Tema 4. Trigonometría. Números complejos

Pepe y Guillamón

October 29, 2003

Contents

Chapter 4

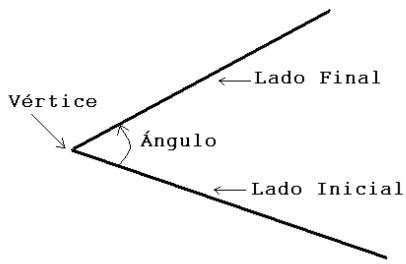
Trigonometría. Números complejos

4.1 Trigonometría

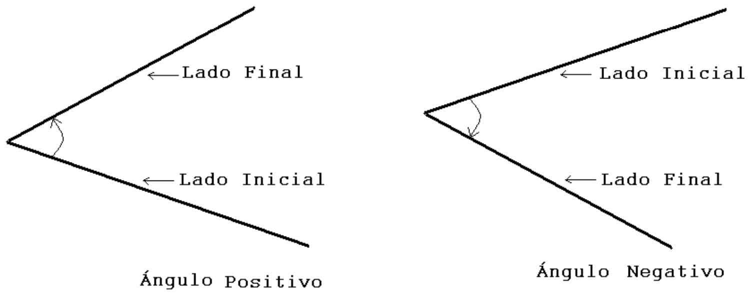
Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera. En esta sección nos centraremos en el estudio de los conceptos fundamentales de la trigonometría plana.

4.1.1 Trigonometría plana

El concepto de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría. Así, un ángulo queda determinado por un par de semirrectas con origen en un mismo punto. Las semirrectas se llaman lado inicial y final. Al origen común se le denomina vértice del ángulo.



Teniendo en cuenta que las semirrectas son diferentes en cuanto a su identificación (lado inicial y final), se suele identificar ángulos de magnitud positiva si se generan con un radio que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj.

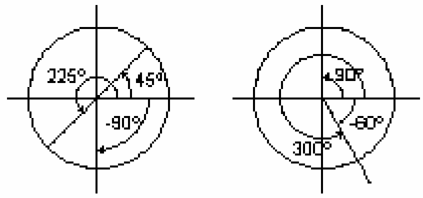


Por otro lado, existen diversas unidades a la hora de "medir" ángulos

- **Grado**. En trigonometría, un ángulo de amplitud 1 grado se define como aquel cuya amplitud es igual a 1/360 de la circunferencia de un círculo.

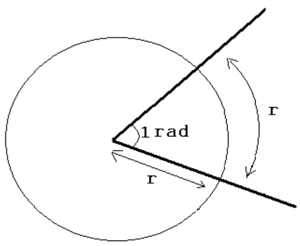
Las equivalencias son las siguientes:

$*$ 360^o = un giro completo alrededor de una circunferencia
$*$ $180^o = 1/2$ vuelta alrededor de una circunferencia
$*$ $90^o = 1/4$ de vuelta
$*$ $1^o = 1/360$ de vuelta, etc.



En ocasiones se utilizan los conceptos de minutos y segundos asociado como alternativa a la expresión "decimal" de ángulos. Así un grado se divide en 60 minutos, cada uno de los cuales equivale a 1/21.600 de la circunferencia de un círculo; cada minuto se divide en 60 segundos, cada uno de los cuales equivale a 1/1.296.000. Los grados se indican normalmente con el símbolo °, los minutos con ' y los segundos con ", como en 41°18'09", que se lee "41 grados 18 minutos y 9 segundos".

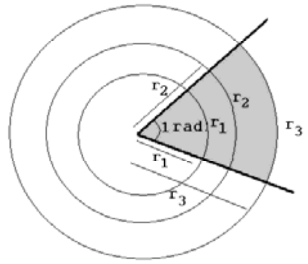
- **Radián.** Es la medida usual de ángulos en matemáticas. La medida, en radianes, de un ángulo se expresa como la razón del arco formado por el ángulo, con su vértice en el centro de un círculo, y el radio de dicho círculo. Esta razón es constante para un ángulo fijo para cualquier círculo.



La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en 10 partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es pequeña o familiar.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; solo basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

$$Long.\_arco\_de\_circunferencia = [\acute{A}ngulo\_en\_radianes] \quad \cdot \quad [Radio\_de\_la\_circunferencia]$$



4.1.2 Relación entre estas medidas

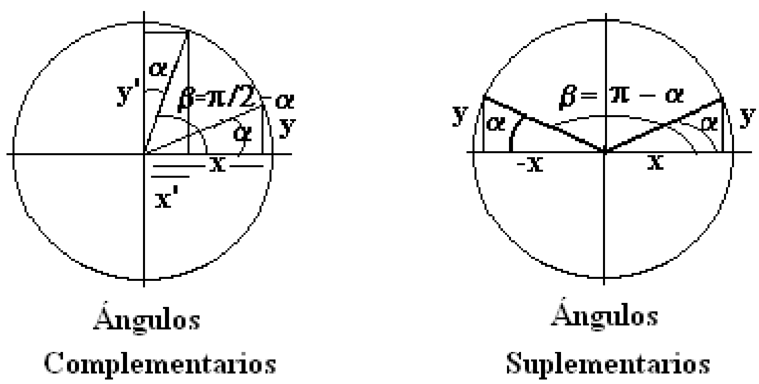
Teniendo en cuanta las relaciones anteriores se tiene sin dificultad la siguiente relación:

$$2 \cdot \pi \ rad = 360 \ grados$$

a partir de la cual se obtiene de manera inmediata la conversión entre ambas unidades de medida.

4.1.3 Angulos complementarios y suplementarios

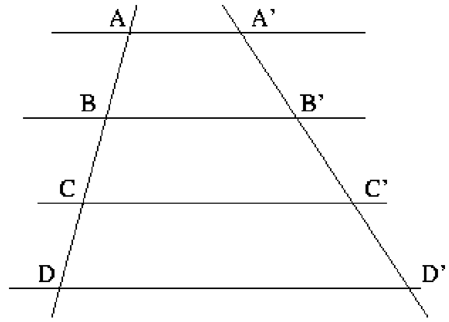
En general dos ángulos se dicen complementarios si verifican que su suma es igual a $\pi/2$ rad. (90 grados), por otro lado,se dice que dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a π radianes (180 grados)



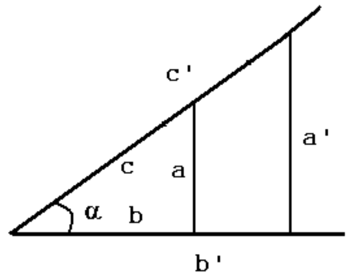
4.2 Razones trigonométricas

Dado un ángulo cualesquiera, realizando un giro de manera adecuada podemos llevarlo a un sistema de referencia cartesiana que tiene origen en el punto (0,0), y la semirrectas inicial la haremos coincidir con el eje de abscisas.

