\pi$
- b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ con $f(i) = 2i - 1$
- c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ con $f(1) = 1$
- d) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$ con $f(2 - i) = -8i$
- e) $u(x, y) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y - x$ con $f(0) = 0$

19. Estudia qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ hacen que las siguientes funciones sean armónicas, cuando lo sean encuentra las correspondientes funciones holomorfas $f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ e identifícalas como funciones $f(z)$.

a) $u(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - xy + 2x + 3y - 1$

b) $v(x, y) = ax^3y - 4xy^3$

c) $u(x, y) = x^3 + axy^2$

d) $u(x, y) = y^3 + ax^2y$

e) $v(x, y) = ax^3 - 4xy^3$

(*) Ejercicios con dificultad especial.

©Silvestre Paredes Hernández[®]