Apuntes de Variable Compleja

Jose S. Cánovas Peña

9 de febrero de 2009

Advertencia.

- Estos apuntes **no** han sido corregidos. Cualquier errata o error que se detecte, por favor, escribid a mi dirección jose.canovas@upct.es, para que en un futuro se pueda subsanar.
- **No** son los apuntes de la asignatura. Son una guía que no tiene porqué corresponderse al cien por cien con lo explicado en clase.
- Se ha utilizado el símbolo $\overset{*}{=}$ para denotar un paso en alguna demostración que, siendo cierto, no está bien justificado. Normalmente cuando se trata de permuta de límites, como una integral con un sumatorio. Para un estudio de las pruebas rigurosas al cien por cien nos remitimos a la bibliografía al final de estas notas.

Índice General

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

Sumario. Suma y producto de números complejos. Potenciación y radicación de números complejos. Módulo y argumento. Topología del plano complejo. La esfera de Riemann.

1.1 Introducción a los números complejos

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0.$$

Nos encontramos entonces que

$$x^2 = -1$$

y no existe ningún número real que verifique tal condición. Introducimos entonces un nuevo número i de manera que verifique la ecuación, esto es,

$$i^2 = -1.$$

Este número, del que todavía no hemos apuntado sentido alguno, debe tener las siguientes peculiaridades. $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ y a partir de esta todas las potencias se repiten, teniéndose que

$$i^n = i^k,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

donde k es el resto de la división de n por 4, es decir $n = 4 \cdot l + k$, $l \in \mathbb{N}$.

Se define entonces un núnero complejo como una expresión de la forma

$$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Dicha manera de escribir un número complejo se dice binómica.

De esta manera, si operamos formalmente tenemos que la soluciones de la ecuación

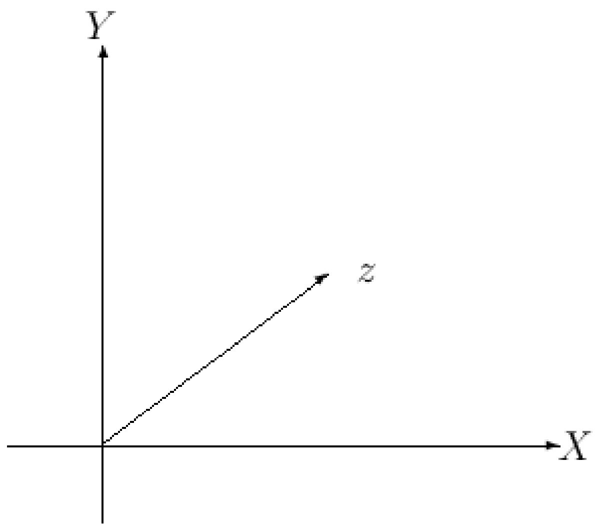
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm 1i,$$

con lo que puede resolverse cualquier ecuación algebraica de grado dos.

Dado un número complejo $z = a + ib$, se define su parte real $\operatorname{Re} z = a$ y su parte imaginaria $\operatorname{Im} z = b$. Si la parte imaginaria es nula el número es real, mientras que si la parte real es nula, el número complejo se dice imaginario puro. Entonces podemos identificar los números complejos como pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ donde la parte real sea el eje x y la parte imaginaria sea el eje y. Entonces podemos identificar los números complejos como vectores del plano



El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$ y es evidente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Operaciones con números complejos: el cuerpo complejo

Vamos a dotar al conjunto de los números complejos de unas operaciones suma y producto de tal manera que el conjunto $\mathbb{C}$ con estas operaciones tenga estructura de cuerpo conmutativo.

Para definir la suma tomamos como idea la idenficación hecha anteriormente de $\mathbb{C}$ con el plano real. Dados entonces los números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ definimos su suma

$$z + w = (a + c) + i(b + d),$$

es decir, atendiendo a la definición de suma de vectores en el plano real. Las propiedades de la suma son las siguientes.

(S1) La suma es conmutativa, es decir, dados $z, z' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z + z' = z' + z$.

(S2) La suma es asociativa, es decir, dados $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se cumple que $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

(S3) Existe elemento neutro que se corresponde con el 0. Así para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $z + 0 = z$.

(S4) Dado $z = a + bi$, existe su elemento simétrico $-a + i(-b)$, que también escribiremos $-a - bi$.

Con estas cuatro operaciones se dice que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo. Es importante darnos cuenta que cuando los números complejos no tienen parte imaginaria, entonces la suma de múmeros complejos es la suma de números reales que ya conocemos.

Esta última idea la tendremos también en cuenta a la hora de definir el producto de números complejos. Para fijar ideas, sean los números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ y definamos su producto como

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Como vemos, si tanto b como d son nulos, recuperamos el producto usual de los reales. El producto verifica las siguientes propiedades.

(P1) El producto es conmutativo, es decir dados $z, z' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z \cdot z' = z' \cdot z$.

(P2) El producto es asociativo, es decir, dados $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se cumple que $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$.

(P3) Existe el elemento neutro 1 que se corresponde con el neutro de los reales. Es decir $1 \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(P4) Todo número complejo z no nulo verifica que tiene inverso. Si $z = a + bi$ su inverso será $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

(P5) Propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

Con estas propiedades (S1)–(S4) y (P1)–(P5) se verifica que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

1.3 El conjugado de un número complejo

Dado $z = a + ib$, se define su complejo conjugado $\overline{z} = a - ib$. El conjugado tiene las siguientes propiedades.

(C1) $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(C3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(C4) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(C5) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $z = \overline{z}$.

La demostración de estas propiedades es sencilla. Por ejemplo para probar (C1) basta darse cuenta de que al cambiar dos veces de signo el número complejo queda como estaba. Para probar (C2), tomemos $z = a + ib$ y $w = c + id$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{(a+c+i(b+d))} = a+c-i(b+d) \\ &= (a-ib)+(c-id) = \overline{z}+\overline{w}. \end{aligned}$$

Para probar (C3), démonos cuenta de que

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd+i(ad+bc))} = ac-bd-i(ad+bc)$$

y por otro lado

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a-bi)\cdot(c-di) = ac-bd-i(ad+bc),$$

con lo que la propiedad (C3) se verifica. Para probar (C4) hay que darse cuenta de que

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

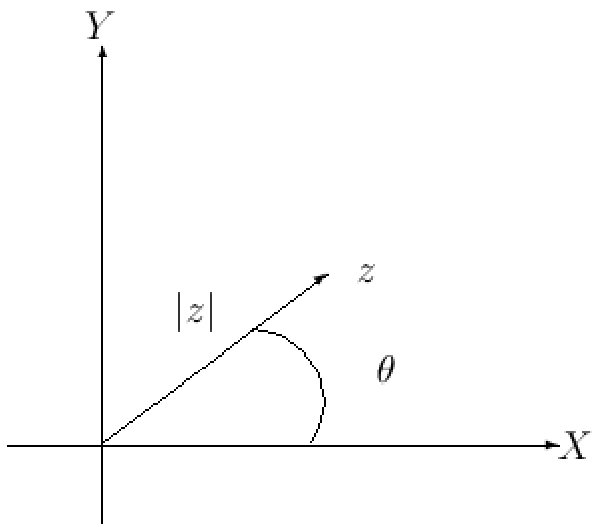
Por último, la propiedad (C5) es inmediata.

El uso del conjugado es muy útil en algunas ocasiones. Por ejemplo, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que su elemento inverso puede escribirse como

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

1.4 Módulo y argumento de un número complejo

Ya vismo que los número complejos los podemos identificar con el plano $\mathbb{R}^2$. En virtud de esta identificación, a todo número complejo $z \neq 0$ podemos asociarle y módulo y un argumento o ángulo que forma el vector determinado por el número complejo con el eje x.



Empecemos por el módulo. Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define su módulo como

$$|z| := +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

La propiedades del módulo son las siguientes:

(M1) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $|z| \geq 0$ y además $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.

(M2) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$.

(M3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(M4) Si $z \neq 0$ entonces $|z^{-1}| = 1/|z|$.

(M5) Si $z \neq 0$, entonces para todo $w \in \mathbb{C}$, $|w/z| = |w|/|z|$.

(M6) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**. Para todo par de números complejos z, w se verifica que $|\operatorname{Re}(z \cdot w)| \leq |z| \cdot |w|$ e $|\operatorname{Im}(z \cdot w)| \leq |z| \cdot |w|$.

(M7) **Desigualdad triangular.** Dados $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

La primera propiedad es inmediata debido a la propia definición de módulo. Por otra parte $a^2 + b^2 = 0$ si y solamente si $a = b = 0$ con lo que la primera propiedad (M1) se verifica. Para comprobar la propiedad (M2) notemos que $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \max\{a, b\} \leq +\sqrt{a^2 + b^2}$. Probemos ahora (M3) para lo cual hacemos el cálculo

$$|z \cdot w| = +\sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w}} = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w|.$$

Probemos ahora (M4) teniendo en cuenta que $z \cdot z^{-1} = 1$ y utilizando (M3) tenemos que

$$|z \cdot z^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| = 1,$$

de donde se deduce que

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1/|z|.$$

La propiedad (M5) se deduce automáticamente de las propiedades (M3) y (M4). Para probar (M6) sabemos que por (M2) y (M3)

$$|\operatorname{Re}(z \cdot w)| \leq |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

e

$$|\operatorname{Im}(z \cdot w)| \leq |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Finalmente, para demostrar la propiedad triangular, calculamos

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\overline{z + w}) = (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} + z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{z \cdot \overline{w}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

de donde tomando cuadrados obtenemos la desigualdad pedida.

Pasemos a continuación a introducir el argumento de un número complejo. Para ello sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un número real θ se dice un argumento de z si se verifica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= |z| \cos\theta, \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin\theta. \end{aligned}$$

Démonos cuenta que si θ es un argumento de z, cualquier multiplo de 2π de θ también es un argumento, por lo que el conjunto de los argumentos será

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \{\theta : \operatorname{Re} z = |z|\cos\theta,\ \operatorname{Im} z = |z|\sin\theta\} \\ &= \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

donde θ es el único argumento comprendido entre $[0, 2\pi)$.

Un número complejo $z \neq 0$ se dice que está en forma polar si $z = |z|_\theta$, $\theta \in \arg(z)$. Se dice que está en forma trigonométrica si se escribe como $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in \arg(z)$. Ambas formas tratan de escribir el número complejo dependiendo de su módulo y su argumento, al igual que las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$. Pero además en el caso de los números complejos, las formas polar y trigonométrica son útiles para trabajar con el producto, potencias y raíces de números complejos.

Por ejemplo sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y multipliquémoslos en forma trigonométrica. Entonces, si $\theta \in \arg(z)$ y $\varphi \in \arg(w)$ tenemos que

$$\begin{aligned}z \cdot w &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))\end{aligned}$$

con lo que en foema polar, hacer una multiplicación de números complejos es básicamente multiplicar los módulos y sumar los argumentos, esto es

$$z \cdot w = (|z| \cdot |w|)_{\theta+\varphi}.$$

Igualmente si $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = (|z|^n)_{n\theta}$$

y si $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)_{\theta-\varphi}.$$

También son útiles las coordenadas polares para obtener las raíces n–ésimas de un número complejo. Si $z \neq 0$, entonces $w = \sqrt[n]{z}$ si y sólo si $z = w^n$. Entonces

$$w^n = (|w|^n)_{n\varphi} = |z|_\theta,$$

de donde

$$|w|^n = |z|$$

o equivalentemente

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

y

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, si $k \notin \{0, 1, ..., n-1\}$ tenemos que $k = n \cdot l + p$, $p \in \{0, 1, ..., n-1\}$ con lo que

$$\frac{\theta + 2\pi k}{n} = \frac{\theta + 2\pi(nl + p)}{n} = \frac{\theta + 2\pi p}{n} + 2\pi l$$

con lo que todos los argumentos de las raíces están son

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, ..., n-1$$

y por tanto las raíces son

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_{\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \; k = 0, 1, ..., n-1.$$

1.5 Topología del plano complejo

La topología del plano complejo es similar a la que el alumno conoce de $\mathbb{R}^2$. Basta darse cuenta para ello que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces su módulo $|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = +\sqrt{a^2 + b^2}$ coincide con el módulo o norma del vector del plano correspondiente.

Así, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se define la bola abierta de centro z_0 y radio r al conjunto

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

y se define la bola cerrada como

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dirá abierto si para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ de manera que $B(z_0, r) \subset A$. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dice cerrado si su complementario $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto. Por supuesto que la bola abierta (respectivamente cerrada) es un conjunto abierto (respectivamente cerrado). Por ejemplo el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

es un conjunto abierto mientras que el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

es cerrado. Por supuesto existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados, como por ejemplo

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Dado un conjunto A se define el interior de A, $\operatorname{Int}(A)$, como el mayor abierto contenido en A. Se define su clausura, $\operatorname{Cl}(A)$, como el menor cerrado que contiene a A. Se define la frontera de A, $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)$. El conjunto A es acotado si existe $M > 0$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in A$. A se dirá compacto si es cerrado y acotado.

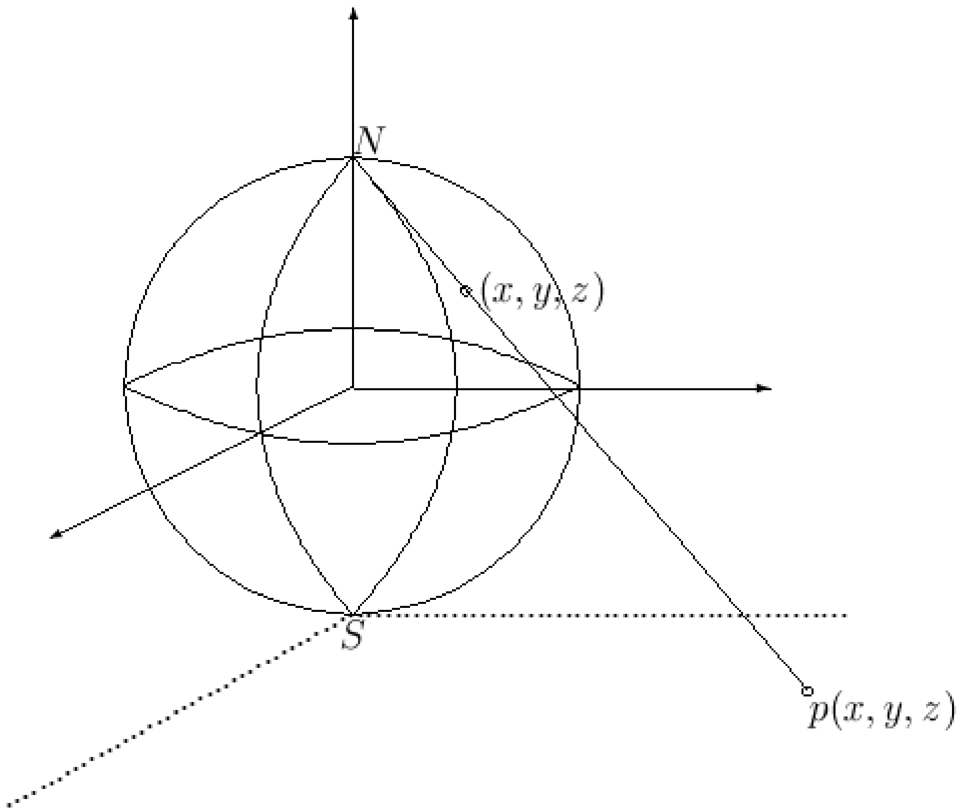
Por último, un punto z_0 es punto de acumulación de A si para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $B(z_0, \varepsilon) \cap A$ contiene infinitos puntos. Los puntos de acumulación son importantes porque son aquellos con los que calcularemos los límites y las nociones asociadas de derivada. Es fácil darse cuenta que si A es un conjunto abierto, entonces todos sus puntos son de acumulación.