A partir del **teorema de Tales** que afirma que , "*Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.* ",



obtenemos el siguiente resultado de manera inmediata: "*Dado un ángulo α si trazamos perpendiculares paralelas a uno de los lados,* se *determinan sobre éstos segmentos proporcionales*".



lo que se traduce en que la siguiente relación es siempre constante:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Dicha constante recibe el nombre de coseno del ángulo α ($\cos \alpha$).

Utilizando el teorema de Pitágoras se obtienen relaciones análogas que recibe en nombre de seno y tangente asociado al ángulo α.

- $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ • $sen(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ • $tg(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

Obviamente, en función del teorema de Pitágoras, de las expresiones anteriores se obtienen las siguientes identidades:

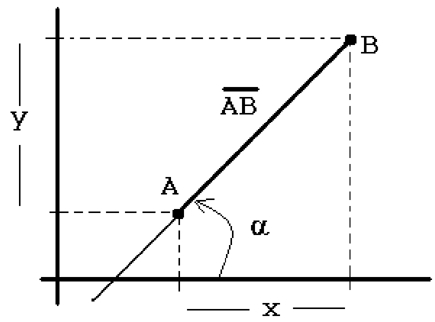
- $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ • $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

A las inversas de las anteriores razones se les llama *cosecante*, *secante* y *cotangente* del ángulo α.

- $co\sec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$ • $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ • $\cot g(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$

4.2.1 Proyecciones ortogonales

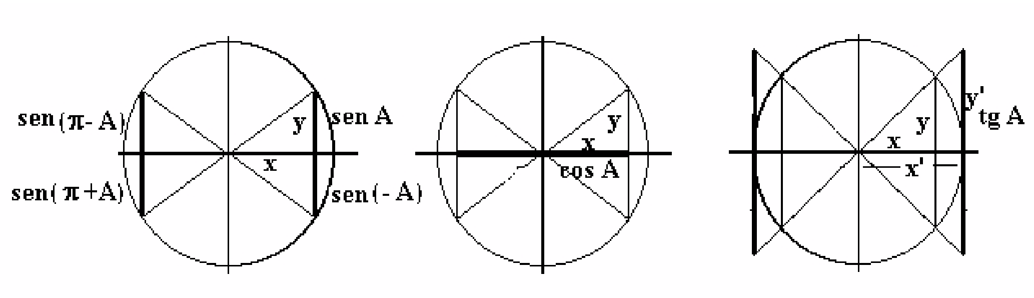
Una consecuencia obvia de la definición de seno y coseno es que la proyección ortogonal (positiva o negativa) de un segmento orientado sobre otro es igual a la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman ambos segmentos. Así, la proyección ortogonal de un segmento orientado (vector) sobre los semiejes OX y OY de un sistema de referencia cartesiano son:



$$\begin{aligned} \text{Proyección ortogonal sobre OX} &\equiv x = \overline{AB} \cdot \cos(\alpha) \\ \text{Proyección ortogonal sobre OY} &\equiv y = \overline{AB} \cdot sen(\alpha) \end{aligned}$$

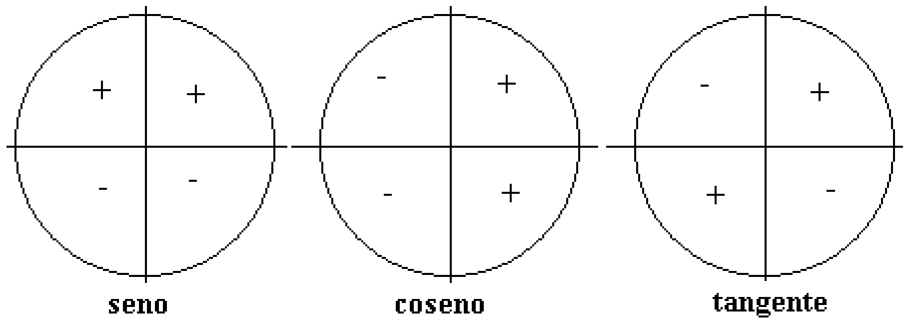
4.2.2 Ángulo generalizado

A partir de la definición dada sobre triángulos rectángulos se generaliza la definición de las distintas razones trigonométricas a cualquier ángulo, trabajando sobre una circunferencia de radio unidad (circunferencia goniométrica).



4.2.3 Signo de las razones

En cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas, las razones presentan los siguientes signos:



4.2.4 Ángulos notables

Resulta conveniente conocer las razones trigonométricas de algunos ángulos notables. Así:

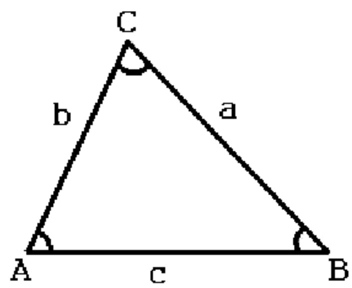
grados	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

4.2.5 Relación entre las razones trigonométricas de ángulos en distintos cuadrantes

	$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\theta = \pi \pm \alpha$	$\theta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$sen(\theta)$	$cos(\alpha)$	$\mp sen(\alpha)$	$-cos(\alpha)$	$-sen(\alpha)$
$cos(\theta)$	$\mp sen(\alpha)$	-$cos(\alpha)$	$\pm sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$
$tg(\theta)$	$\mp cotg(\alpha)$	$\pm tg(\alpha)$	$\mp cotg(\alpha)$	$-tg(\alpha)$

4.3 Relaciones fundamentales en un triángulo

Veamos una serie de resultados que serán útiles a la hora de trabajar con triángulos no necesariamente rectángulos. Así, sean A, B y C los ángulos de un triángulo y sean, respectivamente a, b y c sus lados opuestos.



