AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16

EXAMEN FINAL. 1–2–2016

Análisis Complejo

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- No está permitido el uso de calculadora programable.
- Los cálculos deben ser exactos y los ángulos deben expresarse en radianes.
- Todos los cálculos deben ser razonados adecuadamente.
- Entregue la hoja del enunciado.
- Procure empezar cada problema en una cara nueva.

1. Dada la función
$$u(x,y) = -2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3.$$

   (a) **(0.25 puntos)** Compruebe que u es armónica.

   (b) **(1.25 puntos)** Encuentre una función $v(x,y)$, para que la función definida por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera y cumpla $f(0) = i$. Exprese $f'(z)$ en forma binómica.

Solución.

(a) Si $u(x,y)$ debe ser una función armónica entonces debe cumplir la ecuación de Laplace
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$
Derivando $u(x,y)$ respecto x e y, una vez
$$\begin{aligned} u_x &= -4x + 12xy \\ u_y &= 4y + 6x^2 - 6y^2 \end{aligned}$$
y a continuación otra
$$\begin{aligned} u_{xx} &= -4 + 12y \\ u_{yy} &= 4 - 12y \end{aligned}$$
comprobamos que se cumple la ecuación 1:
$$\underbrace{(-4+12y)}_{u_{xx}} + \underbrace{(4-12y)}_{u_{yy}} = 0$$
luego $u(x,y)$ es armónica.

(b) Para el cálculo de $v(x,y)$, la parte imaginaria de $f(x,y)$, tendremos que aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones (aunque esta elección es indiferente para el resultado final):

$$u_x = v_y \Leftrightarrow -4x + 12xy = v_y$$

e integrando respecto a y obtenemos $v(x,y)$

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int (-4x + 12xy)\, dy = -4xy + 6y^2x + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ es constante para x y para encontrar su expresión derivamos $v(x,y)$ respecto de x

$$v_x = -4y + 6y^2 + \varphi'(x)$$

Por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esta expresión debe coincidir con $-u_y = -\left(4y + 6x^2 - 6y^2\right)$:

$$-4y + 6y^2 + \varphi'(x) = -4y - 6x^2 + 6y^2$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(x) = -6x^2$$

e integrando respecto a x se obtiene

$$\varphi(x) = -2x^3 + c \in \mathbb{R}$$

La expresión para $v(x,y)$ será

$$v(x,y) = -4xy + 6y^2x - 2x^3 + c$$

y la función $f(x,y)$

$$f(x,y) = \left(-2x^2 + 2y^2 + 6x^2y - 2y^3\right) + i\left(-4xy + 6y^2x - 2x^3 + c\right)$$

Notar que si $z = x + iy$, entonces podemos expresar $f(x,y)$ como función de z de la forma

$$f(z) = -i2z^3 - 2z^2 + ic$$

Como $f(0) = i$, podemos comprobar que $c = 1$.
La expresión para $f'(z)$ en forma binómica se obtiene de la expresión

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = (-4x + 12xy) + i\left(-4y + 6y^2 - 6x^2\right)$$

2. Dada la siguiente integral:

$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} dz; \qquad \gamma(t) = 1 + 2e^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad r > 0.$$

(a) **(1.25 puntos)** Calcule I usando el teorema de los residuos, justificando porqué se puede aplicar dicho teorema.

(b) **(0.25 puntos)** ¿Es posible calcular esta integral mediante las Fórmulas Integrales de Cauchy? Razone la respuesta.

Solución.

(a) El teorema de los residuos se puede aplicar directamente, puesto que la curva es cerrada (circunferencia de centro 1 y radio 2, orientada positivamente) y la función del integrando sólo tiene singularidades aisladas que podemos calcular fácilmente:

$$z^2(z-4)(z-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = 4 \end{cases}$$

Se comprueba que todas son singularidades tipo polo,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} &= \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \quad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Orden } 2 &\Rightarrow \lim_{z\to 0} z^2 \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-4)(z-1)} = \frac{1}{4} \in \mathbb{C} - \{0\} \\
\lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} &= \frac{e}{0} = \infty \quad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Orden } 1 &\Rightarrow \lim_{z\to 1} (z-1) \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z^2(z-4)} = -\frac{e}{3} \in \mathbb{C} - \{0\} \\
\lim_{z\to 4} \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} &= \frac{e^4}{0} = \infty \quad \text{Es tipo polo.} \\
\text{Orden } 1 &\Rightarrow \lim_{z\to 4} (z-4) \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} = \lim_{z\to 4} \frac{e^z}{z^2(z-1)} = \frac{e^4}{48} \in \mathbb{C} - \{0\}
\end{aligned}$$