1.5.1 La esfera de Riemann

Igual que en la recta real tenemos dos símbolos $+\infty$ para indicar números reales arbitrariamente grandes y $-\infty$ para indicar números reales arbitrariamente pequeños, en en cuerpo de los números complejos tenemos un simbolo ∞ para indicar números complejos con módulo arbitrariamente grande. Para visualizar este símbolo, consideramos la esfera S^2 dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sea $N = (0, 0, 1)$ su polo norte y $S = (0, 0, -1)$ su polo sur. Identificamos el conjunto de números complejos con el plano $z = -1$ (es decir un número complejo $z = a + ib$ lo escribiremos $(a, b, -1)$) y construimos una aplicación biyectiva $p : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$p(x, y, z) = \frac{-2(x + iy)}{z - 1}$$

y que se obtiene de la intersección de la recta que pasa por N y el punto (x, y, z) con el plano $z = -1$.



Entonces podemos identificar el infinito del plano complejo con el polo norte de la esfera, que se conoce con el nombre de esfera de Riemann. Con estas ideas, obtenemos la bola de centro ∞ como

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}.$$

Ademas $z + \infty = \infty$, si $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty$, $\infty^{-1} = 0$ y $0^{-1} = \infty$. Como siempre $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ y ∞/∞ son indeterminaciones, que habrá que resolver en el cálculo de los límites.

1.5.2 Sucesiones de numeros complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación $z_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Toda sucesión de números complejos la podemos ver como dos sucesiones de números reales al verificarse que $z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n$. De esta manera el cálculo de límites se reduce a lo siguiente:

- $\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = b$.
- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Es decir, el cálculo de límites de sucesiones de variable compleja se hace una vez conocido el cálculo de límites para sucesiones de variable real.

1.5.3 Series de numeros complejos

Lo mismo que hemos apuntado para sucesiones de números complejos ocurre para series de números complejos. Dada una sucesión de numeros complejos z_n se contruye la serie de término genera z_n generando la suceción $s_n = s_1 + s_2 + ... + s_n$. Al posible límite de dicha sucesión lo denotamos formalmente por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y decimos que la serie es convergente si el límite es un número complejo y divergente en caso contrario. De nuevo tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ por lo que podemos dar los siguientes casos.

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ son convergentes.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. La convergencia absoluta implica la convergencia pero no al revés (por ejemplo considerar la serie ya conocida $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$).

Por último, si tenemos dos series de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, podemos multiplicar ambas series de la siguiente manera

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) = z_1 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + z_2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + ... + z_n \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + ...$$

Este producto, si ambas series son absolutamente convergentes puede reordenarse de la manera siguiente

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot w_{n-i+1},$$

que se conoce como forma del producto de Cauchy de series.

1.6 Ejercicios

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:

(a) $(1+i)^3$	(c) $\frac{2+3i}{3-4i}$	(e) $i^5 + i^{16}$	(g) $1 + i + i^2 + i^3$
(b) $\frac{1}{i}$	(d) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$	(f) $2_{\pi/2}$	(h) $1_{\pi/4}$

2. Escribir en forma algebráica los complejos siguientes, donde ρ denota el módulo y θ un argumento

   a) $\rho = 2, \theta = \pi$ b) $\rho = 1, \theta = -\pi/4$
   c) $\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/3$ d) $\rho = 2, \theta = -\pi/2$

3. Calcular las siguientes raíces:

   (a) $\sqrt[3]{1}$ (c) $\sqrt[3]{i}$ (e) $\sqrt[6]{-8}$ (g) $\sqrt[4]{-1}$
   (b) $\sqrt[8]{1}$ (d) $\sqrt{1-i}$ (f) $\sqrt{3+4i}$ (h) $\sqrt[3]{-2+2i}$

4. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

   (a) $3+4i$ (b) $\frac{1+i}{1-i}$ (c) $\mathrm{i}^7 + i^{10}$ (f) $1+i+i^2$

5. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

   (a) $2i$ (c) $-3i$ (e) -1 (g) $\sqrt[4]{-1}$
   (b) 3 (d) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (f) $-3+i\sqrt{3}$ (h) $\sqrt[3]{-2+2i}$

6. Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (e) $\{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} \leq 1\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = i\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$ (f) $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z| < 1\}$

7. Representar gráficamente el conjunto de los puntos del plano z tales que se verifica:

   (a) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = z\overline{z}$ (b) $|z|^{-1} \geq 1$, $(z \neq 0)$ (c) $|z - 5i| = 8$ (d) $|z - 5i| = 8$
   (e) $\mathrm{Im}(z^2) > 2$ (f) $\mathrm{Re}(\overline{z^{-1}}) = 1$ (g) $2 < |z| < 3$ (h) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$
   (i) $|z-2| = |1 - 2\overline{z}|$ (j) $\mathrm{Re}\,(z^2 - z) = 0$

8. Dados los números complejos $z_1 = -2 - i$ y $z_2 = -4 + i$. Hallar $z_1 + z_2$, $3z_1 - 2z_2$, $z_1 z_2$, $(z_2)^{-1}$, $\frac{z_1}{z_2}$.

9. Si $z_1 = 6i$ y $z_2 = 8 - i$, hallar $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^2 - z_1$.

10. Hallar las partes real e imaginaria del complejo $z = \frac{1-i}{1+i}$.

11. Determinar x e y, para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy) = i$.

12. Calcular $(2+2i)^2$, $(2-2i)^2$, $(2+2i)(2-2i)$.

13. Demostrar que $|z| = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z^{-1})$.

14. Encontrar las cuatro raíces cuartas de $z_1 = -8(1 - \sqrt{3}i)$ y de $z_2 = -81$.

15. Calcular $(-1 + \sqrt{3}i)^{30}$, $\sqrt[3]{-1+i}$.

16. ¿En qué vector se transforma $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo $\pi/2$?.¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Demostrar la *identidad de Lagrange*, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se verifica
$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$
Indicación: Considerar el número complejo $z = (a+bi)(c+di)$ y hallar su módulo de dos modos diferentes.

18. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales, esto es, $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$. Se pide:
    (a) Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple la igualdad $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.
    (b) Usando el apartado anterior, probar que si z_0 es solución compleja de $P(z) = 0$, entonces su conjugado también es solución.
    (c) Calcular todas las soluciones de $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

19. Resolver las ecuaciones
$$\text{(a) } x^2+1=0 \quad \text{(b) } x^3+2=0 \quad \text{(c) } x^5+64=0 \quad \text{(d) } (x^2+4)(x-1)^2=0.$$

20. Estudiar la convergencia de las siguientes series complejas:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+i}{n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+i)^n}{n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)+\frac{i}{n}}{n^2}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)+i\sin(n\pi)}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{in \sin n}{3^n}$

21. Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, comprobar que es absolutamente convergente si $|z| < 1$ y que es divergente para $|z| > 1$. Estudiar su carácter para $z \in \{1, -1, i, -i\}$.

22. Supongamos que $\preceq$ es una relación de orden sobre $\mathbb{C}$ de manera que restringida a $\mathbb{R}$ coincide con la usual, es decir, si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \preceq y$ si y sólo si $x \leq y$. Supongamos que $\preceq$ cumple las condiciones de compatibilidad:
    (P1) $z \preceq z'$ si y sólo si $z + w \preceq z' + w$ para todo $w \in \mathbb{C}$.
    (P2) $z \preceq z'$ y $0 \preceq w$ implica $z \cdot w \preceq z' \cdot w$.

    Comprobar que para dicha relación se cumple que $i \npreceq 0$ y $0 \npreceq i$, con lo que $\mathbb{C}$ no está totalmente ordenado.

23. Comprobar que la relación $\preceq$ definida por
$$z \preceq z' \Leftrightarrow \text{Re}z \leq \text{Re}z' \text{ e } \text{Im}z \leq \text{Im}z'$$
es de orden sobre $\mathbb{C}$ y verifica las hipótesis (P1) y (P2) del ejercicio anterior.

24. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ comprobar las desigualdades:
    (a) $|z-w| \geq ||z| - |w||$.
    (b) $|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
    (c) $|1 - \overline{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$.

Capítulo 2

Funciones de variable compleja. Derivada en sentido complejo.

Sumario. Funciones de variable compleja. Primeros ejemplos. La función exponencial. Seno y Coseno complejos. Logaritmo complejo. Derivada compleja. Condiciones de Cauchy–Riemann.

2.1 Funciones de variable compleja

Una función de variable compleja es aquella $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida sobre un subconjunto de los números complejos A y cuya imagen está contenida a su vez en dicho cuerpo. Para todo $z \in A$ se cumple entonces que $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$, por lo que se definen las partes real e imaginaria (o funciones coordenadas) de f cómo $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Vamos a ver a continuación algunos los primeros ejemplos de funciones de variable compleja.

2.1.1 Polinomios con coeficientes complejos

Un polinomio con coeficientes complejos es una función de la forma $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada para cada $z \in \mathbb{C}$ por $p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + a_1 \cdot z + a_0$, donde $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i \leq n$. Los polinomios son las funciones que se contruyen usando sumas y productos de números complejos y, desde el punto de vista del cálculo, son las funciones más simples.

Veamos cómo obtener la parte real e imaginaria de un polinomio de variable compleja. Por ejemplo, consideremos el polinomio $p(z) = z^2 + 2z + i$ y suponiendo que $z = x + iy$ tenemos que

$$\begin{aligned} p(x+iy) &= (x+iy)^2 + 2(x+iy) + i \\ &= x^2 - y^2 + i2xy + 2x + i2y + i \\ &= x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + 1), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p(x+iy) &= x^2 - y^2 + 2x, \\ \operatorname{Im} p(x+iy) &= 2xy + 2y + 1. \end{aligned}$$

2.1.2 Funciones racionales complejas

Son aquellas funciones que se construyen con las operaciones básicas del cuerpo de los números complejos incluyendo la división. Son por tanto funciones de la forma

$$Q(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios complejos. Dicha función estará definida en el conjunto $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$, es decir, para todo número complejo excepto para aquellos que anulan el denominador de la fracción. Ejemplos de funciones racionales complejas son $Q(z) = z/(z^2+i)$ o $Q(z) = (z^3+iz-1+i)/z$. Es un buen ejercicio que recomendamos al alumno el obtener las funciones parte real e imaginaria para funciones de este tipo.

2.1.3 Función exponencial compleja

La función exponencial compleja, dada para todo $z \in \mathbb{C}$ por la serie

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Hemos de hacer notar en primer lugar que para todo número complejo z se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|},$$

es decir, la serie de los valores absolutos converge a la exponencial real y por tanto la serie que define la exponencial compleja es absolutamente convergen y por tanto convergente. Probamos de este modo que la función exponencial está definida en todo el campo complejo. Veamos a continuación alguna de sus propiedades.

En primer lugar, si $z, w \in \mathbb{C}$, y dado que las series son aboslutamente convergentes

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \cdot \frac{w^{n-i}}{(n-i)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot z^i \cdot w^{n-i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

En segundo lugar, si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x + i \sin x, \end{aligned}$$

dado que $i^{2n} = (-1)^n$ e $i^{2n+1} = i(-1)^n$. A partir de esta forma podemos dar la forma exponencial de un número complejo que es de la forma

$$z = |z| e^{i\theta}, \ \theta \in \arg(z).$$

Además, si $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$|e^{ix}| = +\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

de donde tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica

$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}| = e^{\operatorname{Re} z},$$

por lo que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por último, las funciones coordenadas de la exponencial se calculan, si $z = x + iy$, como

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x+iy) &= e^x \cos y, \\ \operatorname{Im} f(x+iy) &= e^x \sin y. \end{aligned}$$

2.1.4 Funciones trigonométricas complejas

La funciones trigonométricas complejas son definidas para todo $z \in \mathbb{C}$ a partir de la exponencial como

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Puede verse como ejercicio que en virtud de la definición de la función exponencial como una serie, también pueden escribirse como una serie de la forma

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Además, de la definción pueden definirse las siguientes propiedades análogas a las que se daban para las funciones trigonométricas reales.

(T1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(T2) Para todo $z \in \mathbb{C}$, se verifica que $\sin(-z) = -\sin(z)$ y $\cos(-z) = \cos z$.

(T3) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, se verifica que $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \sin w \cdot \cos z$ y $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$.

(T4) $\sin z = 0$ si y sólo si $z = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(T5) $\cos z = 0$ si y sólo si $z = \pi/2 + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Es un buen ejercicio probar todas estas propiedades, así como otras que no están en esta lista y que sin duda son conocidas por el alumno. Para finalizar y como una de las mayores diferencias con las funciones trigonométricas reales, notemos que las funciones trigonométricas complejas no están acotadas por 1. Por ejemplo

$$|\sin(2i)| = \left|\frac{e^{-2} - e^{2}}{2i}\right| = \frac{e^{2} - e^{-2}}{2} \approx 3.6269... > 1.$$

De hecho, si $x > 0$,

$$|\sin(xi)| = \left|\frac{e^{-x} - e^{x}}{2i}\right| = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

por lo que el módulo del seno puede ser tan grande como queramos. Un razonamiento análogo sirve para el coseno.

2.2 Límites de funciones de variable compleja

Debido a que la topología del plano complejo es como la de $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, la noción de límite de una función de variable compleja es similar a la misma noción para funciones del plano en sí mismo. Más precisamente, sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ punto de acumulación de A.

Se dice que f tiende a $l \in \mathbb{C}$ cuando z tiende a z_0, y se escribirá $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Se dice que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z)| > M$.

Se dice que $\lim_{z\to\infty} f(z) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|z| > N$, entonces $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Por último, diremos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe $N > 0$ de manera que si $|z| > N$, entonces $|f(z)| > M$.

Los límites de funciones de variable compleja tienen las siguientes propiedades que son análogas a aquellas de los límites de funciones del plano.

(L1) Si el límite existe, entonces es único.

(L2) $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l$ y $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l$.