Entonces se verifican las siguientes relaciones:

- **Relación fundamental entre los ángulos de un triángulo**

$$A + B + C = \pi\ rad$$

- **Teorema del seno**:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

- **Teorema del coseno**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

- **Teorema de las tangentes**:

$$\frac{a+b}{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{a-b}{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

4.3.1 Funciones recíprocas

Hasta el momento, dado un ángulo nos proponemos obtener las razones trigonométricas asociadas a dicho ángulo. Podemos plantearnos la pregunta recíproca: Si conocemos el valor de la razón trigonométrica, ¿podemos conocer el ángulo con el que trabajamos?. La respuesta es afirmativa definiendo de manera adecuada el conjunto donde podemos definir de manera recíproca las funciones trigonométricas. Así, se definen las funciones arcoseno($arcsen$), arcocoseno ($arccos$) y arcotangente ($arctg$) de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} Arcsen: & [-1,1] & \rightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha \qquad \Leftrightarrow sen(\alpha) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Arc\cos: & [-1,1] & \rightarrow & [0, \pi] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha \qquad \Leftrightarrow \cos(\alpha) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Arctg: & (-\infty, \infty) & \rightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha \qquad \Leftrightarrow tg(\alpha) = x \end{array}$$

Así, por ejemplo, tenemos:

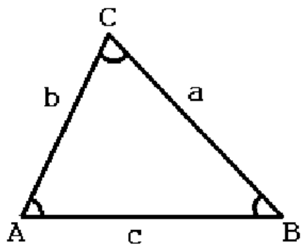
$$arcsen(\tfrac{1}{2}) = \pi/6 \qquad arctg(1) = \pi/4 \qquad \arccos(\tfrac{1}{2}) = \pi/3$$

$$arcsen(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}) = -\pi/3 \qquad arctg(-1) = -\pi/4 \qquad \arccos(\tfrac{-1}{2}) = \tfrac{3\pi}{2}$$

4.3.2 Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es hallar todos los elementos de este, es decir, sus tres lado y sus tres ángulos.

A partir de los resultados vistos anteriormente, es posible encontrar todos los elementos de un triángulo cualesquiera conociendo tres de sus elementos, siendo alguno de los datos conocidos la longitud de uno de sus lados.



La siguiente tabla recoge los casos más comunes:

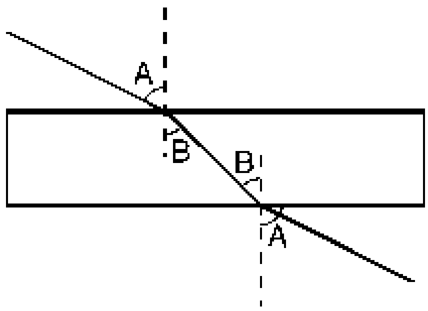
Datos			
a, A, B	$C = \frac{\pi}{2} - A - B$	$b = a\frac{sen(B)}{sen(A)}$	$c = a\frac{sen(C)}{sen(A)}$
a, b, A	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$	$B = arcsen\left(\frac{b}{a}sen(A)\right)$	$C = \frac{\pi}{2} - A - B$
a, b, c	$A = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$	$B = \arccos\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)$	$C = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

4.3.3 Fórmulas trigonométricas

- Fórmulas de los ángulos suma y diferencia:
  - $sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
  - $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg(\alpha) \pm tg(\beta)}{1 \mp tg(\alpha)tg(\beta)}$
  - $cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Fórmulas del ángulo doble y mitad:
  - $sen(2\alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
  - $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$
  - $sen(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
  - $\cos(\frac{\alpha}{2})) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
  - $tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$
- Fórmulas de adición:
  - $sen(\alpha) \pm sen(\beta) = 2sen(\frac{\alpha\pm\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha\mp\beta}{2})$
  - $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  - $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2sen(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot sen(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  - $tg(\alpha) \pm tg(\beta) = \frac{sen(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$

4.3.4 Índice de refracción

Cuando un rayo de luz choca contra la superficie de una superficie plana de cristal, generalmente se desvía formando un ángulo. Al dibujar una línea perpendicular al punto de la superficie donde incide el rayo. Si el rayo alcanza la superficie con una trayectoria que forma un ángulo A con la superficie, continúa dentro del cristal formando un ángulo B,



con:

$$sen(B) = \frac{sen(A)}{n}$$

donde el número n ("**índice de refracción**") es una propiedad del cristal y es mayor que 1.

4.3.5 Ejercicios resueltos

1. Comprobar la siguiente identidad trigonométrica curiosa:

$$tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = tg^2(\alpha) \cdot sen^2(\alpha)$$

Solución:

En primer lugar desarrollaremos el primer término de la igualdad. Así:

$$\begin{aligned} tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) &= \frac{sen^2}{\cos^2(\alpha)} - sen^2(\alpha) = \\ \frac{sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha)(1-\cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} = \\ \frac{sen^2(\alpha)\cdot(\overbrace{sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}^{1} - \cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha)\cdot sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \\ &= tg^2(\alpha)\cdot sen^2(\alpha) \end{aligned}$$

2. Sabiendo que $tg(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$ calcular $sen(x)$.

Solución:

Como vimos, utilizando la expresión de la tangente del ángulo doble tenemos::

$$tg(x) = tg(2\frac{x}{2}) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 - tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 * \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

Ahora bien, conocemos $tg(x)$ pero nos piden $sen(x)$. Este caso es típico, para ello partiremos de la relación fundamental:

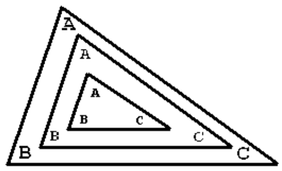
$$\begin{aligned} sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \Rightarrow \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} \\ 1 + \frac{1}{tg^2(x)} &= \frac{1}{sen^2(x)} \Rightarrow 1 + \frac{1}{(4/3)^2} = \frac{1}{sen^2(x)} \\ sen^2(x) &= \frac{16}{25} \Rightarrow sen(x) = \pm\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Notar que tenemos dos valores (uno positivo y otro negativo) ya que la tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, pero no así en seno.

3. Conocidos los tres ángulos de un triángulo es posible resolver el triángulo?

   Solución:

   La respuesta a esta cuestión es negativa, ya que existen infinitos triángulos semejantes a uno dado con idénticos ángulos.

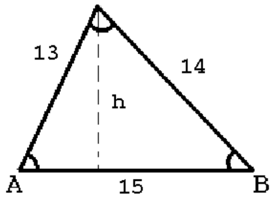
   

   Lo que si sabremos es que los lados de todos ellos serán proporcionales.

4. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13, 14 y 15 cm. Hallar sus ángulos así como es área del triángulo.

   Solución:

   A partir de los datos del problema debemos encontrar los valores de los ángulos.

Como nos dan sus tres lados podemos aplicar el teorema del coseno, de donde:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(C) \\ 15^2 &= 13^2+14^2-2*13*14*\cos(C) \\ \cos(C) &= \frac{13^2+14^2-15^2}{2*13*14} \Rightarrow C=\arccos(0.3846)=1.176 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(A) \Rightarrow \cos(A)=\frac{15^2+13^2-14^2}{2*13*15} \\ A &= \arccos(0.508)=1.038 \text{ rad} \end{aligned}$$

Utilizando que la suma de los ángulos ha de ser π rad, tenemos:

$$B=\pi-1.038-1.176=0.927$$

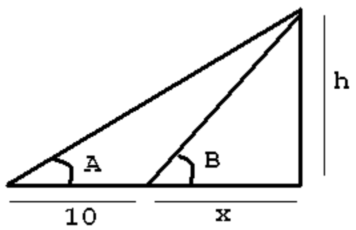
Por otro lado para calcular el área debemos notar que, por ejemplo:

$$sen(A)=\frac{h}{13} \Rightarrow h=13*\sin(1.038)=11.198$$

de donde:

$$area=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{15*11.198}{2}=83.985 \text{ cm}^2$$

5. Encontrar el valor de x y h a partir de los datos que se nos indican en el siguiente dibujo, sabiendo que $A=\pi/6$ y $B=\pi/3$.