El valor de la integral depende de las singularidades que estén dentro de la curva, para ello calculamos la distancia de cada singularidad al centro de la circunferencia, esta distancia debe ser menor que el radio

$$\begin{aligned}
z_1 &= 0 \Rightarrow d(1, z_1) = |z_1 - 1| = |0-1| = |-1| = 1 < 2 \Rightarrow z_1 \in \mathring{\gamma}; \\
z_2 &= 1 \Rightarrow d(1, z_2) = |z_2 - 1| = |1-1| = |0| = 0 < 2 \Rightarrow z_2 \in \mathring{\gamma}; \\
z_3 &= 4 \Rightarrow d(1, z_3) = |z_3 - 1| = |4-1| = |3| = 3 > 2 \Rightarrow z_3 \notin \mathring{\gamma};
\end{aligned}$$

Sólo hay que tener en cuenta las singularidades z_1 y z_2, de modo que

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-4)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right) .$$

Calcularemos ahora los residuos. Como z_2 es simple, el límite que hemos utilizado para conocer el orden del polo también proporciona el residuo, por tanto

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = -\frac{e}{3}.$$

Para calcular el residuo en z_1, que es un polo doble, usamos la fórmula general

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}z^2\frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-4)(z-1)} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-4)(z-1)-e^z(2z-5)}{(z-4)^2(z-1)^2} = \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

La integral será

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2(z-4)}dz = 2\pi i\left(\frac{9}{16}-\frac{e}{3}\right) = \pi i\left(\frac{27-16e}{24}\right).$$

(b) La fórmula integral de Cauchy se utiliza para calcular integrales que sólo tengan una singularidad en el interior de la curva, por tanto para este caso no es posible aplicar dicho teorema de forma directa ya que en la curva encontramos a 2 singularidades.

No obstante también sería correcto decir que si hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)}dz &= \int_\gamma e^z\frac{1}{z^2(z-4)(z-1)}dz = \int_\gamma e^z\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-4}+\frac{D}{z-1}\right)dz \\ &= \int_\gamma e^z\left(\frac{5/16}{z}+\frac{1/4}{z^2}+\frac{1/48}{z-4}+\frac{-1/3}{z-1}\right)dz \\ &= \frac{5}{16}\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz+\frac{1}{4}\int_\gamma\frac{e^z}{z^2}dz+\frac{1}{48}\int_\gamma\frac{e^z}{z-4}dz-\frac{1}{3}\int_\gamma\frac{e^z}{z-1}dz\end{aligned}$$

entonces cada una de las integrales puede calcularse mediante la formula integral de Cauchy.

3. Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=(t-2)\,h_2(t), \qquad t\geq 0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

(a) **(1.25 puntos)** Resuelva el problema mediante la transformada de Laplace.

(b) **(0.25 puntos)** Compruebe que se cumplen las condiciones iniciales dadas y la ecuación diferencial correspondiente.

Solución.

(a) Utilizando el segundo teorema de traslación obtenemos

$$\mathcal{L}[x(t)](z)=\mathcal{L}[(t-2)\cdot h_2(t)](z)=e^{-2z}\mathcal{L}[t](z)=\frac{e^{-2z}}{z^2}$$

Denotemos por

$$Y(z)=\mathcal{L}[y](s),$$
$$x(t)=(t-2)\cdot h_2(t),$$

por el apartado anterior

$$X(z) = \mathcal{L}[x(t)](z)) = \frac{e^{-2z}}{z^2}.$$

Entonces utilizando las propiedades de linealidad y derivación de la transformada de Laplace:

$$\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + Y(z) = X(z)$$

de donde

$$\left(z^2 Y(z) - 1\right) + Y(z) = X(z)$$

$$\begin{aligned} \left(z^2+1\right) Y(z) - 1 &= \frac{e^{-2z}}{z^2} \\ \left(z^2+1\right) Y(z) &= 1 + \frac{e^{-2z}}{z^2} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$Y(z) = \frac{1}{z^2+1} + e^{-2z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right).$$

Obtenemos $y(t)$ tomando la transformada inversa de $Y(z)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t).$$

Primero por linealidad podemos poner:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right)\right](t)$$

y utilizando el segundo teorema de traslación para la transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) + h_2(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t-2)$$

En el primer término la inversa es directa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) = \operatorname{sen}(t),$$

para el segundo podemos utilizar residuos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) = \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), 0\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right) + \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), -i\right).$$