Esta segunda propiedad nos permite tratar con los límites como si de funciones reales del plano se tratara. Por ejemplo, si queremos calcular

$$\lim_{z\to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2},$$

y no hay indeterminación. Pero si hay indeterminación, como en el caso siguiente, todo lo aprendido en la asignatura de cálculo es útil para calcular los límites. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0},$$

presenta una indeterminación. Para resolverla vamos a obtener primero las funciones coordenadas haciendo $z = x + iy$,

$$\frac{x - iy + i(x^2 - y^2 + 2xyi)}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} + i\frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}.$$

Centrémonos en la parte real y pasemos a coordenadas polares y calculamos

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho \cos\theta - 2\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\sqrt{\rho}} = \lim_{\rho \to 0} \sqrt{\rho}(\cos\theta - 2\rho\cos\theta\sin\theta) = 0$$

y como además

$$\left| \frac{\rho \cos\theta - 2\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\sqrt{\rho}} - 0 \right| = |\sqrt{\rho}(\cos\theta - 2\rho\cos\theta\sin\theta)| \leq \sqrt{\rho} + 2\rho\sqrt{\rho}$$

y $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{\rho} + 2\rho\sqrt{\rho} = 0$, tenemos que

$$\lim_{x+iy \to 0} \frac{x - 2xy}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = 0.$$

De forma análoga vemos que

$$\lim_{x+iy \to 0} \frac{x^2 - y^2 - y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} = 0,$$

por lo que el límite pedido será

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0.$$

Es un buen ejercicio para el alumno comprobar que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z} + iz^2}{|z|}$$

no existe.

2.3 Continuidad de funciones de variable compleja

Una vez estudiada la noción de límite de una función de variable compleja, pasamos a abordar la continuidad de las misma. Como en el caso real una función $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dirá continua en $z_0 \in A$ si existe el límite de $f(z)$ cuando $z \to z_0$ y además

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

La función f se dirá continua en A si es continua en todo punto de A.

Como no podía ser de otra manera, la continuidad de f ocurre si y sólo si son continuas la funciones coordenadas $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$.

Funciones continuas son todas las que hemos estudiado al principio del tema, es decir, los polinomios, las funciones racionales (salvo donde no están definidas), la exponencial y el seno y cosenos complejos. Además, la suma, diferencia, producto, cociente (salvo donde se anule el denominador) y composición de funciones continuas son continuas. También lo son el conjugado $f(z) = \overline{z}$ (con funciones coordenadas x y $-y$) y el módulo $f(z) = |z|$ (con funciones coordenadas $\sqrt{x^2 + y^2}$ y 0).

2.4 Derivación en sentido complejo

La derivada compleja es la parte más novedosa de este tema y a la que dedicaremos una mayor parte del tiempo. Aunque la definición es idéntica en su forma a la derivada real, pues $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dirá derivable (también *holomorfa*) en $z_0 \in \operatorname{Int}(A)$ si existe y es finito el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Como siempre, si A es un abierto, f se dirá derivable en el abierto A si es derivable u holomorfa en todo punto de A. Se verificarán además las siguientes propiedades de la derivación: dadas $f(z)$ y $g(z)$ se cumple

(D0) Si $f(z)$ es derivable en z_0, entonces es continua en z_0.

Demostración. Basta ver que $\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = 0$. Para ello tomamos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado. Ya sin demostración, enunciamos otras propiedades del algebra de funciones derivables.

(D1) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$.

(D2) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

(D3) Si $g(z) \neq 0$ entonces $(f(z)/g(z))' = (f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z))/g(z)^2$

(D4) Regla de la cadena. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

(D5) Teorema de la función inversa. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que f es inyectiva en $B(z_0, r)$, $f(B(z_0, r))$ es abierto y existe una función inversa $f^{-1} : f(B(z_0, r)) \to B(z_0, r)$ derivable en $f(z_0)$ y tal que

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Por último vamos a estudiar la relación existente entre la derivación compleja y la diferenciación ya estudiada en la asignatura de cálculo. Recordemos que el módulo en $\mathbb{C}$ es equivalente a la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ y entonces una función f (considerada indistintamente en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^2$) es diferenciable si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0,$$

donde $Df(z_0)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en si mismo de manera que su matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ se llama matriz Jacobiana de f y es

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix},$$

donde $f_1(z) = \operatorname{Re} f(z)$ y $f_2(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Entonces se verifica el siguiente resultado.

Theorem 1 *Una $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si f es diferenciable en z_0 y $Df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$.*

Demostración. En primer lugar, si f es derivable en z_0 se verifica que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

y como la norma es continua

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0,$$

por lo que la función f es diferenciable en z_0.

Si f es diferenciable en z_0 y $Df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0,$$

de donde por la continuidad del módulo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0.$$

■

Vamos a escribir la expresión $Df(z_0)(z - z_0) = f'(z_0)(z - z_0)$ de una forma más sencilla. Para ello, supongamos que $z - z_0 = x + iy$. Entonces

$$\begin{aligned} Df(z_0)(z - z_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + y\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ x\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) + y\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por otro lado

$$f'(z_0)(z - z_0) = x \operatorname{Re} f'(z_0) - y \operatorname{Im} f'(z_0) + i[x \operatorname{Im} f'(z_0) + y \operatorname{Re} f'(z_0)].$$

Comparando ambas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + y\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= x \operatorname{Re} f'(z_0) - y \operatorname{Im} f'(z_0), \\ x\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) + y\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) &= x \operatorname{Im} f'(z_0) + y \operatorname{Re} f'(z_0). \end{aligned}$$

Haciendo $x = 1$ e $y = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) &= \operatorname{Im} f'(z_0), \end{aligned}$$

y haciendo $x = 0$ e $y = 1$ se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\operatorname{Im} f'(z_0), \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0), \end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0); \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0),$$

que se conocen con el nombre de ecuaciones de Cauchy–Riemann. Además se verifica que

$$f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$$

- La función $f(z) = \overline{z}$ no es derivable ya que sus funciones coordenadas son $f_1(x, y) = x$ y $f_2(x, y) = -y$ y entonces

  $$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)$$

  y no se verifican las ecuaciones de Cauchy–Riemann para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, de donde obtenemos que $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en todo $\mathbb{C}$.

- Si $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$. Veamos esta propiedad por inducción. Si $n = 0$, entonces $f(z) = 1$ y entonces

  $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1 - 1}{z - z_0} = 0,$$

  por lo que se verifica la fórmula. Si suponemos la fórmula cierta hasta n, entonces

  $$(z^{n+1})' = (z^n \cdot z)' = nz^{n-1} \cdot z + z^n \cdot 1 = (n + 1)z^n,$$

  por lo que la fórmula también es cierta.

  Las derivadas de estas funciones son claves para junto con el álgebra de funciones derivables obtener que si $f(z) = 3z^4 + z - 1$ entonces $f'(z) = 12z^3 + 1$ o por ejemplo si $f(z) = z^2/(z + 1)$, entonces

  $$f'(z) = \frac{2z \cdot (z + 1) - z^2}{(z + 1)^2} = \frac{z^2 + 2z}{(z + 1)^2}.$$

- Si $f(z) = e^z$, entonces sus funciones coordenadas son $f_1(x, y) = e^x \cos y$ y $f_2(x, y) = e^x \sin y$ y entonces es un ejercicio sencillo comprobar que las ecuaciones de Cauchy–Riemann se cumplen y además

  $$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

- Por la definición de las funciones trigonométricas tenemos que

  $$(\sin z)' = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

  y

  $$(\cos z)' = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

2.5 El logaritmo complejo

La función logaritmo real $\log x$ se define como la inversa de la función exponencial e^x. Si prestamos un poco de atención, vemos que la exponencial es inyectiva, es decir, si $e^x = e^y$ entonces $x = y$. Entonces existe un único valor $x = e^y$. Llamamos logaritmo $\log x$ al único y tal que $e^y = x$.

La función exponencial compleja no es inyectiva. Dados $z = a + ib$ y $w = c + di$, y considerando la ecuación $e^z = e^w$, tenemos tomando módulos que $e^a = e^b$ por lo que $a = b$ al ser ambos reales. Por otra parte, se tendrán las ecuaciones

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos d,\\ \sin b &= \sin d,\end{aligned}$$

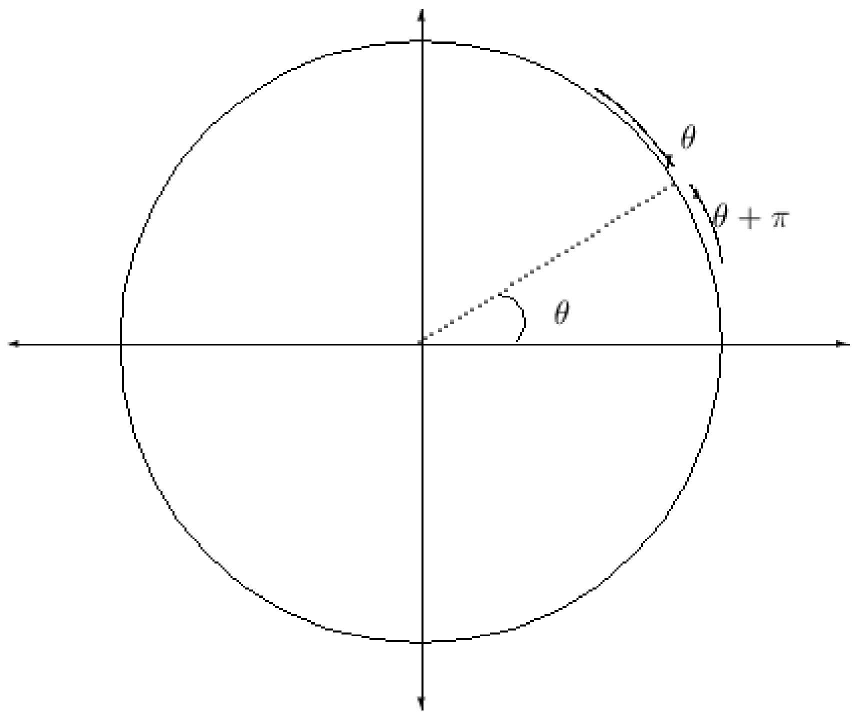
de donde se verifica que $d = b + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir existen infinitos numeros complejos que dan lugar a la misma exponencial, y entonces ya no podemos definir el logaritmos como en el caso real. Dados $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z = e^w = e^{\mathrm{Re}\, w}(\cos \mathrm{Im}\, w + i \sin \mathrm{Im}\, w)$ de donde tomando módulos tenemos que $|z| = e^{\mathrm{Re}\, w}$ obteniendo $\mathrm{Re}\, w = \log |z|$. Por otra parte $\mathrm{Im}\, w \in \arg(z)$. Así se defininе el conjunto de logatitmos complejos como

$$\mathrm{L}(z) = \{\log |z| + i\theta : \theta \in \arg(z)\}.$$

Para definir las diferentes funciones logaritmo complejo hemos de fijar los valores entre los que se dan los argumentos. Por ejemplo, podemos definir $\mathrm{L}(z)$ en el conjunto $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$. Entonces, por ejemplo el logaritmos de $1 + i$ sería

$$\mathrm{L}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\pi/4.$$

Sin embargo la función anterior nos es continua ya que el argumento arg definido entre $[\theta, \theta + 2\pi)$, $\theta \in \mathbb{R}$ no es continua como se ve en el siguiente dibujo



vemos que $\lim_{z\to\theta^+} \arg(z) = \theta$ mientras que $\lim_{z\to\theta^-} \arg(z) = \theta + 2\pi$. Es decir el límite varía segun nos acercamos a θ en el sentido de la agujas del reloj, $\lim_{z\to\theta^+} \arg(z) = \theta$, o en sentido contrario $\lim_{z\to\theta^-} \arg(z) = \theta + 2\pi$.

Enunciaremos entonces el siguiente resultado sobre ramas continuas del logaritmo.

Theorem 2 *Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ existe una función continua*

$$\mathrm{L}_\theta : \mathbb{C} \setminus H_\theta \to]\theta - \pi, \theta + \pi[$$

de forma que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus H_\theta$ se verifica $A_\theta(z) \in \arg z$, donde H_θ es la semirrecta $\{-re^{-i\theta} : r \geq 0\}$. Además, por el Teorema de la función inversa se satisface la fórmula

$$L'_\theta(z) = \frac{1}{z}.$$

2.6 Ejercicios

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:

   (a) $\mathrm{sen}(2+i)$ (b) $e^{-\pi\mathbf{i}/2}$ (c) $2\,e^{-\pi\mathbf{i}}$ (d) $3\,e^{-\pi\mathbf{i}/2}$

   (e) $\mathbf{i} + 3\,e^{2\pi\mathbf{i}}$ (f) $e^{\pi\mathbf{i}/4} - e^{-\pi\mathbf{i}/4}$ (h) $1/e^{-\pi\mathbf{i}/4}$ (i) $e^{1+\pi\mathbf{i}}$

2. Comprobar que son ciertas las igualdades:

   (a) $\sin(iz) = i\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ (b) $\cos(iz) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

3. Obtener la parte real y la parte imaginaria de las funciones:

   (a) $f(z) = 3z^2 - iz$, (b) $f(z) = \bar{z} + \dfrac{1}{z}$, (c) $f(z) = z^3 + z + 1$, (d) $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$

4. Calcular la parte real y la parte imaginaria de las funciones:

   (a) $f(z) = z^2 + i$ (b) $f(z) = \frac{1}{z}$

5. Siendo z, z' dos números complejos distintos y $\frac{(z+z')i}{(z-z')} \in \mathbb{R}$. Hallar la relación entre $|z|$ y $|z'|$. (Solución: $|z| = |z'|$).

6. Hallar los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado. (Solución: 0, 1_0, $1_{2\pi/3}$, $1_{4\pi/3}$).

7. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. (Solución: 0, $1_{2k\pi/n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $e^z + i = 0$. (Solución: $z = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$).

(b) $4\cos z + 5 = 0$. (Solución: $z = (2k+1)\,\pi \pm i\log 2,\ k \in \mathbb{Z}$).

(c) $e^{-z} + 1 = 0$. (Solución: $z = (2k+1)\,\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$).

(d) $\sin z = 4$. (Solución: $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\log\left(4 \pm \sqrt{15}\right),\ k \in \mathbb{Z}$).

9. Dado el número complejo z, probar que $ze^z + \overline{z}e^{\overline{z}}$ es un número real.

10. Hallar la parte real e imaginaria de las funciones

$$\text{(a) } f(z) = \cosh(z - i) \quad \text{(b) } f(z) = \tan z$$

11. Probar que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes desigualdades:

(a) $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$.

(b) $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$.

12. Sea $D = B(0,2) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 2\}$. Calcula y representa gráficamente $f(D)$ para las funciones

$$\text{(a) } f(z) = 3 + i + z \qquad \text{(b) } f(z) = (1+i)z \qquad \text{(c) } f(z) = 1/z$$

13. Estudia la continuidad en el disco $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ de las funciones

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \text{(b) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 1/2}$$

14. Se considera la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1+z^2}{z-i} & siz \neq i \\ 4i & siz = i \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $f(z)$ en el punto $z = i$.