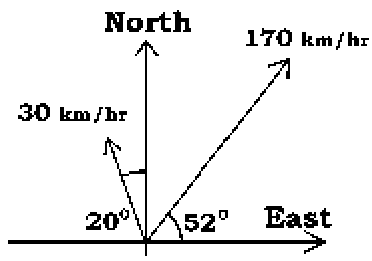
Solución:

A partir de las tangentes de los ángulos A y B obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} tg(A)=\frac{h}{10+x} \\ tg(B)=\frac{h}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} tg(\pi/6)=\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ tg(\pi/3)=\sqrt{3} \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{h}{10+x} \\ \sqrt{3}=\frac{h}{x} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} h=5\sqrt{3} \text{ unidades} \\ x=5 \text{ unidades} \end{array}$$

6. Un aeroplano vuela a 170 km/s hacia el nordeste, en una dirección que forma un ángulo de 52° con la dirección este. El viento está soplando a 30 km/h en la dirección noroeste, formando un ángulo de 20^o con la dirección norte. ¿Cuál es la "velocidad con respecto a tierra" real del aeroplano y cuál es el ángulo A entre la ruta real del aeroplano y la dirección este?



Solución:

Indiquemos la velocidad del aeroplano relativa al aire como V, la velocidad del viento relativa a tierra como W, y la velocidad del aeroplano relativa a tierra U=V+W.

Para ejecutar la suma real cada vector debe descomponerse en sus componentes. Por tanto obtenemos:

$$Vx = 170cos(52°) = 104.6 \qquad Vy = 170sen(52°) = 133.96$$

$$Wx = -30sen(20°) = -10.26 \qquad Wy = 30cos(20°) = 28.19$$

de donde:

$$Ux = 94.4 \qquad Uy = 162.15$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras, dado que

$$U^2 = Ux^2 + Uy^2 \Rightarrow U = 187.63km/h$$

Por otro lado

$$cos(A) = \frac{U_x}{U} = 0.503125 \Rightarrow A = \arccos(0.503125) = 1.0436 \text{ rad} = 59.8^0$$

4.3.6 Ejercicios propuestos

1. Calcular todos los ángulos $\alpha \in [0, 2\pi]$ tales que $2 \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot tg(\alpha)$ (**sol:** $\alpha = \pi/6$, $\alpha = 5\pi/6$)

2. Si α y β son ángulos comprendidos entre 0 y 2π radianes. ¿Qué relación hay entre ellos si se verifica que $sen(\alpha) = -sen(\beta)$ y $cos(\alpha) = \cos(\beta)$? (**sol:** $\beta = -\alpha$).

3. ¿Que relación existe entre las razones trigonométricas de $(\pi/4 - \alpha)$ y $(\pi/4 + \alpha)$? (**sol:** Al ser complementarios $sen(\pi/4 - \alpha) = \cos(\pi/4 + \alpha)$ y viceversa).

4. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 1/3$ y que $\alpha \in [0, \pi/2]$ determinar $\cos(\pi/2 - \alpha)$, $sen(3\pi/2 + \alpha)$ y $tg(\pi - \alpha)$ (**sol:** $\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $sen(3\pi/2 + \alpha) = -1/3$; $tg(\pi - \alpha) = 2\sqrt{2}$).

5. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 3/5$ y que $\alpha \in [3\pi/2, 2\pi]$ determinar $sen(\alpha)$, $tg(\alpha)$ y $cos(\alpha/2)$ (**sol:** $sen(\alpha) = -4/5$; $tg(\alpha) = -4/3$; $\cos(\alpha) = -2/\sqrt{5}$).

6. Comprobar que las siguientes expresiones no dependen del valor de α y determinar su valor:

$$sen(\alpha)\cos(\pi/4 - \alpha) - \cos(\alpha)\cos(\pi/4 + \alpha) \quad (\textbf{sol:} \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos(\alpha)\cos(\pi/6 + \alpha) + sen(\alpha)\cos(\pi/3 - \alpha) \quad (\textbf{sol:} \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

7. Demostrar las identidades:

$$\begin{array}{ll} a)\ \cos(\alpha) = sen\,(\alpha + \pi/2) & b)\ 1 + \cot g^2(\alpha) = \cos ec^2(\alpha) \\ c)\ \sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha) & d)\ tg(\alpha) + \cot g(\alpha) = \sec(\alpha) \cdot \cos ec(\alpha) \end{array}$$

8. Sabiendo que $tg(\alpha) = 2$ y que $4 \cdot sen(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$ hallar $tg(\beta)$ (**sol:** $tg(\beta) = 7/2$).

9. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \cdot \cos(x) = 3 \cdot tg(x)\ (\textbf{sol: } x = \pi/6 + 2k\pi\ ;\ x = 5\pi/6 + 2k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$$

10. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica sabiendo que $x \in [0, 2\pi]$:

$$3sen(2x) \cdot \cos(x) = 2sen^3(x)\ (\textbf{sol: } x = 0, \pi, \pi/6 \text{ ó } 7\pi/6 \text{ rad})$$

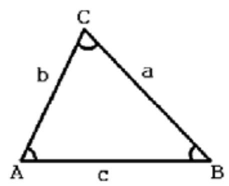
11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que x e $y \in [0, 2\pi]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x) + \cos(y) = \sqrt{2} \\ x + y = \pi/2 \end{array} \right. \quad (\textbf{sol: x=y=}\pi/4\ ;\ \text{x=}3\pi/4\ \text{y=-}\pi/4)$$

12. Resolver, si es posible, los siguientes triángulos:

$$\begin{array}{rcl} a)\ a &=& 100cm, B = 47^0, C = 63^0\ (\textbf{sol}: b = 77.82cm, c = 94.81cm, A = 70^0) \\ b)\ A &=& \pi/3, B = \pi/2, C = \pi/6\ (\textbf{sol: } Infinitos\ tri\acute{a}ngulos) \\ c)\ a &=& 25\ cm, b = 30cm, c = 40cm\ (\textbf{sol: } A = 0.67rad, B = 0.85rad, C = 1.62rad) \\ d)\ b &=& 6cm, c = 8\text{ cm}, C = 57^0\ (\textbf{sol}: a = 9.48cm, A = 84.03^0, B = 38.97^0) \end{array}$$

donde:



13. Sean A y B los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo. Probar que:
    (a) $sen^2(A) + sen^2(B) = 1$
    (b) $tg(A) \cdot tg(B) = 1$

14. Sean A, B y C los ángulos de un triángulo cualesquiera. Probar que
    (a) $sen(A) = sen(B + C)$
    (b) $cos(A) + cos(B + C) = 0$

15. Los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 cm respectivamente y forman un ángulo de 0.5 rad. Calcular la medida de sus diagonales (**sol:** 13.46 cm y 4.31 cm).