Para $F(z)$

$$z = 0 \text{ polo doble de } F(z) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), 0\right) &= \lim_{z\to 0} \tfrac{1}{1!}\tfrac{d}{dz} z^2 e^{zt} F(z) = \lim_{z\to 0} \tfrac{d}{dz} e^{zt} \tfrac{1}{(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 0} t e^{zt} \tfrac{1}{(z^2+1)} + e^{zt} \tfrac{-2z}{(z^2+1)^2} \\ &= t \end{aligned}$$

$$z = i \text{ polo simple de } F(z) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z), i\right) &= \lim_{z\to i}(z-i)\, e^{zt} F(z) = \lim_{z\to i} e^{zt} \tfrac{1}{z^2(z+i)} = \\ &= e^{it} \tfrac{1}{-2i} \end{aligned}$$

$$z=-i \text{ polo simple de } F(z) \;\Rightarrow\; \operatorname{Res}\left(e^{zt}F(z),-i\right)=\lim_{z\to -i}(z+i)\,e^{zt}F(z)=\lim_{z\to -i} e^{zt}\tfrac{1}{z^2(z-i)}=$$
$$=e^{-it}\tfrac{1}{2i}$$

y obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2\left(z^2+1\right)}\right](t)=t-e^{it}\frac{1}{2i}+e^{-it}\frac{1}{2i}=t-\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=t-\operatorname{sen} t$$

La solución final será

$$y(t)=\operatorname{sen} t+h_2(t)\left((t-2)-\operatorname{sen}(t-2)\right)$$

(b) Para comprobar las condiciones iniciales y la ecuación diferencial, necesitamos conocer $y'(t)$ e $y''(t)$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \cos t+h_2(t)\left(1-\cos(t-2)\right), \\ y''(t) &= -\operatorname{sen} t+h_2(t)\left(\operatorname{sen}(t-2)\right), \end{aligned}$$

por tanto, teniendo en cuenta que $h_2(t)=0$ para $t\leq 2$

$$\begin{aligned} y(0) &= \operatorname{sen} 0+h_2(0)\left((0-2)-\operatorname{sen}(0-2)\right)=0+0\cdot(-2+\operatorname{sen} 2)=0, \\ y'(0) &= \cos 0+h_2(0)\left(1-\cos(0-2)\right)=1+0\cdot(1-\cos(2))=1 \end{aligned}$$

y para la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y''(t)+y(t) &= -\operatorname{sen} t+h_2(t)\left(\operatorname{sen}(t-2)\right)+\operatorname{sen} t+h_2(t)\left((t-2)-\operatorname{sen}(t-2)\right) \\ &= h_2(t)\,(t-2). \end{aligned}$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16

EXAMEN FINAL. 1–2–2016

Teoría de Campos

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(1 punto)** Demostrar que una serie de Fourier de una función $f(x)$ impar $2L$–periódica continua a trozos es de la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

siendo

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Solución. Teoría.

2. **(1 punto)** Dada la semiesfera Φ dada por $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$ y el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, yz, xz)$, la integral

$$\int\int_\Phi Rot(\mathbf{F})dS$$

se puede calcular como

$$\int_\gamma \mathbf{F}dl$$

donde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Explica porqué esto es así, es decir, qué resultado se aplica, comprobando que los elementos involucrados satisfacen las condiciones que permiten la aplicacion de dicho resultado. Finalmente, calcula las dos integrales del enunciado de forma independiente y comprueba que los resultados coinciden.

Solución. El resultado que se aplica es el Teorema de Stokes. Dicho teorema puede aplicarse al ser el campo vectorial polinómico y por tanto de clase C^∞, y ser la superficie la gráfica de una función de clase C^2

$$z = f(x, y) = +\sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

de tal manera que f está definido sobre un conjunto $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, cuya frontera es una curva de Jordan $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, que da lugar a la curva frontera de la superficie γ cuando $R = 1$. Si las orientaciones de la curva γ y la superficie son compatibles, entonces tendremos la igualdad. Calculamos ahora

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}dl &= \int_0^{2\pi} \langle(\cos t + \sin t, 0, 0), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t - \sin^2 t)dt = -\pi.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$Rot(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & yz & xz \end{vmatrix} = (0, -z, 1),$$

y parametrizamos la superficie como

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = +\sqrt{1-u^2-v^2}, \\ (u,v) \in \Omega = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int\int_{\Phi} Rot(\mathbf{F}) dS &= \int\int_{\Omega} \left\langle \left(0, -\sqrt{1-u^2-v^2}, 1\right), \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right) \right\rangle dudv \\ &= \int\int_{\Omega} (1-v) dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r\sin\varphi) r dr d\varphi = \pi, \end{aligned}$$

donde hemos empleado coordenadas polares. Como vemos, las orientaciones no son compatibles, por lo que habría que cambiar el signo de una de las dos integrales.