15. Estudia la continuidad de la función $f(z) = (z^5 + 1)/(z^2 + 4)$.

16. Halla los puntos del círculo $B(0,2)$ en los que es discontinua la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\cdot(z-3)}$$

17. Determina los puntos singulares de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)} \qquad \text{(b) } f(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2} \qquad \text{(c) } f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$$

18. Calcula, a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las funciones

$$\text{(a) } f(z) = e^z \qquad \text{(b) } f(z) = \text{sen} z \qquad \text{(c) } f(z) = \cos z \qquad \text{(d) } f(z) = ize^z$$

19. Estudia si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son derivables y en caso afirmativo calcular $f'(z)$

(a) $f(z) = \overline{z} \cdot Imz$	(b) $f(z) = z \cdot Imz$	(c) $f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$
(d) $f(z) = z \cdot \overline{z}$	(e) $f(z) = (z^2-2)e^{-z}$	(f) $f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$
(g) $f(z) = (z^2 + \cos z)e^z$	(h) $f(z) = \text{sen}2z + i$	(i) $f(x+iy) = xy + iy$

20. Calcula los valores de los parámetros reales α, β y γ para que sea entera (derivable en todo $\mathbb{C}$) la función
$$f(z) = Rez + \alpha \cdot Imz + i(\beta \cdot Rez + \gamma \cdot Imz)$$
Caracteriza la función $f(z)$ cuando sea entera.

21. Comprueba que la función $f(z) = \sqrt{|(Rez)\cdot(Imz)|}$ no es derivable en $z = 0$ y, sin embargo, verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto. Razona esta aparente contradicción.

22. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumple que $f(z) \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{C}$. Demuestra que $f(z)$ es derivable si y sólo si es constante.

23. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Demuestra que la parte real $Ref(z)$ y la parte imaginaria $Imf(z)$ son simultáneamente derivables si y sólo si $f(z)$ es constante.

24. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de forma que $f(z)$ y $\overline{f}(z)$ son derivables. Demuestra que $f(z)$ es constante.

25. Una función $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es *armónica* en el conjunto abierto D si es de clase $C^2(D)$ (existen sus derivadas parciales de orden dos y son funciones continuas) y verifica la relación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \forall z \in D.$$
Dada una función derivable $f : D \to \mathbb{C}$, comprueba que las funciones parte real $u(x,y) = Ref(x+iy)$ y parte imaginaria $v(x,y) = Imf(x+iy)$ son armónicas en D. **Nota:** Supón, aunque posteriormente veremos que esta suposición es superflua, que las funciones parte real y parte imaginaria de f son de clase $C^2(D)$.

26. Estudia si son armónicas las funciones

(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ (b) $f(x,y) = 2e^x \cos y$

27. Dada una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, derivable en el abierto D, se define la aplicación $\phi(z) = |f(z)|^2$. Comprueba que se verifica la igualdad
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(z) = 4|f'(z)|^2$$
para cada $z \in D$. **Nota:** Supón, aunque posteriormente veremos que esta suposición es superflua, que las funciones parte real y parte imaginaria de f son de clase $C^2(D)$.

28. Si D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, se llama armónica conjugada a toda función $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla que que la nueva función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en D. Prueba que las siguientes funciones son armónicas y halla una armónica conjugada

    (a) $u(x,y) = 2x(1-y)$ (b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ (c) $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$

29. Determina una función derivable $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, sabiendo que su parte real es $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$ y que $f(\pi) = 1/\pi$.

30. Reconstruye la función derivable $f(z)$ a partir la condición $f(i) = 2i - 1$ y la parte real $Ref(x+iy) = x^2 - y^2 + 2x$.

31. Prueba que si $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ son dos funciones armónicas conjugadas de una misma función armónica $u(x,y)$ en $\mathbb{C}$, entonces $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ difieren en una constante.

32. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $u(x,y)$ es armónica conjugada de $v(x,y)$ y $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$. Prueba que tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son constantes.

33. Expresa $Re(e^{1/z})$ en términos de x e y y prueba que esta función es armónica en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- **Nota:** Se definen las funciones hiperbólicas complejas $\sinh z := (e^z - e^{-z})/2$ y $\cosh z := (e^z + e^{-z})/2$. Las funciones tangente y tangente hiperbólica se definen de la forma usual, esto es, $\tan z := \sin z / \cos z$ y $\tanh z := \sinh z / \cosh z$. Las restantes funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas se definen de forma similar.

Capítulo 3

Integración compleja.

Sumario. Curvas en $\mathbb{C}$. Integral de una función sobre una curva. El Teorema de Cauchy. Fórmulas integrales de Cauchy.

3.1 Curvas en el plano complejo

Debemos comenzar el tema introduciendo la noción de *curva* o *camino* sobre el plano complejo $\mathbb{C}$. Dado un intervalo compacto de la recta real $[a, b]$, definiremos una curva en $\mathbb{C}$ como una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. La imagen o gráfica de la curva en el plano complejo la denotaremos por $\operatorname{graf}(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. Dado $t \in [a, b]$ se tiene que

$$\gamma(t) = \operatorname{Re}\gamma(t) + i \operatorname{Im}\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las partes real e imaginarias de $\gamma(t)$. Una curva se dirá de clase C^1 si es derivable en (a, b). En ese caso γ' denotará la derivada de la misma. La curva se dirá de clase C^1 a trozos si existen $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, tal que $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ es de clase C^1 para $i = 0, 1, ..., n-1$. Una curva se dirá *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Un curva se dirá de *Jordan* si es cerrada y sin autointersecciones ($\gamma(t) \neq \gamma(t')$ para todo $t, t' \in (a, b]$). Durante el transcurso del curso supondremos siempre que toda curva de Jordan está orientada positivamente, esto es, en sentido contrario a las agujas del reloj.

Dadas dos curvas $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$, tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, se define su unión o yuxtaposición $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ como

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{si } t \in [a, b], \end{cases}$$

y la curva inversa a una curva dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, denotada $-\gamma : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ como

$$(-\gamma)(t) = \gamma(-t).$$

La longitud de una curva de clase C^1 se define como

$$l(\gamma) := \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si la curva es de clase C^1 a trozos y se escribe como $\gamma = \cup_{j=1}^k \gamma_j$, donde cada curva γ_j es de clase C^1, se define su longitud como

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^k l(\gamma_j).$$

En cualquier caso, todas estas definiciones son análogas a aquellas que ya se estudiaron en el caso de curvas en el plano y el espacio que se vieron en la parte de teoría de campos.

3.2 Integrales de funciones sobre caminos

Consideremos ahora una función de variable compleja $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva de clase C^1 de manera que $\operatorname{graf}(\gamma) \subset A$. Definiremos al *integral de f a lo largo de γ* como

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \end{aligned}$$

En caso de que la curva γ sea de clase C^1 a trozos, es decir $\gamma = \cup_{j=1}^k \gamma_j$, con γ_j de clase C^1, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Como podemos ver fácilmente de la primera expresión, si $f(z) = f_1(z)+if_2(z)$ y $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (f_1(\gamma(t)) + if_2(\gamma(t)))(x'(t) + iy'(t))dt \\ &= \int_a^b [f_1(\gamma(t))x'(t) - f_2(\gamma(t))y'(t)]dt \\ &\quad +i\int_a^b [f_2(\gamma(t))x'(t) + f_1(\gamma(t))y'(t)]dt \\ &= \int_\gamma f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy + i\int_\gamma f_2(x,y)dx + f_1(x,y)dy, \end{aligned}$$

es decir, la integral compleja de $f(z)$ a lo largo de la curva γ es la suma de dos trabajos, uno que proporciona un resiltado real y otro que da lugar a un trabjo que podríamos llamamr complejo. Como consecuencia de este hecho, se tiene que las siguientes propiedades se heredan directamente de la noción de trabajo:

- $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$.
- Si γ, ω son dos curvas tal que el punto final de γ es el inicial de ω y, entonces

$$\int_{\gamma\cup\omega} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\omega f(z)dz.$$

- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y f, g son dos funciones cuyo dominio contiene a la gráfica de γ, entonces
$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz.$$

- Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \operatorname{graf}(\gamma)$, entonces
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq Ml(\gamma).$$

- **Regla de Barrow**. Si A es abierto y existe $F : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de manera que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$ (F se dirá una *primitiva* de f), entonces
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demostración. Para demostrar la regla de Barrow, démonos cuenta que si $t \in (a, b)$ y $F(z) = F_1(z) + iF_2(z)$, entonces
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) \\
&\quad +i\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)\right) \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(\gamma(t))y'(t) \\
&\quad +i\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(\gamma(t))y'(t)\right) \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\gamma(t)) + i\frac{\partial F_2}{\partial x}(\gamma(t))\right)(x'(t) + iy'(t)) \\
&= F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t),
\end{aligned}$$
haciendo uso de las fórmulas de Cauchy–Euler. Entonces
$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),
\end{aligned}$$
con lo que concluye la prueba.□

3.3 El Teorema de Cauchy

Estudiamos en este punto una de las cuestiones fundamentales sobre la teoría de variable compleja como es el Teorema de Cauchy. Para ello hemos de introducir el concepto de simplemente conexo.

Recordemos que una curva de Jordan γ delimita dos regiones del plano, una acotada que llamamos interior $\mathrm{I}(\gamma)$, y otra no acotada exterior a la curva y que denotaremos por $\mathrm{E}(\gamma)$. Diremos que un conjunto del plano complejo $A \subseteq \mathbb{C}$, es simplemente conexo si para cualquier curva de Jordan γ, con $\mathrm{graf}(\gamma) \subset A$, verifica que $\mathrm{I}(\gamma) \subset A$. Intuitivamente, un conjunto simplemente conexo es aquel que no tiene agujeros. Por ejemplo, el conjunto $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es simplemente conexo, mientras que $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ no lo es. El Teorema de Cauchy establece lo siguiente:

Theorem 3 ***(Cauchy)*** *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para toda curva cerrada y C^1 a trozos, γ, cuya gráfica contenida en S.

Demostración. En caso que f sea una función de clase C^1, es decir, cuyas funciones coordenadas son de clase C^1, este resultado es consecuencia del Teorema de Green. En particular

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma f_1(x,y)dx - f_2(x,y)dy + i\int_\gamma f_2(x,y)dx + f_1(x,y)dy \\
&= \iint_{\mathrm{I}(\gamma)} \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dxdy \\
&\quad + i\iint_{\mathrm{I}(\gamma)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\right) dxdy \\
&= \iint_{\mathrm{I}(\gamma)} \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\right) dxdy \\
&\quad + i\iint_{\mathrm{I}(\gamma)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\right) dxdy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aplicando las fórmulas de Cauchy–Euler.

En el caso que f no sea de clase C^1, la demostración es bastante más laboriosa a la ver que complicada y puede estudiarse en la bibliografía recomendada.□

Del Teorema de Cauchy se obtiene de forma inmediata el siguiente corolario.

Corollary 4 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Sean $z_0, w_0 \in S$ y γ_1 y γ_2 dos curvas C^1 a trozos cualesquiera cuyas gráficas están contenidas en S uniendo z_0 y w_0. Entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz. \tag{3.1}$$

Este resultado nos permite definir la función $F : S \to \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in S$ se define como

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw \tag{3.2}$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos contenida en S uniendo un punto fijo $z_0 \in S$ con z. El siguiente resultado nos dice que las funciones derivables definidas sobre conjuntos simplemente conexos admiten primitivas, por lo que la regla de Barrow se puede aplicar. En realidad, lo único que hace falta para probar el siguiente resultado es (3.1) y la continuidad de f.

Theorem 5 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Entonces la función definida en (3.2) es derivable en S y $F'(z) = f(z)$. En particular, cualquier primitiva de f es de la forma $F(z) + c$, donde $c \in \mathbb{C}$.*

Para acabar esta sección, introducimos un resultado sobre integrales definidas sobre un conjunto de curvas. Un conjunto del plano complejo A se dice arcoconexo si para cualesquiera par de puntos $z_1, z_2 \in A$, existe una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de manera que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ y $\mathrm{graf}(\gamma) \subset A$. Un conjunto simplemente conexo puede ser arcoconexo. Por ejemplo, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \,\mathrm{Im}\, z < 0\}$ no es arcoconexo, ya que es unión de dos subconjuntos que no pueden conectarse por ninguna curva. Un *dominio* es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que es abierto y arcoconexo.

Theorem 6 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Sean Γ, $\gamma_1, ..., \gamma_n$ curvas de Jordan C^1 a trozos orientadas positivamente de manera que se verifica:*

(a) $\mathrm{I}(\Gamma)$ contiene las gráficas de $\gamma_1, ..., \gamma_n$.

(b) Para todo $k = 1, 2, ..., n$, $\mathrm{E}(\gamma_k)$ contiene la gráfica de γ_j con $j \neq k$.

(c) S contiene al conjunto $D = \mathrm{I}(\Gamma) \setminus (\overline{\mathrm{I}(\gamma_1)} \cup ... \cup \overline{\mathrm{I}(\gamma_n)})$.

Entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Demostración. Hacemos la demostración para el caso particular $n = 2$. El caso general es análogo pero mucho más laborioso. Observemos el siguiente dibujo

dibujo

donde hemos representado la curvas. Unimos dos puntos de cada curva según el siguiente dibujo

dibujo

de manera que las curvas resultantes Γ_1 y Γ_2 tienen su interior simplemente conexo y por lo tanto están contenidas en un conjunto simplemente conexo. Entonces por el Teorema de Cauchy tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0 + 0 = 0.$$

Si desarrollamos, tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz =$$

y

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz =$$

con lo que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

como queríamos demostrar.□

Como consecuencia del resultado anterior tenemos el siguente corolario, que nos dice que el las condiciones del mismo, la forma de la curva no influye a la hora de calcular la integral, ya que ésta siempre se puede calcular sobre una circunferencia cuando la geometría del conjunto lo permite.

Corollary 7 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : S \to \mathbb{C}$ es derivable en S. Para toda curva de Jordan C^1 a trozos γ contenida en S se cumple que*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{C(z_0,r)} f(z)dz$$

donde $C(z_0, r)$ es cualquier circunferencia de centro z_0 y radio r contenida en $\mathrm{I}(\gamma) \cap S$ y satisfaciendo las condiciones del Teorema 6.

3.4 Las fórmulas integrales de Cauchy

Las fórmulas integrales de Cauchy permitirán probar uno de los hechos clave dentro de la variable compleja: que toda función derivable es infinitamente derivable. Para fijar ideas, supongamos que S es simplemente conexo y $f : S \to \mathbb{C}$ es una función derivable. Supongamos que γ es una curva de Jordan C^1 a trozos cuya gráfica está contenida en S. Si $z \in \mathrm{I}(\gamma)$, entonces existe un radio r suficientemente pequeño de manera que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

donde $\gamma_r(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, esto es, una circunferencia, ya que la función $\frac{f(w)}{w-z}$ es derivable en el interior de la curva salvo el punto z. Además, r puede ser elegido tan pequeño como se quiera sin que varíe el resultado de la integral.