16. Se desea calcular la distancia entre dos puntos A y B de un terreno llano que no son accesibles. Para ello, se toman dos puntos accesibles del terreno C y D y se determinar las distancias y ángulos siguientes:

$$\begin{array}{lll} CD = 300m & \alpha = ACD = 85^0 & \beta = BDC = 75^0 \\ & \alpha' = BCD = 40 & \beta' = ADC = 35^0 \end{array}$$

Calcular la distancia de A a B (**sol:227.7 m)**

4.4 El cuerpo de los números complejos

4.4.1 Introducción

Aunque parezca que los complejos se introducen a partir de la resolución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, nada más lejos de la realidad, esta era rechazada así como $\log x = -1$, o $\sin x = 2$, eran irresolubles. Los complejos hacen su aparición a raiz de la ecuación cúbica. Supongamos que queremos resolver la ecuación $x^3 - 6x - 4$, la forma de proceder fue similar a la de la ecuación de segundo grado, es decir, una solución por radicales, obtenida por del Ferro en 1515.

Teorema 4.1 *Una solución de la ecuación cúbica reducida del tipo $x^3 = mx + n$ vine dada por*

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}$$

Proof. Sea $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, elevando al cubo ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 &= p + 3\sqrt[3]{p^2}\sqrt[3]{q} + 3\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q^2} + q = p + q + 3\sqrt[3]{pq}\,(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) = \\ &= p + q + 3x\sqrt[3]{pq} = mx + n \end{aligned}$$

igualando, se tiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p + q = n \\ 3\sqrt[3]{pq} = m \end{array} \right. & \Rightarrow \quad pq = \left(\frac{m}{3}\right)^3 ; 4pq = 4\left(\frac{m}{3}\right)^3 \\ n^2 &= (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \\ n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3 &= p^2 + q^2 + 2pq - 4pq = (p-q)^2 \end{aligned}$$

y sumando y restando, las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} p + q = n \\ p - q = \sqrt{n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \end{array} \right.$$

se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{n}{2} + \sqrt{n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \\ q = \frac{n}{2} - \sqrt{n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \end{array} \right.$$

de donde, la solución es:

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}$$

■

Ejemplo 4.1 *Resolver* $x^3 = 6x + 9$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{9^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{9^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} = \sqrt[3]{8} + 1 = 3$$

Ejemplo 4.2 *Resolver* $x^3 = 6x + 4$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}} = \left(-1 + \sqrt{-1}\right) + \left(-1 - \sqrt{-1}\right) = -2 \end{aligned}$$

Solución que causo gran estupor en el siglo XVI, hasta que Argand y Gauss no dan una interpretación de los números complejos, se les calificaba como "anfibios entre el ser y no ser".

La solución de la ecuación cúbica completa $x^3 + ax^2 + bx + c$, se obtiene mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{3}(z - a)$,y reduciendola a la anterior.

4.4.2 El cuerpo de los números complejos

Llamamos número complejo, a un elemento $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, diremos que dos números complejos (x, y) y (x', y') son iguales, cuando $x = x'$ e $y = y'$, a x se le denomina parte real y a y parte imaginaria, escribiremos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$.

Definimos la suma $z+z' = (x, y)+(x', y') = (x + x', y + y')$ y el producto $z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + yx')$ con estas operaciones $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo.

4.4.3 Inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Consideramos el conjunto de puntos de la forma $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ y la aplicación:

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$$

definida por $p(x) = (x, 0)$. Esta aplicación es un isomorfismo, es decir, es biyectiva y

$$\begin{aligned} x + y &\mapsto p(x + y) = p(x) + p(y) \\ x \cdot y &\mapsto p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y) \end{aligned}$$

y podemos identificar $(x, 0)$ con x.

Además $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$, definiendo $(0, 1) = i$.

Observemos que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, es decir, i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

A $z = x + yi$ se le llama forma binómica. Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ a z se le denomina imaginario puro y si $\operatorname{Im}(z) = 0$ a z se le llama real.

Ejemplo 4.3 *Efectúa* $\frac{i}{3+i}$, $\frac{1+i^7}{1-i}$ *y* $\frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i}$

$$\frac{i}{3+i} = \frac{i}{3+i}\frac{3-i}{3-i} = \frac{3i-i^2}{3^2-i^2} = \frac{3i-(-1)}{9-(-1)} = \frac{3i+1}{9+1} = \frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$$

Observemos que:

$$i^0 = 1, i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, \ldots$$

$$\frac{1+i^7}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i} &= \frac{1+3i-2i+i^2}{1+3i} = \frac{1+i-1}{1+3i} = \frac{i}{1+3i} = \\ &= \frac{i}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{i-3i^2}{1^2-3^2i^2} = \frac{i+3}{1+9} = \frac{3}{10}+i\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 *Resuelve la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \\ &= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{-1}\right)}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \end{aligned}$$

Definición 4.1 *Se denomina conjugado de un número complejo* $z = a + bi$ *a* $\overline{z} = a - bi$.

Evidentemente $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Propiedades Si z y z' son dos números complejos cualesquiera.

$\overline{\overline{z}} = z$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

z es imaginario puro$\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

Observemos que $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Ejercicio 4.1 *Comprueba que la suma* $z + \frac{1}{z}$ *nunca puede ser imaginario puro, salvo que* z *también lo sea.*

Sea $z = x + iy \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

para que sea imaginario puro, tiene que ser:

$$x + \frac{x}{x^2+y^2} = 0 = x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow x = 0$$

Ejercicio 4.2 *¿Qué condiciones tiene que cumplir z para que $z + \dfrac{1}{z}$ sea real?*

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

para que sea un número real, tiene que verificar:

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} y = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow 1 = x^2+y^2 \end{array} \right.$$

o z es un número real o bien su afijo se encuentra sobre la circunferencia unidad de centro $(0,0)$.