3. **(1 punto)** Sea S la superfice formada por la unión de las superficies $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 4$, y $x^2+y^2 = 4$, $4 \leq z \leq 10$. Calcula

$$\int\int_S \mathbf{F} dS$$

siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{y^2} + 4xyz, x^2y, z)$.

Solución. La superficie es la unión del paraboloide $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 4$, con un cilindro $x^2+y^2 = 4$, $4 \leq z \leq 10$ al cual le falta la tapa superior cuando $z = 10$. Si añadimos esta tapa, que llamaremos S_1, podemos aplicar el Teorema de Gauss

$$\int\int_{S \cup S_1} \mathbf{F} dS = \int\int\int_V div(\mathbf{F}) dxdydz,$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie. Como

$$div(\mathbf{F}) = 4yz + x^2 + 1,$$

tenemos que

$$\int\int\int_V div(\mathbf{F}) dxdydz = \int\int\int_{V_1} (4yz + x^2 + 1) dxdydz + \int\int\int_{V_2} (4yz + x^2 + 1) dxdydz,$$

donde V_1 es el volumen encerrado por el paraboloide y V_2 el encerrado por el cilindro. Pasando en ambos casos a coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\begin{aligned}\int\int\int_{V_1}(4yz+x^2+1)dxdydz &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(4rz\sin\varphi+r^2\cos^2\varphi+1)rd\varphi drdz\\ &= \int_0^4\int_0^{\sqrt{z}}(2r+r^3)\pi drdz=\int_0^4\left(z+\frac{z^2}{4}\right)\pi dz=\pi\frac{40}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int\int_{V_2}(4yz+x^2+1)dxdydz &= \int_4^{10}\int_0^{2}\int_0^{2\pi}(4rz\sin\varphi+r^2\cos^2\varphi+1)rd\varphi drdz\\ &= \int_4^{10}\int_0^{2}(2r+r^3)\pi drdz=48\pi.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{184}{3}\pi=\int\int_{S\cup S_1}\mathbf{F}dS=\int\int_S\mathbf{F}dS+\int\int_{S_1}\mathbf{F}dS.$$

Calculamos aparte

$$\int\int_{S_1}\mathbf{F}dS$$

con el vector normal apuntando en la dirección de positiva del eje z para hacerlo compatible con la orientación exterior de la superficie necesaria para aplicar el Teorema de Gauss. Parametrizamos S_1 como

$$\begin{cases} x=u,\\ y=v,\\ z=10,\\ (u,v)\in\Omega=\{(u,v):u^2+v^2\le 4\}.\end{cases}$$

con lo que

$$\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0,0,1)\,,$$

que como vemos nos da una orientación compactible. Entonces

$$\int\int_{S_1}\mathbf{F}dS=\int\int_\Omega\left\langle\left(e^{v^2}+40uv,u^2v,10\right),(0,0,1)\right\rangle dudv=10\int\int_\Omega 1dudv=40\pi.$$

Finalizamos

$$\int\int_S\mathbf{F}dS=\frac{184}{3}\pi-\int\int_{S_1}\mathbf{F}dS=\frac{184}{3}\pi-40\pi=\frac{64}{3}\pi.$$

4. **(1.5 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{yy}-u,\ t>0,\ y\in(0,3),\\ u(t,0)=u(t,3)=0,\ t>0,\\ u(0,y)=0,\ y\in(0,3),\\ u_t(0,y)=\sin(6\pi y).\end{cases}$$

Solución. Proponemos una solución de la forma $u(t,y)=T(t)Y(y)$, con lo que la ecuación queda de la forma

$$T''(t)Y(y)=Y''(y)T(t)-T(t)Y(t),$$

de donde

$$\frac{T''(t)+T(t)}{T(t)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

siendo λ constante. A partir de las condiciones de contorno construimos el problema de contorno