Cuando $f(w) = 1$ para todo $w \in \mathbb{C}$, se verifica que

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z - re^{it} - z} rie^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i = 2\pi i f(z).\end{aligned}$$

Si $f(w) = f(z)$ para todo $w \in \mathbb{C}$, se tiene por las propiedades de linealidad de la integral que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = 2\pi i f(z).$$

Finalmente, en general

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw &= \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &\overset{*}{=} \int_{\gamma_r} \lim_{r\to 0}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \int_{\gamma_r} \lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \int_{\gamma_r} f'(z)dz = 0,\end{aligned}$$

por lo que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = 2\pi i f(z),$$

por lo que hemos justificado el siguiente resultado conocido como la primera fórmula integral de Cauchy.

Theorem 8 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Sea γ una curva de Jordan C^1 a trozos orientada positivamente contenida en S de manera que $\mathrm{I}(\gamma) \subset S$. Entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \quad si\ z \in \mathrm{I}(\gamma), \tag{3.3}$$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 0 \quad si\ z \in \mathrm{E}(\gamma).$$

Por aplicación directa del Teorema 8 sobre la circunferencia de centro $z_0 \in S$ y radio ρ contenida en S con interior contenido también en S obtendremos la fórmula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})dt.$$

Si tomamos la primera fórmula integral de Cauchy y derivamos obtenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d}{dz}\frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw, \end{aligned}$$

que se conoce como fórmula integral de Cauchy para la primera derivada. Si volvemos a derivar, tenemos

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d}{dz}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw \\ &= \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}dz, \end{aligned}$$

que es la fórmula integral de Cauchy para la segunda derivada. En general, si procedemos por inducción y suponemos que

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,$$

al volver a derivar tenemos que

$$\begin{aligned} f^{n+1)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \\ &\stackrel{*}{=} \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d}{dz}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \\ &= \stackrel{*}{=} \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}dw, \end{aligned}$$

por lo que hemos justificado la fórmula integral de Cauchy para la derivada n–ésima, que a continuación enunciamos.

Theorem 9 *Sean $S \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : S \to \mathbb{C}$ una función derivable en S. Sean $z \in S$ y γ una curva de Jordan C^1 a trozos orientada positivamente contenida en S de manera que $z \in \mathrm{I}(\gamma) \subset S$. Entonces f es derivable infinitas veces en z y además*

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En paricular, si una función de variable compleja es derivable una vez, lo es infinitamente. Además, aplicando el Teorema anterior a la circunferencia $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se verifica que

$$\begin{aligned} |f^{n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}l(\gamma), \end{aligned}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : z \in \mathrm{graf}(\gamma)\}$ (nótese que $M(r)$ existe al ser $f(z)$ continua y la gráfica de la curva un conjunto compacto). Dado que la longitud de la dircunferencia es 2π, se tiene que

$$|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = n!\frac{M}{r^n},$$

que se conocen con el nombre de *desigualdades de Cauchy*, y que serán muy útiles en el siguiente tema al analizar las series de potencias.

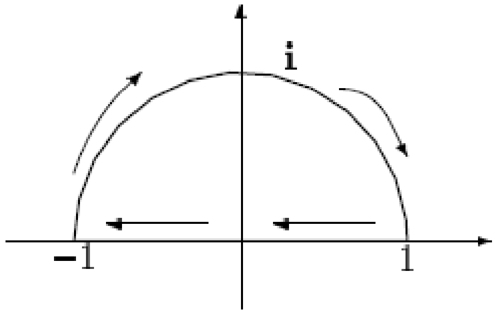
3.5 Ejercicios

1. Calcular la integral,

$$\int_T \mathrm{Re}\, z\, dz$$

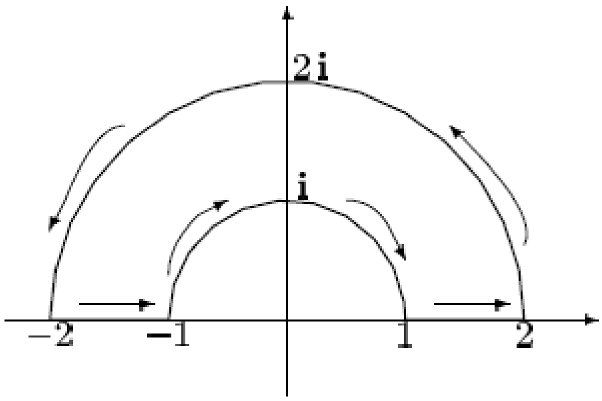
siendo T el triángulo de vértices 0, $1+i$, 2 recorrido en el sentido de las agujas del reloj. ¿Cuál sería el valor de la integral si el triángulo se recorre en el sentido contrario?

2. Calcular la integral, de la función conjugación, $f(z) = \bar{z}$, a lo largo de la siguiente curva.



3. Calcular la integral, $\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,dz$, siendo γ el camino del ejercicio anterior.

4. Calcular el valor de la integral $\int_\gamma z/\overline{z}\,dz$, siendo γ el camino indicado en la figura siguiente:



5. Dado el arco $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, calcular la integral $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz$:

   (a) si $|z_0| > 1$
   (b) si $|z_0| < 1$

6. Dada la curva $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $\;t \in [0, 2\pi]$, calcular la integral,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}\,dz$$

7. Calcular el valor de la integral,

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\,dz, \qquad \gamma(t) = 1 + \frac{e^{i\,t}}{2}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

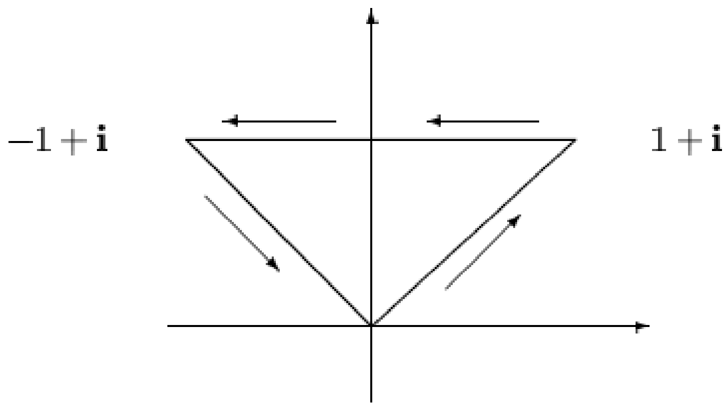
8. Comprobar que la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \geq 0 \\ -x^2/2 & x < 0 \end{cases}$$
es de clase C^1 pero no existe la segunda derivada en cero. Dado $A \subset \mathbb{C}$ un abierto conteniendo al cero, ¿será posible entontrar una función $F \in \mathcal{H}(A)$ de forma que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in A \cap \mathbb{R}$? ¿Por qué?

9. Dado $r > 1$, calcular el valor de la integral,
$$\int_\gamma \frac{\omega}{\omega^4 - 1}\, d\omega, \qquad \gamma(t) = 1 + r\, e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

10. Calcular la integral,
$$\int_\gamma \frac{z\, e^z}{(z-i)^3}\, dz, \qquad \gamma(t) = i + e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

11. Calcular la integral,
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(1-z)^3}\, dz$$
   (a) para $\gamma(t) = \beta\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(0 < \beta < 1)$.
   (b) para $\gamma(t) = 1 + \beta\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(0 < \beta < 1)$.
   (c) para $\gamma(t) = \beta\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(1 < \beta)$.

12. Sea la función $f(z) = sen(\bar{z})$. Se pide calcular:
   (a) Los puntos de $\mathbb{C}$ para los cuales f es derivable.
   (b) El valor de la integral de f a lo largo de la siguiente curva,



13. Calcular la integral,
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 9}\, dz$$

(a) para $\gamma(t) = 3\,i + e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(b) para $\gamma(t) = -2\,i + 2\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(c) para $\gamma(t) = 4\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(d) para $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

14. Sea γ la circunferencia unidad recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{e^\omega}{\omega}\, d\omega$$

15. Supongamos que σ es una curva cerrada y diferenciable a trozos. Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{graf}\sigma$ se llama *índice* de σ respecto de z_0 al valor:

$$I(\sigma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\sigma \frac{1}{\omega - z_0}\, d\omega$$

Para el caso en que σ es una circunferencia, comprobar que:

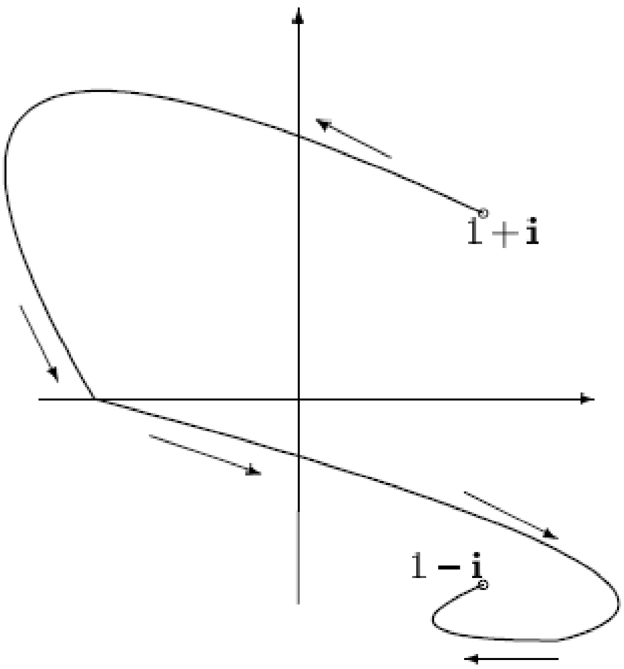
(a) $I(\sigma, z_0) = 1$ si z_0 está en la región limitada por la gráfica de la curva.

(b) $I(\sigma, z_0) = 0$, en otro caso.

16. Calcular el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

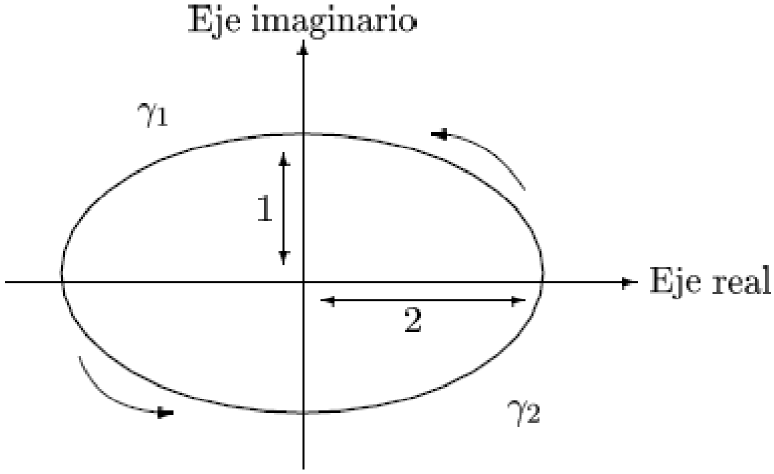
siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura superior, orientada en el sentido que indican las flechas.



17. Calcular el valor de la integral:

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{1}{z+2\,\mathbf{i}}\right)\,dz$$

donde γ es la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1, respectivamente, recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.



Nota: Una posible parametrización de la elipse γ es la dada por

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1 : & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \hookrightarrow & \gamma_1(t) = -t + \mathbf{i}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \end{array}$$

para la parte de arriba y

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2 : & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \hookrightarrow & \gamma_2(t) = t - \mathbf{i}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \end{array}$$

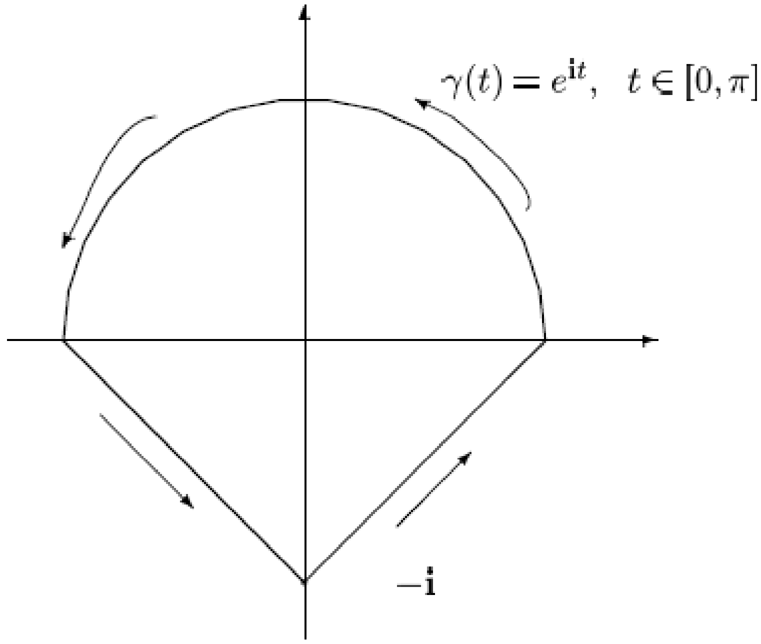
para la de abajo ($\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$).

18. Dada la función $g(z) = \cos\overline{z}$, ¿existirá una función derivable en todo $\mathbb{C}$, $f(z)$, de forma que $f'(z) = g(z)$, para cada $z \in \mathbb{C}$? Justificar la respuesta.

19. Calcular el valor de la integral,

$$\int_\gamma \overline{z}\,|z|^2\,dz$$

siendo γ la curva de la figura siguiente, recorrida en el sentido que indican las flechas.



Capítulo 4

Series de potencias y de Laurent. Polos y residuos.

Sumario. Series de potencias. Radio y disco de convergencia. Teorema de Taylor. Funciones analíticas. Derivación e integración de series de potencias. Aplicaciones de las series de potencias. Series de Laurent. Anillo de convergencia. Singularidades de funciones de variable compleja. Clasificación de singularidades aisladas.

4.1 Series de potencias

Una *serie de potencias* de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \geq 0$. Diremos que la serie converge en un número complejo w si la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_0)^n$$

es convergente. Si además dicha serie converge absolutamente en dicho número, diremos que la serie de potencias converge absolutamente en w. Es claro que cualquier serie de potencias converge en su centro.

Se define el *radio de convergencia* de la serie como el número

$$R := \sup\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty\}.$$

Si un número complejo z verifica que $|z - z_0| = r < R$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty,$$

por lo que la serie de potencias será absolutamente convergente en el disco $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Si por el contrario $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, R)$, la serie divergerá, no pudiendose afirmar nada en general sobre la convergencia de la serie en la frontera del disco.