Ejercicio 4.3 *Dado el polinomio $x^2+3x+1 = p(x)$, demuestra que $p(z) = p(\overline{z})$ cualesquiera que sean los z para los que $p(z) \in \mathbb{R}$*

Sea $z = a + bi$, por las propiedades de la conjugación, sabemos que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = p(z) \Leftrightarrow p(z) \in \mathbb{R}$, luego, $(a+bi)^2 + 3(a+bi) + 1 \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 + 2abi + 3a + 3bi + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab + 3b = 0$$

Ejercicio 4.4 *Calcula el producto $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100}$ y la suma $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$.*

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100} = i^{1+2+\cdots+100} = i^{5050} = i^{2+4\cdot 1262} = i^2 \cdot \left(i^4\right)^{1262} = i^2 = 1$$

$$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100} = \frac{i \cdot i^{100} - i}{i-1} = \frac{i-i}{i-1} = 0$$

4.4.4 Representación geométrica de los números complejos

Supongamos que en $\mathbb{R}^2$ tenemos un sistema de referencia. Consideramos la aplicación de $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$, que asocia a cada número complejo $z = a + bi$ el punto de coordenadas (a,b), a dicho punto se le denomina afijo del punto z.

Ejercicio 4.5 *Representa en el plano complejo los números que verifican:*

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2}$

2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i$

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + iy + x - iy = 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i \Rightarrow x + iy - (x - iy) = 2yi = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

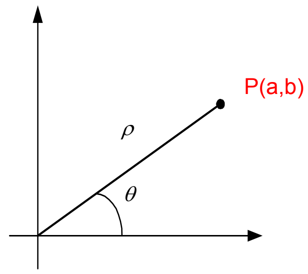


Figure 4.1:

4.4.5 Módulo y argumento

Definición 4.2 *Se llama módulo de un número complejo* $z = x + yi$ *al número real positivo* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

De la definición se sigue que:

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
2. $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$
3. $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$

Propiedades Sean z y z' números complejos, se verifica:

P1 $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

P2 $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

P3 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Definición 4.3 *Utilizando coordenadas polares, tenemos que:*

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$a + bi = \rho\cos\theta + \rho i\sin\theta = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

donde $\rho = |z|$ *. Se define* $\arg(z) = \theta + 2k\pi$*, es decir,* $\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & si\ x = 0\ e\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & si\ x = 0\ e\ y < 0 \end{cases}$

La expresión $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ se denomina forma trigonométrica, y a ρ_θ se le llama forma módulo-argumental.

Teorema 4.2 *Fórmula de Euler.- Para todo número real x,se verifica:*

$$e^x = \cos x + i \sin x$$

Proof. *Tomamos $y = \sin x \Rightarrow \arcsin y = x$, de donde:*

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \left\{ \begin{array}{c} y = iz \\ dy = idz \end{array} \right\} = \int \frac{idz}{\sqrt{1-i^2z^2}} = \\ &= i \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i \log \left(z + \sqrt{1+z^2} \right) \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= ar \sin y = i \log \left(\frac{y}{i} + \sqrt{1 + (iy)^2} \right) \Rightarrow ix = i^2 \log \left(-iy + \sqrt{1-y^2} \right) = \\ &= -\log(-i \sin x + \cos x) = \log \left(\frac{1}{\cos x - i \sin x} \right) = \log \left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos^2 x - i^2 \sin^2 x} \right) = \\ &= \log \left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \right) = \log(\cos x + i \sin x) \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x \ \blacksquare \end{aligned}$$

Así, podemos escribir:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

donde, e^a es el módulo y b es el argumento del número complejo e^z.

Observación: $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, e $i\pi$ es solución de la ecuación $e^x = -1$

Corolario 4.3

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + \sin n\theta)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta} \right)^n &= e^{in\theta} \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Corolario 4.4 *La función e^{ix} es periódica de periodo $2\pi i$.*

$$e^{ix+i2\pi} = e^{i(x+2\pi)} = \cos(x+2\pi) + i \sin(x+2\pi) = \cos x + i \sin x$$

Observemos:

1. $\rho_\theta = \sigma_\varphi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \rho = \sigma \\ \theta - \varphi = 2k\pi \end{array} \right.$
2. $\rho_\theta \cdot \sigma_\varphi = \rho \cdot \sigma_{\theta+\varphi}$
3. $\dfrac{\rho_\theta}{\sigma_\varphi} = \left(\dfrac{\rho}{\sigma} \right)_{\theta-\varphi}$

4. **Fórmula de Moivre** $(1_\theta)^n = (1^n)_{n\theta} = 1_{n\theta}$, es decir:

$$[1(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = 1^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$$

Ejercicio 4.6 *Describe el conjunto de puntos z tal que:*

1. $\mathrm{Re}(z) = 0$; $\mathrm{Re}(z) > 0$; $|z| = 1$; $|z| > 1$; $\mathrm{Im}(z) = 1$; $\mathrm{Im}(z) < 1$; $1 < |z| < 2$.

2. $|z-1| = 2$; $|z-1| < 2$; $|z-1| = |z+1|$

3. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$; $|z-2| = \mathrm{Re}(z) + 2$; $|z-5| - |z+5| = 6$; $|z-3| + |z+3| = 8$

1. Si $z = x + iy \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = 0$ que representa una recta, el eje de ordenadas; $\mathrm{Re}(z) = x > 0$ es un semiplano.$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $1.1 < |z| < 2$ es una corona circular de radios 1 y 2 respectivamente.

2. $|z-1| = 2$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1| < 2$ el circulo de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1| = |z+1|$ es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, es decir, la mediatriz de ese segmento.

3. $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)| = 1 = |x|+|y|$ es un cuadrilátero de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0)$ y $(0,-1)$. $|z-5| - |z+5| = 6$ lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos $(5,0)$ y $(-5,0)$) es constante, es decir, una hipérbola. $|z-3| + |z+3| = 8$ es el lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) $(3,0)$ y $(-3,0)$ es constante, es decir, una elipse. $|z-2| = \mathrm{Re}(z) + 2$ lugar geométrico de puntos del plano equidistantes de un punto fijo y una recta, es decir, una parábola.

4.4.6 Raíces de números complejos

Nos proponemos resolver la ecuación $z^n - z_0 = 0$, es decir, hallar la raíz n-ésima de un número complejo; el problema tiene fácil solución en forma módulo-argumental.