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \\ Y(0)=Y(3)=0, \end{cases}$$

con soluciones no nulas

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right), \quad n = 1,2,....$$

siendo $\lambda = \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2$. Nos queda entonces la ecuación diferencial para $T(t)$ de la forma

$$T''(t)+T(t)\left(1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2\right) = 0,$$

que nos da las soluciones

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}t\right),$$

con lo que proponemos la solución formal

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right).$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$u(0,y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right),$$

con lo que $a_n = 0$, $n \geq 1$. Por otra parte, derivando formalmente la solución

$$u_t(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\cos\left(\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right)$$

de donde

$$u_t(0,y) = \sin(6\pi y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right),$$

y

$$b_n\sqrt{1+\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin(6\pi y)\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right)dy = \begin{cases} 0 \ si \ n \neq 18, \\ 1 \ si \ n = 18, \end{cases}$$

con lo que

$$b_{18} = \frac{1}{\sqrt{1+(6\pi)^2}}$$

y la solución es

$$u(t,y) = \frac{1}{\sqrt{1+(6\pi)^2}}\sin\left(\sqrt{1+(6\pi)^2}t\right)\sin(6\pi y).$$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2015/16

EXAMEN FINAL. 1–2–2016

Parte Conjunta

1. **(1 punto)** Dado el método multipaso con forma

$$y_{i+1} = a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + h(b_{-1} f_{i+1} + b_0 f_i + b_1 f_{i-1}),$$

donde $f_i = f(t_i, y_i)$, siendo f la función que define una ecuación diferencial con condiciones iniciales que tiene solución única. Deducir las ecuaciones con las que dicho método tiene orden local $O(h^5)$.

Solución. Teoría.

2. **(1 punto)** Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & f(x,y) \\ \text{Sujeto a} & g(x,y) \leq 0 \end{array}$$

donde f y g son funciones suficientemente derivables. Indica paso a paso cómo se resuelve este problema, definiendo todos los conceptos que utilices.

Solución. Teoría.

3. **(2 puntos)** Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3y - z, \\ z' = -x - 2z + 4\cos(2t). \end{cases}$$

Determinar la solución para tiempos suficientemente grandes.

Solución. La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y por el Criterio del círculo de Gershgorin, sus valores propios están en el conjunto $B(-2,1) \cup B(-3,1)$, por lo que todos tienen parte real negativa y el sistema es asintóticamente estable. Por tanto la solución para tiempos suficientemente grandes sólo depende de la solución particular. Adicionalemente, podemos tomar condiciones iniciales nulas. Tomando la transformada de Laplace, el sistema nos queda

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[x](s) = -2\mathcal{L}[x](s) + \mathcal{L}[y](s), \\ s\mathcal{L}[y](s) = -3\mathcal{L}[y](s) - \mathcal{L}[z](s), \\ s\mathcal{L}[z](s) = -\mathcal{L}[x](s) - 2\mathcal{L}[z](s) + 4\frac{s}{s^2+4}. \end{cases}$$

Como

$$\mathcal{L}[y](s) = (s+2)\mathcal{L}[x](s),$$

y

$$\mathcal{L}[z](s) = -(s+3)\mathcal{L}[y](s) = -(s+3)(s+2)\mathcal{L}[x](s)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x](s) &= -(s+2)\mathcal{L}[z](s) + 4\frac{s}{s^2+4} \\ &= (s+2)^2(s+3)\mathcal{L}[x](s) + 4\frac{s}{s^2+4},\end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{L}[x](s)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right) = 4\frac{s}{s^2+4},$$

y por tanto

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{4s}{(s^2+4)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right)}.$$

Es fácil ver que $(1-(s+2)^2(s+3))$ es el polinomio característico de A. Para tiempos suficientemente grandes, al aplicar la fórmula de inversión compleja, sólo hemos de considerar $\pm 2i$, ya que todas las demás raíces del polinomio característico tienen parte real negativa. Entonces

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Res}\left(\frac{4se^{st}}{(s^2+4)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right)}, 2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{4se^{st}}{(s^2+4)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right)}, -2i\right) \\ &= \lim_{s\to 2i}\frac{4se^{st}}{(s+2i)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right)} + \lim_{s\to -2i}\frac{4se^{st}}{(s-2i)\left(1-(s+2)^2(s+3)\right)} \\ &= \frac{e^{2it}(34+48i)}{865} - \frac{e^{-2it}(-34+48i)}{865} = \frac{34}{865}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right) + \frac{48i}{865}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right) \\ &= \frac{68}{865}\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) - \frac{96}{865}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right) = \frac{4}{865}\left(17\cos(2t) - 24\sin(2t)\right).\end{aligned}$$

Ahora

$$y(t) = x'(t) + 2x(t) = -\frac{8}{865}\left(7\cos(2t) + 41\sin(2t)\right).$$

y

$$z(t) = -y'(t) - 3y(t) = \frac{8}{865}\left(103\cos(2t) + 109\sin(2t)\right).$$