Además, si aplicamos el criterio de la raíz a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$, se tendrá que si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1,$$

la serie será aboslutamente convergente, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|z - z_0|},$$

por lo que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

De forma análoga, si aplicamos el criterio del cociente, en caso de existir y verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}|}{|a_n(z - z_0)^n|} < 1,$$

la serie será absolutamente convergente, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1}{|z - z_0|},$$

por lo que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Algunas series de potencias ya conocidas son por ejemplo la exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Si aplicamos el criterio del cociente a la misma, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo que el radio de convergencia será $R = 1/0 = \infty$. Como ya sabíamos, esta serie converge en todo el plano complejo.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

no converge nada más que en su centro ya que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

por lo que su radio de convergencia será $R = 1/\infty = 0$.

Un ejemplo que debe ser conocido también es la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

que será de gran importancia práctica para el desarrollo en serie de potencias de la mayoría de funciones que vamos a considerar. Por cualquiera de los dos criterios anteriores vemos que su radio de convergencia es 1, por lo que dicha serie converge si $|z| < 1$. Además, si denotamos por

$$S_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n,$$

entonces

$$S_n - zS_n = 1 - z^{n+1},$$

de donde

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dado que $|z| < 1$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ y así

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{s\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}.$$

Por otra parte, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sobre el disco de convergencia de la serie y derivamos, se tiene que

$$\begin{aligned} f^{k)}(z) &= \frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right) \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k) a_n (z - z_0)^{n-k}, \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en z_0 obtenemos

$$a_k = \frac{f^{k)}(z_0)}{k!},$$

para todo $k \geq 0$.

Una función $f(z)$ definida sobre un abierto $A \subset \mathbb{C}$ se dirá *analítica* en $z_0 \in A$ si existe una serie de potencias tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in A$ perteneciente al disco de convergencia de la serie. El siguiente resultado probará que toda función analítica es derivable y viceversa. Además del mismo se deducirá la unicidad del desarrollo en serie de potencias.

Theorem 10 ***(Taylor)*** *Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ derivable. Sean $z_0 \in A$ y $r > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

converge absolutamente sobre $D(z_0, r)$.

Demostración. Vamos a ver que la serie converge absolutamente en cualquier punto del disco. Para ello, sean $z \in D(z_0, R)$ y $\rho = |z - z_0| < r < R$. Tomamos la circunferencia centrada en z_0 y de radio r. Por las desigualdades de Cauchy, se tiene que

$$|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r),$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{n)}(z_0)|}{n!} |z - z_0|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^n} M(r) \\
&= M(r) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n = M(r) \frac{r}{r - \rho},
\end{aligned}$$

por tratarse de una suma de una serie geométrica. Por lo tanto la serie de potencias es convergente absolutamente en el interior del disco, y tiene la forma anteriormente indicada.□

4.2 Series de Laurent

Una *serie de Laurent* centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.1}$$

Claramente puede dividirse en dos partes,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.2}$$

que es una serie de potencias llamada *parte regular* de la serie de Laurent y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \tag{4.3}$$

que se llamará *parte singular*. Obviamente, para garantizar la convergencia de la serie de Laurent (4.1), deben converger las series (4.2) y (4.3). Como vimos en el primer apartado del tema, la serie

(4.2) convergerá absolutamente en su disco de convergencia $D(z_0, R)$. Para la serie (4.3), el cambio de variable $Z = 1/(z - z_0)$ la transforma en la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} Z^n$$

que convergerá absolutamente en su disco de convergencia $D(0, r)$, por lo que (4.3) convergerá siempre que $|z - z_0| > r$. Así, si $r < R$ se tendrá que la serie de Laurent inicial convergerá absolutamente en el *anillo de convergencia*

$$A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

mientras que será divergente en $\mathbb{C} \setminus \overline{A}(z_0, r, R)$.

Por otra parte, si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en un cierto anillo de convergencia, entonces multiplicando dicha expresión por $(z - z_0)^{-k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1}.$$

Si $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, denota una circunferencia dentro del anillo de convergencia, entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz. \end{aligned}$$

Si $n - k - 1 \geq 0$, entonces $a_n (z - z_0)^{n-k-1}$ es derivable, y por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz = 0.$$

Si $n - k - 1 = -1$, entonces

$$\int_\gamma \frac{a_n}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{a_n}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = 2\pi i a_n.$$

Finalmente, si $n - k - 1 \leq -2$, se tiene por las fórmulas integrales de Cauchy que

$$\begin{aligned} \int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz &= \int_\gamma \frac{a_n}{(z - z_0)^{k+1-n}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(n-k)!} g^{n-k)}(z_0) = 0, \end{aligned}$$

donde $g(z) = a_n$. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i a_n,$$

o equivalentemente

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \tag{4.4}$$

que es la fórmula análoga al Teorema de Taylor para series de Laurent. Veamos que una serie así construída es siempre convergente en su anillo de convergencia.

Theorem 11 ***(Laurent)*** *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R$, y $f : A(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ una función derivable. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

donde los coeficientes a_n satisfacen las identidades (4.4).

Demostración. Vamos a ver que la serie así construída es convergente, lo que probará el resultado. Sean $r < \rho_1 < \rho < \rho_2 < R$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| = \rho$. Acotamos de forma análoga a las desigualdades de Cauchy

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}M(\rho)\frac{1}{\rho^{n+1}}l(\gamma) = \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \end{aligned}$$

donde $M(\rho) = \max\{|f(z)| : z \in \text{graf}(\gamma)\}$ y $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Si ahora tomamos la parte regular y procedemos como en la demostración del Teorema de Taylor, con $\gamma(t) = z_0 + \rho_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \leq M(\rho_2)\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho},$$

por lo que la parte regular es absolutamente convergente. Tomamos ahora la parte singular y la circunferencia $\gamma(t) = z_0 + \rho_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tratamos de acotar

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{0} |a_n(z-z_0)^n| &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{|a_{-n}|}{|z-z_0|^{-n}} \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{M(\rho_1)}{\rho^{-n}\rho_1^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(\rho_1)\frac{\rho_1^n}{\rho^n} = M(\rho_1)\frac{\rho}{\rho - \rho_1}, \end{aligned}$$

por lo que la parte singular también converge, y el teorema está probado.□

4.3 Singularidades de una función compleja. Clasificación de singularidades aisladas

Finalizaremos el tema haciendo un estudio de las singularidades de una función de variable compleja. Dada una función de variable compleja $f(z)$, se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una *singularidad* de f si ésta no es derivable en z_0. Así todo $z \in \mathbb{C}$ es una singularidad para $f(z) = \overline{z}$, mientras que 0 es una singularidad para $f(z) = 1/z$. Una singularidad z_0 se dirá *aislada* si existe $\delta > 0$ tal que la función es derivable en $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Nótese que por el Teorema de Taylor, f debe ser discontinua en sus singularidades aisladas.

Distinguiremos tres tipos de singularidades aisladas de una función f atendiendo básicamente al desarrollo de Laurent de la función en la singularidad. Si z_0 denota la singularidad y

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sobre su anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, se tiene

- La singularidad z_0 se dirá *evitable* si $a_{-n} = 0$ para todo $n > 0$.
- La singularidad z_0 se dirá *un polo* si la parte singular del desarrollo de Laurent tiene una cantidad finita de términos. Se dirá *orden del polo* al mayor natural k que cumple que $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0$ para todo $n > k$.
- La singularidad z_0 se dirá *esencial* si la parte singular del desarrollo de Laurent tiene una cantidad infinita de términos.

Por ejemplo, la función

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

presenta una singularidad aislada en 0 que es evitable, $\frac{1}{z}$ tiene en 0 un polo de orden 1, mientras que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

tiene en 0 una singularidad esencial. El siguiente resultado ofrece una clasificación de las singularidades aisladas de una función de variable compleja.

Theorem 12 *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y f una función derivable definida en $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Entonces:*

(a) z_0 es evitable si y sólo si existe $\lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$. Además si definimos f en z_0 como $f(z_0) = l$ se tiene que f es derivable en $D(z_0, \delta)$.

(b) z_0 es un polo de orden k si y sólo si existe $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^j f(z) = \infty$ para $0 \leq j < k$ y $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) z_0 es una singularidad esencial si y sólo si no existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Además en este caso para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión z_n convergiendo a z_0 de manera que $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w$.

Demostración. (a) es consecuencia inmediata del Teorema de Taylor. Para comprobar (b), démonos cuenta de que para todo $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$ la función $(z - z_0)^j f(z)$ sigue teniendo parte singular, por lo que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^j f(z) = \infty,$$

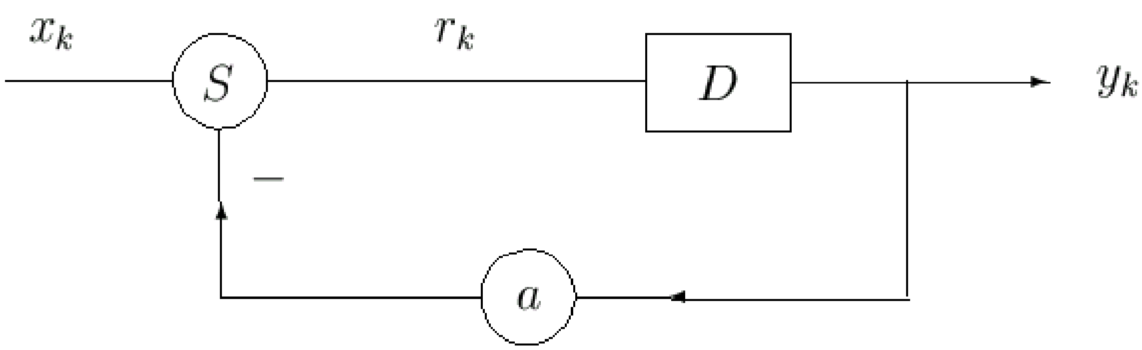
mientras que $(z - z_0)^k f(z)$ es una serie de potencias cuyo primer témino a_{-k} es no nulo. De aquí se deriva (b). La demostración de (c) excede los contenidos del curso.□

Una vez clasificadas las singularidades aisladas de una función de variable compleja, estamos en disposición de estudiar el Teorema de los residuos en la próxima lección.

4.4 Transformada Z

4.4.1 Ecuaciones en diferencias finitas

El interés del estudio de la transformada Z es debido a que es la análoga a la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en diferencias finitas. Estas ecuaciones aparecen en ingeniería al modelizar sistemas electrónicos cuyas entradas y salidas son una sucesión de datos discretos. Para fijar ideas, consideremos el siguiente ejemplo.



Este dispositivo está formado por dos elementos. El primero de ellos, marcado con una S, es un elemento que suma o resta datos, que a su vez vendrán modulados por números reales. El denotado por una D es un aparato que produce un retardo de una unidad temporal en la sucesión. La figura representa el tipo más sencillo de retroalimentación de una señal. Los datos de entrada vienen dados por la sucesión x_k y los de salida por

$$y_{k+1} = r_k. \tag{4.5}$$

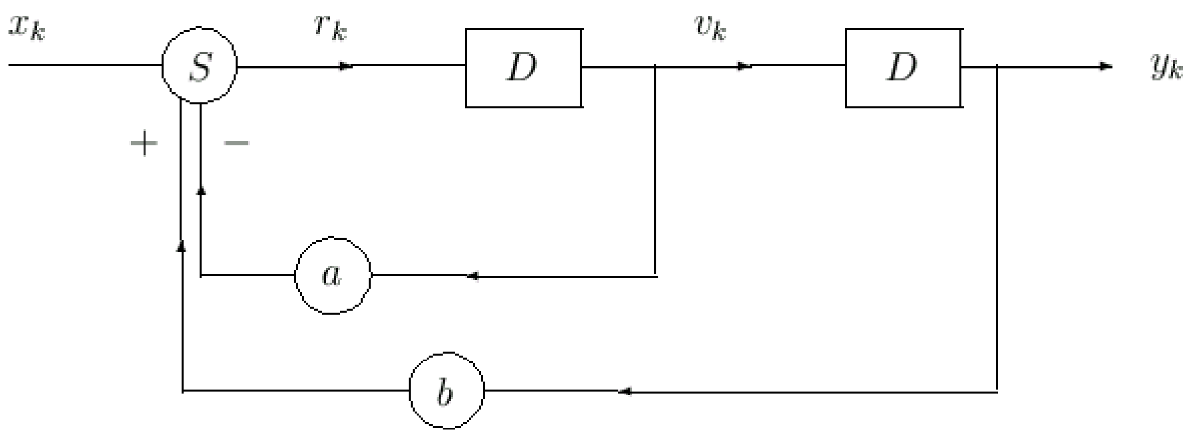
En el proceso, los datos intermedios r_k vienen dados por la expresión

$$r_k = x_k - a y_k, \tag{4.6}$$

donde a es un número real. Combinando (4.5) y (4.6) obtenemos la ecuación en diferencias de orden uno

$$y_{k+1} + a y_k = x_k.$$

Si complicamos el dispositivo, como se muestra en la figura,



se obtiene una ecuación de orden dos. Aquí

$$y_{k+1} = v_k,$$

$$v_{k+1} = r_k,$$

$$r_k = x_k + by_k - av_k,$$

de donde se obtiene la ecuación

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k.$$

El uso de la transformada Z permite afrontar con ciertas garantías de éxito la resolución de estas ecuaciones. Por ejemplo supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1; \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1. \end{cases}$$

Vamos a ver cómo la transformada Z nos permite obtener la solución de la ecuación anterior transformando dicho problema en un problema algebraico.

4.4.2 Definición y propiedades básicas

Consideremos una sucesión de números complejos x_k. Se define la *transformada Z* de la misma como la serie

$$\mathcal{Z}[x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}. \tag{4.7}$$

Nótese que (4.7) es una serie de Laurent con parte regular x_0 y parte singular $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$, y que por tanto convergerá en un disco de convergencia de la forma

$$A(0, r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

donde r es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n$.

Por ejemplo, si $\delta = (1, 0, 0, 0, ...)$ entonces su transformada Z es

$$\mathcal{Z}[\delta](z) = 1$$

definida en todo el plano complejo. Si $x_k = (1, 1, 1, ...)$, entonces

$$\mathcal{Z}[1](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

siempre que $|z| > 1$.

Propiedades básicas.

- Linealidad. Dadas las sucesiones x_k e y_k y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z)$$

para todo z en el dominio de definición de $\mathcal{Z}[x_k](z)$ y $\mathcal{Z}[y_k](z)$.

Demostración. Basta calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{z^n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z).
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k, definimos la nueva sucesión $y_k = x_{k+1}$. Entonces

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[x_{k+1}](z) = z\mathcal{Z}[x_k](z) - z x_0.$$

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y definimos $y_k = x_{k+k_0}$, tenemos la fórmula

$$\mathcal{Z}[x_{k+k_0}](z) = z^{k_0} \mathcal{Z}[x_k](z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}.$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_{k+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^{n+1}} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - z x_0 = z\mathcal{Z}[x_k](z) - z x_0.
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k y $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se verifica
$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

Dmostración. Calculamos
$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(z/a)^n} = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

■

Por ejemplo, si $x_k = (1, 2, 2^2, 2^3, ...)$, se tiene que
$$\mathcal{Z}[2^k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}.$$

- Dadas las sucesiones x_k y k^m, $m \in \mathbb{N}$, se verifica
$$\mathcal{Z}[k^m x_k](z) = [-z\frac{d}{dz}]^m \mathcal{Z}[x_k](z),$$
donde por $-z\frac{d}{dz}$ se entiende la operación derivada y luego multiplicación por $-z$.