Sea $z_0 = r_\varphi$, entonces, $z = x_\phi$ es solución, si verifica:

$$(x_\phi)^n = r_\varphi$$

pero

$$(x_\phi)^n = x^n_{n\phi} = r_\varphi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^n = r \\ n\phi = \varphi + 2k\pi \end{array} \right.$$

al ser x y r números reales positivos, siempre existe $x = \sqrt[n]{r}$; y $\phi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k \in Z$, de los cuales sólo son distintos aquellos que se obtiene para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo 4.5 *Resolver la ecuación* $z^3 = 1$.

$$1 = 1_0 \Rightarrow (x_\phi)^3 = x^3_{3\phi} = 1_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^3 = 1 \\ 3\phi = 0 + 2k\pi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ \phi = \frac{2k\pi}{3}; k = 0,1,2 \end{array} \right.$$

las soluciones son:

$$1_0, 1_{\frac{2\pi}{3}}, 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

observemos que

$$1_0 = 1, 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = w, 1_{\frac{4\pi}{3}} = 1e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = w^2$$

verificándose que $1 + w + w^2 = 0$ y que $w^3 = 1 \Rightarrow w^2 = \dfrac{1}{w} = \dfrac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \overline{w}$.

Veamos un ejemplo donde se hace uso de estas propiedades.

Ejemplo 4.6 *Demostrar que para cualquier número natural n el polinomio $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ es divisible por $\left(x^2 + x + 1\right)^2$.*

Vamos a demostrar que las raíces de $\left(x^2 + x + 1\right)^2$ dividen a $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ con lo que estará probado.

$$(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = x^3 - 1$$

luego las raíces de $x^2 + x + 1$ son las raíces complejas de $z^3 = 1$, es decir, w y $\overline{w} = w^2 = \frac{1}{w}$, y las raíces de $\left(x^2 + x + 1\right)^2$ son w^2 y $w^4 = w^3 w = w$.

$$(w+1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = \left\{w + 1 = -w^2\right\} = \left(-w^2\right)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1$$

y al ser

$$\begin{aligned} \left(-w^2\right)^{6n+1} &= -w^{12n+2} = -w^{12n}w^2 = -\left[w^3\right]^{4n} w^2 = -w^2 \\ w^{6n+1} &= \left(w^3\right)^{2n} w = w \end{aligned}$$

de donde

$$(w+1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = -w^2 - w - 1 = 0$$

Análogamente procedemos con la otra raíz, w^2.

4.4.7 Aplicación al cálculo trigonométrico

La fórmula de Moivre nos sirve para realizar cálculos trigonométricos, por ejemplo, expresar $\sin 2a$, $\cos 3a$, $\cos 4a$, …, $\cos^2 a$, $\cos^3 a$, …

En efecto, aplicando la citada fórmula, podemos escribir:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

y sólo tenemos que desarrollar por la fórmula del binomio el primer término.

Así tendremos, por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{aligned} (\cos a + i \sin a)^2 &= \cos 2a + i \sin 2a \\ \cos^2 a + 2i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a &= \cos 2a + i \sin 2a \\ \cos^2 a - \sin^2 a + 2i \cos a \sin a &= \cos 2a + i \sin 2a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \\ 2 \cos a \sin a = \sin 2a \end{array} \right\} \\ \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) &= \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ y } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{aligned}$$

También podemos obtener el seno de una suma o diferencia a partir de la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

pero, por otra parte:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\cos a \sin b + \sin acob)$$

igualando las partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b \end{aligned}$$

Las transformaciones de productos de senos y/o cosenos, son muy utililes en el cálculo de primitivas, veamos un procedimiento sencillo basado en la fórmula de Euler.

Ejemplo 4.7 *Transformar* $\sin x \sin 2x$ *en sumas de senos y/o cosenos.*

Sea $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$.
Sumando y restando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \sin 2x &= \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \end{aligned}$$

y multiplicando

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} = \frac{1}{-4}\left(e^{3ix} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-3ix}\right) = \\ &= \frac{1}{-4}\left[\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) - \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)}{2} - \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2}\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos 3x - \cos x\right] \end{aligned}$$

4.4.8 Factorización de polinomios.

La importacia de los números complejos radica en que es un cuerpo cerrado, es decir, toda ecuación algebraica de coeficientes complejos, tiene por lo menos una raíz. A este resultado se le conoce como teorema fundamantal del Álgebra.

Una ecuación $F(x) = 0$ donde F es una función polinómica, la llamaremos una ecuación algebraica.

Si $F(x) = 0$ contiene al menos una función trascendente $e^x, \log x, \cos x$,etc. diremos que $F(x) = 0$ es trascendente.

Diremos que α es una raíz o cero de $F(x) = 0$ si $F(\alpha) = 0$.

Si α es raíz de $F(x) = 0$, entonces $x - \alpha$ divide a $F(x)$, es decir, $F(x) = (x - \alpha) Q(x)$. Si $(x - \alpha)^r$ divide a $F(x) = 0$ y $(x - \alpha)^{r+1}$ no divide a $F(x)$, diremos que α es una raíz de $F(x) = 0$ con multiplicidad r, o bien, que α es una raíz múltiple de orden r.

Proposición 4.5 *Si $F(x) = 0$ es una ecuación algebraica con coeficientes reales y tiene una raíz compleja z, entonces su conjugado $\overline{z}$ es también raíz de la ecuación..*

Consecuencias:

Si $F(x) = 0$ es una ecuación algebraica de grado impar con coeficientes reales, tiene al menos una raíz real.

Todo polinomio con coeficientes reales, se descompone en factores lineales y/o cuadráticos, los factores lineales corresponden a raices reales y los cuadráticos a los pares de raices complejas conjugadas. Si

$$F(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

con $a_i \in C$, entonces

$$F(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

a a_n se le denomina coeficiente principal de $F(x)$.

En la expresión anterior, pueden aparecer raices múltiples, en dicho caso la expresión sería de la forma:

$$F(x) = a_n (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_m)^{r_m}$$

con $r_1 + \cdots + r_m = n$.

Ejemplo 4.8 *Descomponer $x^4 + 1$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.*
Con un poco de suerte, podemos expresar

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2x^2 = \left(x^2 + 1 + \sqrt{2}x\right)\left(x^2 + 1 - \sqrt{2}x\right)$$

y lo tendríamos descompuesto en $\mathbb{R}$.

$$x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-1} = \left\{1_{\frac{\pi}{4}}, 1_{\frac{3\pi}{4}}, 1_{\frac{5\pi}{4}}, 1_{\frac{7\pi}{4}}\right\}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 1 \quad &= \quad \left(x - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(x - \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right) \cdot \\ &\quad \left(x - \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)\left(x - \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\cdot \\
&\quad \left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)
\end{aligned}$$

Proposición 4.6 *Sea $F(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, entonces si $\alpha \in Z$ es una raíz, se verifica:*

$$\begin{aligned}
&\alpha\,|a_0 \\
(\alpha-1)\,|F(1)\ \alpha &\neq 1 \\
(\alpha+1)\,|F(-1)\ \alpha &\neq -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9 *Calcular las raices de $P(x)=x^5-3x^4+6x^2-3x+8$*

$$\begin{aligned}
p(1) &= 9 \\
p(-1) &= 13 \\
D(8) &= \{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}
\end{aligned}$$

Si a es una posible raíz, es decir, un divisor de 8, tiene que ser $a+1$ divisor de 13, y la unica posibilidad es que $a+1$ sea ±1, la unica posibilidad es $a=-2$, como $P(2)\neq 0$, el polinomio no tiene raices enteras.