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en m. Si $m = 1$, entonces
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[kx_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} \\
&= z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^{n+1}} = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\frac{-x_n}{z^n} \\
&= z\frac{d}{dz}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - x_0\right) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$

Si suponemos el resultado cierto para m, veamos que también lo es para $m+1$. Para esto calculamos
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^{m+1}x_k](z) &= \mathcal{Z}[k \cdot k^m x_k](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[k^m x_k](z) \\
&= (-z\frac{d}{dz})[-z\frac{d}{dz}]^m \mathcal{Z}[x_k](z) = [-z\frac{d}{dz}]^{m+1}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$

■

Por ejemplo, si $x_k = k^2$, entonces
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^2](z) &= [-z\frac{d}{dz}]^2 \mathcal{Z}[1](z) = [-z\frac{d}{dz}]^2 \frac{z}{z-1} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{-z}{z-1} + \frac{z^2}{(z-1)^2}\right) \\
&= \frac{z}{z-1} - \frac{3z^2}{(z-1)^2} + \frac{2z^3}{(z-1)^3},
\end{aligned}$$
si $|z| > 1$.

4.4.3 Transformada Z inversa

Es interesante obtener transformadas Z inversas de funciones de variable compleja $F(z)$, es decir, qué sucesiones verifican que

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = F(z),$$

o equivalentemente

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)].$$

Para calcular la transformada Z de una función $F(z)$ basta calcular el desarrollo en serie de Laurent centrada en cero de manera que tenga un anillo de convergencia de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, donde $r \geq 0$. Por ejemplo, si $F(z) = \frac{1}{z-1}$, entonces desarrollando en serie de Laurent

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 1$. Entonces la sucesión

$$x_k = \mathcal{Z}^{-1}[1/(z-1)] = (0, 1, 1, 1, ...).$$

4.4.4 Aplicación a la resolución de la ecuación en diferencias

Consideramos el problema

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1; \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1, \end{cases}$$

obtenido anteriormente. Tomando la transformada Z en la ecuación, usando las propiedades de ésta y tomando en consideración las condiciones iniciales obtenemos

$$\mathcal{Z}[y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k](z) = \mathcal{Z}[1](z),$$

y desarrollando

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k](z) &= \mathcal{Z}[y_{k+2}](z) + \mathcal{Z}[y_{k+1}](z) - 2\mathcal{Z}[y_k](z) \\ &= z^2\mathcal{Z}[y_k](z) - z + z\mathcal{Z}[y_k](z) - 2\mathcal{Z}[y_k](z) \\ &= (z^2 + z - 2)\mathcal{Z}[y_k](z) - z. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}.$$

Entonces

$$(z^2 + z - 2)\mathcal{Z}[y_k](z) = z + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{z-1},$$

con lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{z^2}{(z^2 + z - 2)(z-1)}.$$

Pasamos a fracciones simples

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{-1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+2},$$

y calculamos la transformada inversa obteniendo los desarrollos en series de Laurent

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$$

si $|z|>2$.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z|>1$. Finalmente

$$\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

si $|z|>1$. Entonces si $|z|>2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[y_k](z) &= \frac{-1}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-1}+\frac{4}{z+2}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}\\ &= \frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}}\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n-4+4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}},\end{aligned}$$

por lo que si $k\geq 2$

$$y_k=4(-2)^{k+1}-4+k.$$

Veamos a continuación el siguiente ejemplo, en que las raices son complejas:

$$\begin{cases} x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n=1,\\ x_0=x_1=0.\end{cases}$$

Si aplicamos la transformada Z a la ecuación, tenemos que

$$\mathcal{Z}[x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n](z)=\mathcal{Z}[1](z).$$

Por un lado

$$\mathcal{Z}[1](z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1},$$

mientras que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n](z) &= \mathcal{Z}[x_{n+2}](z)-2\mathcal{Z}[x_{n+1}](z)+2\mathcal{Z}[x_n](z)\\ &= z^2\mathcal{Z}[x_n](z)-z^2x_0-zx_1-2z\mathcal{Z}[x_n](z)-2zx_0+2\mathcal{Z}[x_n](z)\\ &= (z^2-2z+2)\mathcal{Z}[x_n](z),\end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)}.$$

Desarrollamos la función en serie de Laurent para calcular x_n. Para ello en primer lugar

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} &= \frac{z}{(z-1)(z-1-i)(z-1+i)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1+i}{z-1-i} - \frac{1}{2}\frac{1-i}{z-1+i}.\end{aligned}$$

Calculamos de forma separada

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

$$\frac{1}{z-1-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1+i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^{n-1}\frac{1}{z^n},$$

$$\frac{1}{z-1+i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1-i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^{n-1}\frac{1}{z^n},$$

con lo que agrupando

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^n\frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}(1+i)^n - \frac{1}{2}(1-i)^n\right)\frac{1}{z^n},\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}), \\ (1-i)^n &= 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}),\end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{1}{z^n},$$

y por tanto

$$x_n = 1 - 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

4.4.5 Funciones de transferencia.

La función de transferencia asociada a la transformada Z se define de forma análoga a la función de transferencia asociada a la transformada de Laplace. Consideremos en este contexto una ecuación en diferencias finitas de la forma

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + ... + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = x_k, \tag{4.8}$$

siendo $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$. Entonces, suponiendo que $y_i = 0$ $i < k$, tomando la transformada Z obtenemos que

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[u_k](z),$$

por lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}\mathcal{Z}[u_k](z).$$

Se define enotnces la función de transferencia asociada a la ecuación como

$$T(z) = \frac{\mathcal{Z}[y_k](z)}{\mathcal{Z}[u_k](z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}.$$

Podemos estudiar entonces la estabilidad de la ecuación entendiendo ésta de forma análoga al caso continuo estudiada en el tema anterior, es decir, si para toda solución asociada a una condición inicial dada se verifica que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

El siguiente resultado caracteriza la estabilidad del sistema en base a los polos de la función de transferencia.

Theorem 13 *El sistema dado por la ecuación (4.8) es estable si y sólo si todos los polos de la función de transferencia verifican que* $|z| < 1$.

4.5 Ejercicios

1. Determina el radio de convergencia de las series de potencias:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-i)^n$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)\ (z+2)^n$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(ni)\, z^n$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)\, z^n,\ (a>0)$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$

2. Calcula las series de potencias centradas en 0 de las siguientes funciones indicando su bola de convergencia.

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$	(b)$f(z) = z^4 + z + 1$	(c) $f(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$
(d) $f(z) = L_0(z+1)$	(e)$f(z) = e^{z^3}$	(f) $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2}$
(g) $f(z) = \cos(z^2)$	(h)$f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$	(i) $f(z) = \frac{z-1}{(1-z)^3}$

3. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudia su carácter en la frontera del dominio de convergencia.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$	(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

4. Calcula el desarrollo en serie de potencias de las funciones siguientes en el punto que se indica. Determina además el radio de convergencia de dicha serie.

(a) $sen\, z, \quad z_0 = i$ (b) $e^z, \quad z_0 = i$ (c) $\dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = 0$

(d) $\dfrac{z^2}{z+2}, \quad z_0 = 0$ (e) $\dfrac{z}{z+2}, \quad z_0 = 1$ (f) $L_\pi(z), \quad z_0 = -1$

(g) $\dfrac{z}{1+z^2}, \quad z_0 = 0$ (h) $\dfrac{sen\, z}{z}, \quad z_0 = 0$

5. Dada la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, calcula el valor de $f^{(20)}(1)$.

6. Calcula la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z-2}$ alredor de 2 y de 0.

7. Determina la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$, alrededor de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = 1$ y $z_0 = \mathbf{i}$.

8. Calcula las series de Laurent centradas en 0 de las siguientes funciones indicando su anillo de convergencia.

(a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2}$ (b)$f(z) = ze^{1/z^4}$ (c) $f(z) = \frac{-1}{z(z+1)}$
(d) $f(z) = \frac{\cos(z^2)}{z^3}$ (e)$f(z) = \frac{z}{z+1}$ (f) $f(z) = \frac{z-1}{z^3(z+1)^2}$
(g) $f(z) = \cos(1/z^2)$ (h)$f(z) = \frac{z-i}{z^6}$ (i) $f(z) = \frac{z}{z(1-z)^3}$

9. Calcula la serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos que se indican:

(a) $z^2 e^{1/z}, \quad z_0 = 0$ (b) $e^{1/(1-z)}, \quad z_0 = 1$
(c) $z sen\,(1/(z-1)), \quad z_0 = 1$ (d) $\cos(1/z), \quad z_0 = 0$

10. Sea función $f(z) = L_\pi(z)$, ¿puede escribirse dicha función como una serie de Laurent en un cierto anillo alrededor del punto $z_0 = 0$? ¿Por qué?.

11. Calcula la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ alrededor del punto $z_0 = \mathbf{i}$.

12. Calcula el desarrollo de Laurent alrededor de los polos de la función:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2\mathbf{i})}.$$

13. Encontrar la transformada Z de las siguientes sucesiones determinando su conjunto de convergencia.

(a) $y_n = n+1$. (b) $y_n = (0,1,0,1,0,1,...)$. (c) $y_n = n^4$.
(d) $y_n = (0,1,1,1,..)$. (e) $y_n = 2^{2n}$. (f) $y_n = 1+2^n$.
(g) $y_n = 1/2^n$. (h) $y_n = n3^n$. (i) $y_n = (0,1,0,2,0,4,...,0,2^n,...)$.

14. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 0$. (b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$. (c) $y_{n+2} + \lambda^2 y_n = 0$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$. (e) $y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = 0$. (f) $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$.
(g) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 0$. (h) $y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} - 2y_n = 0$. (i) $y_{n+4} + y_{n+2} - 2y_n = 0$.

15. Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas:

(a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 2^n$. (b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 2$. (c) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 1$.
(d) $y_{n+2} + y_n = n^2$. (e) $y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = n2^n$. (f) $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^3$.
(g) $y_{n+2} + 4y_n = n(-1)^n$. (h) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 6y_n = 3^n + n$. (i) $y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+2} - 2y_n = (-1$

16. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

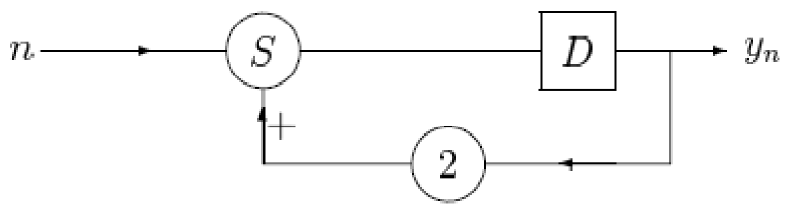
(a) $\begin{cases} y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^2 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 0 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = 0 \\ y_0 = 0 \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$

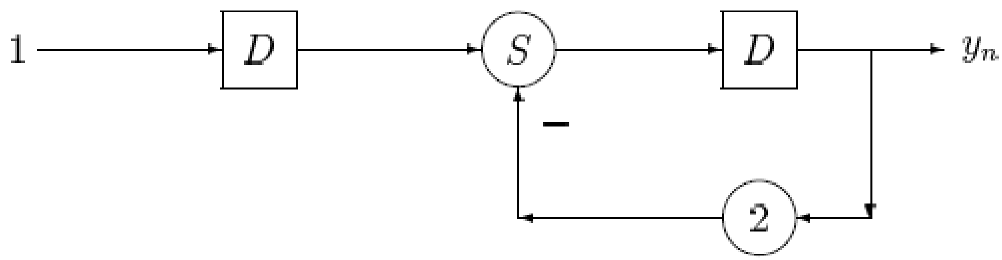
(d) $\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 1 \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = n \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y_{n+2} + y_n = n \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

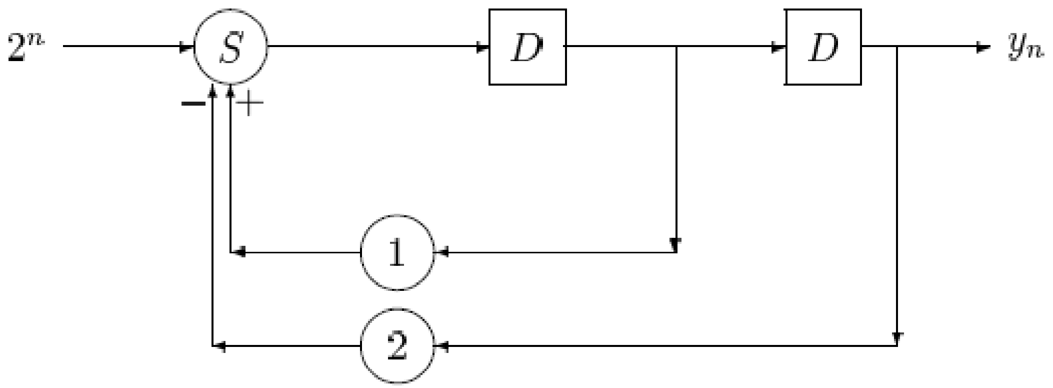
(g) $\begin{cases} y_{n+3} - y_{n+2} + 2y_{n+1} - 2y_n = 2^n \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y_{n+2} + y_n = n + 2 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 \\ y_0 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$

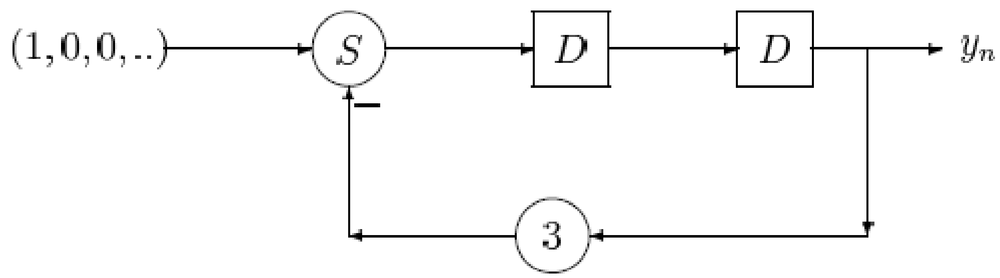
17. Determinar cuáles de las ecuaciones anteriores son estables.