Proposición 4.7 *Los polinomios mónicos (el coeficiente principal es 1) con coeficientes enteros si tienen soluciones racionales, estas son enteras.*

Ejemplo 4.10 *El polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x+1$ no tiene raices racionales pues $P(1)=3$ y $P(-1)=3$, al ser de grado impar, podemos asegurar que tiene una raíz real y esta es irracional.*

Ejemplo 4.11 *Hallar las raices racionales de $x^4-3x^3+2x-2=0$*
Sólo tiene raices enteras pues $a_4=1$, y los posibles valores son $D(2)=\{\pm1,\pm2\}$, además $P(1)=-2$ y $P(-1)=0\Rightarrow -1$ es raíz, comprobamos que es simple.

$$x^4-3x^3+2x-2=(x+1)\left(x^3-4x^2+4x-2\right)=(x+1)\,Q(x)$$

$Q(1)=-1$, $Q(-1)=-11$, *que es primo, luego la unica raíz racional es -1.*

Proposición 4.8 *Si querermos obtener las raices racionales de polinomios $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, con coeficientes enteros, hacemos el cambio $x=\frac{z}{a_n}$.*

Ejemplo 4.12 *Hallar las raices racionales de* $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x - 3 = 0.$

$$\begin{aligned} x &= \frac{z}{4} \\ z^3 + 8z^2 + 4z - 48 &= 0 \end{aligned}$$

y este polinomio sólo tiene raices racionales enteras.

$$\begin{aligned} Q(1) &= -35 \\ Q(-1) &= -45 \\ D(48) &= \pm\{1,2,4,8,16,3,6,12,24,48\} \end{aligned}$$

sabiendo que una raíz a ha de ser divisor de 48 y que debe cumplir:

$$\begin{aligned} &(a-1)\,|35 \\ &(a+1)\,|45 \end{aligned}$$

entonces $a \in \{2,4,-4,-6\}$ *, las raices son* $\{2,-4,-6\} \Rightarrow$ *las raices de P son* $\frac{2}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{6}{4}$.

4.4.9 Ejercicios

Ejercicio 4.7 *Hallar* $z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}}$

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}} = z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{25}}$$

Pasamos los número complejos a su forma polar

$$\begin{aligned} z_0 &= 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ |z_0| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{100}_{100\frac{\pi}{4}} = 2^{50}{}_{25\pi} \\ z_1 &= 1-i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{1}{4}\pi \\ |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}} \\ z &= \frac{2^{50}{}_{25\pi}}{\sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}^{75}_{75\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{75}_{\frac{3\pi}{4}} = 2^{37}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{37}\sqrt{2}(-1+i) \end{aligned}$$

Ejercicio 4.8 *Calcular* $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ *para* $n = 1,2,3,4$ *y probar que* $f(n+4) = -f(n)$ $(n > 0$ *entero*$)$

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{n\pi}{4}i} = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\
f(2) &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \\
f(3) &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\
f(4) &= 2\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -2 \\
f(n+4) &= 2\cos\left(\frac{(n+4)\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\pi\right) = -2\cos\frac{n\pi}{4} = f(n)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.9 *Girar 45º el vector $z = 3 + 4i$ y extenderlo el doble.*

Girar una figura o un vector 45^o, equivale a multiplicarlo por el número complejo $z = 1_{45^o} = 1_{\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ y para extenderlo el doble basta con multiplicar por 2.

$$(3+4i)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)2 = -\sqrt{2}+7i\sqrt{2}$$

Ejercicio 4.10 *Calcular la suma* $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na$
Consideramos

$$\begin{aligned}
z = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na + i(\sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na) &= \\
= \cos a + i\sin a + \cos 2a + i\sin 2a + \cdots + \cos na + i\sin na &= \\
= e^{ia} + e^{i2a} + \cdots + e^{ina} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{suma de n términos de} \\ \textit{una progresión geométrica} \end{array} \right\} = \frac{e^{ina}e^{ia} - e^{ia}}{e^{ia}-1} &= \\
= e^{ia}\frac{e^{ina}-1}{e^{ia}-1} = e^{ia}\frac{\cos na + i\sin na - 1}{\cos a + i\sin a - 1} = e^{ia}\frac{-1+\cos na + i\sin na}{-1+\cos a + i\sin a} &= \\
= e^{ia}\frac{-\sin^2\frac{na}{2} + i2\sin\frac{na}{2}\cos\frac{na}{2}}{-\sin^2\frac{a}{2} + i2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \frac{-\sin\frac{na}{2} + i2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} + i2\cos\frac{a}{2}} &= \\
= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \frac{-i\sin\frac{na}{2} + i^2 2\cos\frac{na}{2}}{-i\sin\frac{a}{2} + i^2 2\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \frac{-\sin\frac{na}{2} - 2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} - 2\cos\frac{a}{2}} &= \\
= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{na}{2}-\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{na}{2}+\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot e^{i\frac{(n+1)a}{2}} &= \\
= \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n+1}{2}a + i\sin\frac{n+1}{2}a\right)&
\end{aligned}$$

de donde, igualando la parte real y la imaginaria, tendremos:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \cos\frac{n+1}{2}a$$

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots + \sin na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \cdot \sin\frac{n+1}{2}a$$

Ejercicio 4.11 *Demostrar las fórmulas de Moivre:*

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}=0$$
$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}=0$$

Ejercicio 4.12 *Hallar las raices de la ecuación* $(1+i)\,z^3-2i=0$

Ejercicio 4.13 *Escribir en forma binómica* $e^{\sqrt{i}}$.

Ejercicio 4.14 *Resolver la ecuación* $z^4-16=0$.

Ejercicio 4.15 *Resolver la ecuación* $z^4+16=0$.

Ejercicio 4.16 *Resolver la ecución* $(z+1)^3+i\,(z-1)^3=0$.

Ejercicio 4.17 *Calcular las raices racionales de las ecuaciones:*

$$x^4+4x^3+x^2-12x-12=0$$
$$6x^3-25x^2+3x+4=0$$
$$2x^3-x^2-x-3=0$$

Ejercicio 4.18 *Calcular las raices racionales de las ecuaciones:*

$$x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8} = 0$$
$$x^4-\frac{3}{2}x^3+3x-\frac{9}{2} = 0$$