18. Obtener la solución de los siguientes circuitos digitales suponiendo condiciones iniciales nulas:

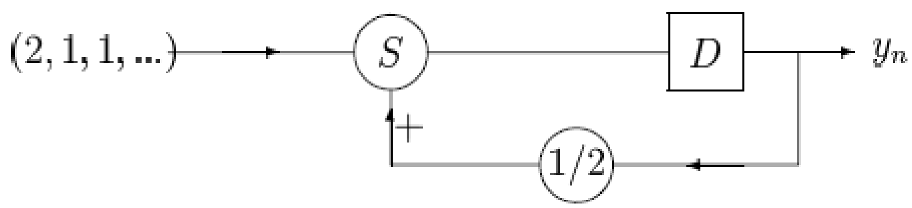


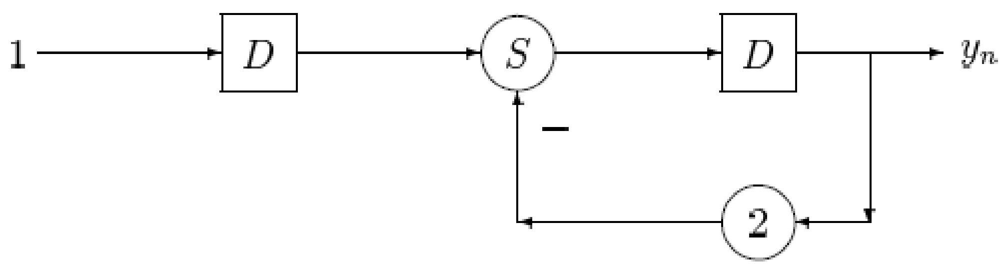


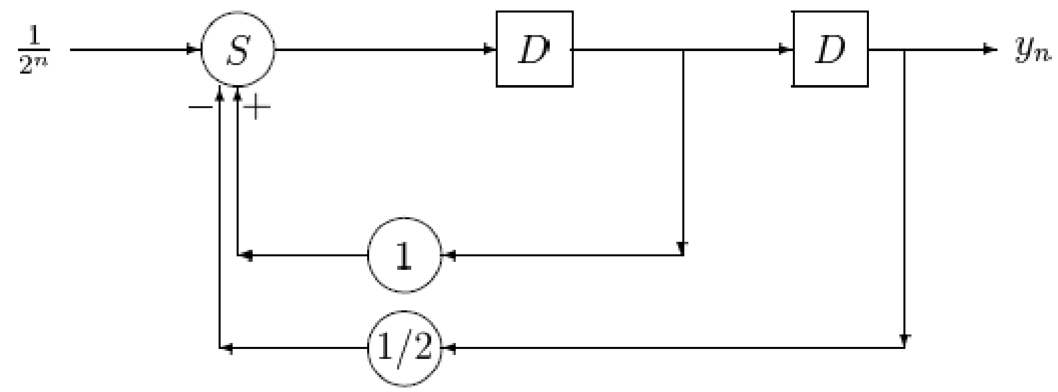




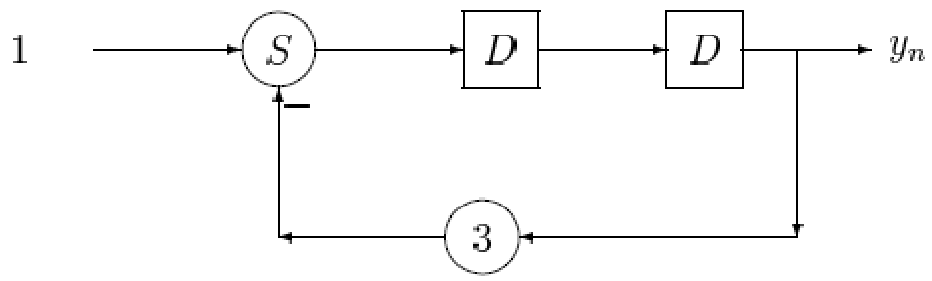
19. Calcular el comportamiento asintótico (límite cuando n tiende a infinito) de la solución de los siguientes circuitos digitales:







$\frac{1}{2^n}$
S
$-$
$+$
D
D
y_n
1
1/2



1
S
$-$
D
D
y_n
3

Capítulo 5

El Teorema de los residuos.

Sumario. Concepto de residuo y métodos de cálculo. El Teorema de los residuos. Aplicaciones.

5.1 Residuo de un punto

Sean $f(z)$ una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f(z)$. Se define el *residuo de f en z_0* como

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = a_{-1},$$

donde a_{-1} es el coeficiente de la serie de Laurent centrada en z_0 definida en un anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, $R > 0$, de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Por ejemplo, si $f(z) = e^{1/z}$, se tiene que 0 es su única singularidad. Como para todo z del anillo $A(0, 0, \infty)$ se tiene que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

se tiene que

$$\operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = \frac{1}{1!} = 1.$$

A pesar de esta definición, no será necesario calcular el desarrollo de Laurent de una función para calcular el residuo, aunque en el caso de las singularidades esenciales es ésta la única técnica de la que dispondremos. En el caso de que la singularidad sea un polo de orden k, podremos calcular el residuo de $f(z)$ sobre éste de la siguiente manera. Supongamos que para todo punto del anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, $R > 0$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con $a_{-k} \neq 0$. Si multiplicamos esta expresión por $(z-z_0)^k$, se tiene que

$$(z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n}(z-z_0)^{k-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k},$$

que como vemos es una serie de potencias. Si calculamos su derivada $(k-1)$–ésima

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)!a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1)(n+2)(z-z_0)^{n+1},$$

de donde, tomando límites cuando z tiende a z_0, obtenemos

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)!a_{-1},$$

o equivalentemente, teniendo en cuenta que $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}$,

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)].$$

Esta fórmula será la más utilizada en la práctica a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, la función $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ tiene dos singularidades aisladas, 0 y 1, que son polos de órdenes 2 y 1, respectivamente. Entonces, los residuos en dichos puntos los calcularemos con las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f(z),1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^2} = 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f(z),0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}[z^2 f(z)] \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1. \end{aligned}$$

5.2 El Teorema de los residuos

El Teorema de los residuos es uno de los resultados claves de la asignatura, ya que es un resumen de prácticamente todo el análisis complejo que se ha estudiado. Presenta también aplicaciones al cálculo real de las cuales estudiaremos una pequeña muestra durante el curso. Aunque existe una versión del mismo para curvas cerradas en general utilizando el concepto de índice de un punto respecto a una curva cerrada, se explicará aquí el resultado para curvas de Jordan.

Theorem 14 ***(de los residuos)*** *Sea γ una curva de Jordan C^1 a trozos orientada positivamente. Sea $f(z)$ una función derivable en $\overline{\mathrm{I}}(\gamma)$ excepto para una cantidad finita de puntos singulares aislados $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathrm{I}(\gamma)$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), z_j).$$

Demostración. Al haber una cantidad finita de singularidades aisladas, existirá un número real $r > 0$, suficientemente pequeño, de manera que las circunferencias $\gamma_j(t) = z_j + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $1 \leq j \leq n$, están en el interior de γ, no se cortan entre sí, y cada una contiene en su interior una y sólo una de las singularidades de la función. Aplicando el Teorema de Cauchy para un conjunto de curvas, se tiene que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz,$$

con lo que el teorema estará demostrado si probamos que

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z_j), \tag{5.1}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Ahora bien, dentro de cada circunferencia se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_j)^n,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_j} f(z)dz &= \int_{\gamma_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_j)^n dz \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n (z - z_j)^n dz.\end{aligned}$$

Calculamos aparte $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n(z-z_j)^n dz$. Si $n \geq 0$, la función $a_n(z-z_j)^n$ es derivable por tratarse de un polinomio, por lo que

$$\int_{\gamma_j} a_n(z - z_j)^n dz = 0$$

por el Teorema de Cauchy. Si $n = -1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_j} \frac{a_{-1}}{z - z_j} dz &= a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt \\ &= 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z_j).\end{aligned}$$

Finalmente, si $n \leq -2$, se tiene por las fórmulas integrales de Cauchy para la derivada que

$$\int_{\gamma_j} \frac{a_n}{(z - z_j)^{-n}} dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} g^{n-1)}(z_j) = 0,$$

donde $g(z) = a_n$.

Así, la igualdad (5.1) es cierta y

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), z_j),$$

con lo que termina la prueba del teorema.□

Por ejemplo, para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)}dz,$$

con $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, basta con darse cuenta que las singularidades aisladas del integrando, 0 y 1, están dentro de la curva, con lo que aplicando el teorema de los residuos tenemos que, si denotamos $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)}dz &= 2\pi i[\text{Res}(f(z), 0) + \text{Res}(f(z), 0)] \\ &= 2\pi i[-1 + 1] = 0.\end{aligned}$$

5.3 Aplicaciones al cálculo de integrales reales

Para finalizar este tema explicaremos algunas de las prometidas aplicaciones del Teorema de los residuos al cálculo real, especialmente al cálculo de integrales definidas. Por motivos de tiempo no será posible hacer demostraciones de todas las fórmulas que se obtendrán a continuación, que serán objeto de estudio durante las clases prácticas de la asignatura. Los alumnos ya habrán estudiado las integrales impropias durante la asignatura de primer curso *fundamentos matemáticos de la ingeniería*, pero haremos un pequeño resumen de las nociones básicas sobre este tipo de integrales. Las integrales que consideraremos son las siguientes:

- $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$ donde $f(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ donde P, Q son funciones polinómicas. Estas integrales se obtendrán calculando los residuos en el círculo unidad de una función a determinar de un modo estándar.

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt$ donde P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ (deg denota el grado del polinomio), y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas integrales se obtendrán a partir de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{Res}(P/Q, z).$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\cos(at)/Q(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\sin(at)/Q(t)dt$ donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas integrales se obtendrán como partes real e imaginaria de $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)e^{iat}/Q(t)dt$ que se calcula con la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)e^{iat}/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z)>0} \text{Res}(f, z),$$

con $f(z) = e^{iaz}P(z)/Q(z)$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt$ donde P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ y todo cero real de Q tiene a lo sumo multiplicidad 1. El valor principal de esta integral dado por

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} P(t)/Q(t)dt$$

se obtendrá calculando

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(P/Q, z) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)=0} \mathrm{Res}(P/Q, z).$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\cos(at)/Q(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\sin(at)/Q(t)dt$ donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ y todos los ceros reales de Q son simples. En este caso
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} P(t)e^{iat}/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f, z) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)=0} \mathrm{Res}(f, z)$$
donde $f(z) = e^{iaz}P(z)/Q(z)$, de donde podemos obtener los valores principales de las integrales anteriores.

5.4 Ejercicios

1. Determina y clasifica las singularidades de las funciones:

   (a) $\dfrac{1}{z - z^3}$ (b) $\dfrac{z^4}{1 + z^4}$ (c) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$

   (d) $\dfrac{1}{z\,(z^2+4)^2}$ (e) $\dfrac{z^2+1}{e^z}$ (f) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$

   (g) $e^{z-\frac{1}{z}}$

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

   (a) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$ (b) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ (c) $\dfrac{1}{z\,(1-z^2)}$

   (d) $\dfrac{sen\, z}{(z+1)^3}$ (e) $\operatorname{tg} z$ (f) $\dfrac{1}{sen\, z}$

   (g) $e^{z+\frac{1}{z}}$ (h) $sen\,(z) sen\,(1/z)$ (i) $\dfrac{e^{2\,z}}{(z-1)^2}$

   (j) $\dfrac{z - sen\, z}{z}$ (k) $z\cos(1/z)$ (l) $\dfrac{1}{z + z^2}$

3. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, indicando además de qué tipo son dichas singularidades.

   (a) $f(z) = \dfrac{senz}{(z+1)^3}$, (b) $g(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, (c) $h(z) = \dfrac{z - senz}{z}$

4. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, clasificando éstas previamente.

   (a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^3(z+\mathbf{i})}$, (b) $g(z) = e^{1/(z-2\mathbf{i})}$, (c) $h(z) = \dfrac{z - senz}{z(z-1)}$

5. Utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:

$$\text{(a)} \int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz, \qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{(b)} \int_\gamma z^2 e^{1/z}\,dz, \qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{(c)} \int_\gamma \frac{z+1}{z^2-2z}\,dz, \qquad \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{(d)} \int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz, \qquad \gamma(t) = 2 + \frac{e^{\mathbf{i}t}}{2},\ t \in [0, 2\pi]$$

6. Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular en función del parámetro r el valor de las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$$

$$\text{(b)} \int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$$

$$\text{(c)} \int_\gamma e^z \frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$$

$$\text{(d)} \int_\gamma z^2 e^{1/z} dz.$$

7. Sea γ el cuadrado de vértices (R, R), $(-R, R)$, $(-R, -R)$ y $(R, -R)$ recorrido en sentido positivo. Determinar las integrales siguientes en función del parámetro R.

$$\text{(a)} \int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$$

$$\text{(b)} \int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$$

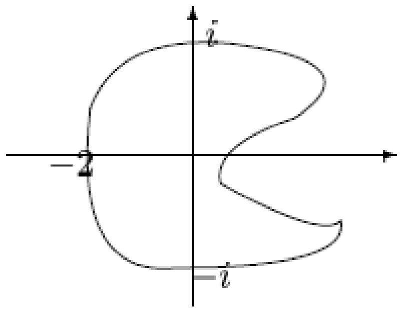
$$\text{(c)} \int_\gamma e^z \frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$$

$$\text{(d)} \int_\gamma z^2 e^{1/z} dz.$$

8. Calcula el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{\mathbf{i}z+2}\,dz$$

siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura siguiente.



Bibliografía

[BaNe] J. Bak y D. J. Newman, *Complex analysis,* Springer Verlag, Berlin, 1999.

[ChBr] R. V. Churchill y J. W. Brown, *Variable compleja y aplicaciones,* McGraw–Hill, 1992.

[Con] J. B. Conway, *Functions of one complex variable,* Springer–Verlag, 1978.

[Der] W. R. Derrick, *Variable compleja con aplicaciones,* Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.

[Kre] E. Kreyszig, *Matemáticas avanzadas para la ingeniería (vol. 2)*, Limusa–Wiley, 2000.

[LaSh] M. A. Lavréntiev y B. V. Shabat, *Métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja,* Mir–Rubiños 1991.

[Mak] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea Publishing Company, New York, 1985.

[MaHo] J. E. Marsden y M. J. Hoffman, *Basic complex analysis,* W. H. Freeman & Co., 1999.

[Mur] J. A. Murillo, *Variable compleja y transformadas,* DM–Universidad de Murcia, 2000.

[Oga2] K. Ogata, *Discrete–time control systems,* Prentice Hall, 1995.

[Rud] W. Rudin, *Análisis real y complejo,* McGraw–Hill, 1988.

[Sen] T. B. Senior, *Mathematical methods in electrical engineering,* Cambridge University Press, 1986.

[VLA] L. Volkovyski, G. Lunts e I. Aramanovich, *Problemas sobre la teoría de variable compleja,* Mir, 1984.

[Wun] A. D. Wunsch, *Variable compleja y sus aplicaciones,* Addison–Wesley Iberoamericana, 1997.